Math. U. 308 l

<36627059790011 S

<36627059790011

Bayer. Staatsbibliothek

Mathematische Beiträge

zum

Kulturleben der Völker

von

Dr. Moritz Cantor.

Mit vier Tafeln.

Halle,

Druck und Verlag von H. W. Schmidt.

1863.

Ausgeschieden

Cantor Mathem. Beiträge

Hb/65/5

102 B6

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Inhaltsverzeichniss.

Einleitung.

S. 1—8.

Seite

Grundgedanke des Werkes 1
Unmittelbare Veranlassung zu dessen Veröffentlichung . . 5
Vorarbeiten von Chasles, Vincent, Martin (de Rennes) . . 6
Plan des Werkes 7

I. Die Egypter.

S. 9—21.

Altegyptische Bildung 9
Clemens von Alexandrien, dessen Stromata 11
Hieroglyphenschrift in drei verschiedenen Arten . . . 11
Entzifferung der Hieroglyphen, der Stein von Rosette . . 13
Zahlen ausgeschrieben 15
Hieroglyphische Zahlzeichen 15
Hieratische und demotische Zahlzeichen 17
Horapollo über egyptische Zahlbezeichnung 18
Egyptische Mathematik 19

II. Die Babylonier.

S. 22—38.

Keilschriften in drei verschiedenen Arten 22
Die Entzifferungsversuche 24

	Seite
Die drei Sprachen der Keilinschriften	26
Die Zahlzeichen der Keilschrift	28
Beschränktheit des Zahlbegriffes der Babylonier	30
Functionswechsel der Zeichen bei veränderter Stellung	31
Das Rechenbrett bei den Babyloniern	32
Wissenschaftliche und handelspolitische Höhe babylonischer Kultur	33
Mathematik der Babylonier	35

III. Die Chinesen.

S. 39—52.

Chinesische Sprache	39
Chinesische Schrift	41
Nothwendigkeit besonderer Zahlzeichen	43
Zahlensysteme	44
Altchinesische Zahlzeichen	45
Neuchinesische Kaufmannsziffern	45
Neuchinesische wissenschaftliche Ziffern	47
Das Zeichen ling	48
Das chinesische Zweiersystem	48
Verbindung Chinas mit dem Westen	50

IV. Die Inder.

S. 53—69.

Das Sanskritvolk und die Sanskritsprache	53
Arya-Bhaṭṭa	54
Brahmegupta	55
Bhascara-Acharya	56
Die Sage verweist den Ursprung unserer Zahlzeichen nach Indien	57
Zahlzeichen der Insel Ceylon	58
Ableitung der modernen Ziffern aus Strichen	59
Die Devanagari-Schrift	61
Prinsep's Entdeckung	64
Die Methode des Arya-Bhaṭṭa	65
Die Null	67
Die Methode südindischer Astronomen	68
Die Methode der symbolischen Positionsarithmetik	69

Seite

V. Das Leben des Pythagoras.

S. 70—82.

Geburt, Jugenderziehung und Flucht des Pythagoras . . . 71
Aufenthalt in Milet 72
Aufenthalt in Egypten 74
Babylonische Gefangenschaft 76
Befreiung 77
Ankunft in Italien und Auftreten daselbst 78
Die Schule des Pythagoras 80
Sturz des Pythagoras 81

VI. Die Geometrie des Pythagoras.

S. 83—94.

Rechtfertigung des Bisherigen 83
Die Elemente, ein Kunstwort 85
Egyptischer Ursprung der geometrischen Elemente . . 86
Theon von Smyrna und seine Schriften 87
Sätze des Thales 89
Sätze des Pythagoras 89
Sätze von Schülern des Pythagoras 90
Der platonische Timäus, geometrische Stelle . . . 91
Das mathematische Experiment in der Geometrie . . . 92
Das Sternpolygon 93

VII. Die Arithmetik des Pythagoras.

S. 95—110.

Babylonischer Ursprung der wissenschaftlichen Arithmetik . 95
Die geometrische Form der griechischen Arithmetik . . 96
Das Epanthem des Thymaridas 97
Die Pythagorischen Elementarbegriffe 98
Der platonische Timäus, arithmetische Stelle . . . 99
Zahlensymbolische Ideen gleicher Art in China und Griechenland 101
Das Dreieck aus den Linien 3, 4, 5 103
Das mathematische Experiment in der Arithmetik . . . 105
Der pythagoräische Lehrsatz 107
Arithmetisch-geometrische Folgerungen aus demselben . . 108

Seite

VIII. Die Zahlzeichen der Griechen.
S. 111—127.

Strichnotation der Zahlen 112
Die Zahlschreibung des Herodianus 113
Die Buchstaben zur Bezeichnung der Zahlen 1—24 . . 115
Die Buchstaben zur Bezeichnung der Zahlen 1 bis 900 . 115
Das griechische Alphabet und dessen Veränderungen . . 116
Anagrammatische Zahlbezeichnung 118
Wissenschaftliche Zahlbezeichnung 118
Notation des Camerarius 120
Die sogenannte Null der Griechen. Delambre . . . 121
Niebuhr 123
Boeckh 124

IX. Das Rechenbrett.
S. 128—139.

Beschreibuug des einfachsten Abacus 128
Der Tschotü 130
Der Suanpan 131
Der Rechentisch von Salamis 132
Der Exchequer 133
Die Tallies 135
Der römische Abacus 138

X. Das Rechenbrett (Fortsetzung).
S. 140—154.

Etymologie von Abacus 140
Veränderung des Abacus in der Schule des Pythagoras . 143
Richtung der Kolumnen des Abacus gegen den Rechner . 143
Anzahl der Kolumnen 146
Die Wörter für 1000 und für 10000 146
Die Tetraden des Apollonius 148
Die Octaden des Archimed 149
Die Multiplicationsmethode des Apollonius 151
Die römischen Triaden 152

XI. Die Zahlzeichen der Römer.
S. 155—167.

Die gewöhnlich sogen. römischen Zahlzeichen . . . 155
Subtractive Darstellung von Zahlen 156

Seite

Ableitung der römischen Zahlzeichen nach Priscianus . . 159
nach Ramus . . 160
Tuskische Zeichen 161
Bezeichnung der Tausende 162
Die Feuersignale des Julius Sextus Africanus . . . 165
Die sogen. chaldäischen Zahlzeichen 166
Die tironischen Zeichen 167

XII. Römische Mathematiker.
S. 168—180.

Niedrige Stellung der Mathematik bei den Römern . . 168
Marcus Terentius Varro 169
Marcus Vitruvius Pollio 170
Sextus Julius Frontinus, das Fragment von Chartres . . 170
Appulejus von Madaura 172
Andron von Catanea 172
Die Agrimensoren 173
Die arcerianische Handschrift 174
Martianus Capella 175
Aurelius Cassiodorus 176
Anicius Manlius Torquatus Severinus Boethius . . . 176
Archytas von Tarent 179

XIII. Die Werke des Boethius.
S, 181—198.

De consolatione 181
Die compilatorischen Schriften des Boethius . . . 182
Das Quadrivium 184
Die Geometrie des Boethius hat existirt 185
Sie existirt noch unter diesem Titel 186
Der lateinisch schreibende Archytas 191
Das Sternpolygon bei Boethius und Anderen . . . 194
Das sogenannte dritte Buch der Geometrie des Boethius . 196

XIV. Die Handschrift E. Multiplication.
S. 199—211.

Untersuchung der Handschrift E durch Weidler . . . 199
Untersuchung durch Mannert 199

Seite
Neue Untersuchungen 200
Der Abschnitt über das Verhältniss des Abacus . . . 201
Multiplicationsregeln 203
Die Tabelle des Pythagoras 204
Die Apices 205
Fingerzahl, Gelenkzahl 207
Die Fingerrechnung 209

XV. Handschrift E. Division. Minutien.

S. 212—230.

Divisionsregeln der Handschrift E 212
Erklärung der complementären Division 213
Die Multiplication mit Hülfe der Differenz 215
Das anonyme Werk: Algorithmus Demonstratus . . . 216
Die Minutien 218
Sind die arithmetischen Abschnitte der Geometrie echt? . 221
Die Zeichen der Minutien 222
Die Ansicht von Boeckh über die Geometrie des Boethius . 225
Widerlegung derselben 226
Die beiden Tabellen stehen da, wo sie stehen müssen . . 228
Die Astronomie des Boethius 228
Gegensatz von Arithmetik und Logistik 229

XVI. Pythagorische Zeichen.

S. 231—250.

Interpolationen auf dem Abacus der Handschriften . . 231
Die Namen der Zahlen 232
Die musikalischen Noten 234
Die Zeichen der Längenmaasse 234
Die pythagorischen Zahlzeichen 235
Deren Ursprung nach Hager und Paravey 235
nach Piccard 236
Eklektische Herleitung der Zahlzeichen 237
Nachträgliche Etymologien 238
Die Hypothesen von Vincent für die Zeichen 1, 2, 3 . . 239
Die Zeichen 4, 5, 6 240
Die Zeichen 7, 8, 9 242
Andere Erklärung der Zeichen 7, 8 243

Seite
Etymologie der Zahlnamen 245
Theilweise griechischer Ursprung derselben . . . 245
Die Gobâr-Ziffern 247
Das Wort Sipos und dessen Zeichen 249

XVII. Die Zahlzeichen der Araber.

S. 251—263.

Das phönikische Alphabet und seine Benutzung als Zahlzeichen 252
Methode der Hebräer 253
Palmyrenische Zahlzeichen 254
Syrische Zahlzeichen 256
Die syrischen Buchstaben als Zahlzeichen 256
Arabische Schrift 257
Das Abudjed 258
Die sogen. indischen Zahlzeichen der Araber . . . 260
Die Null trat zu schon vorhandenen Zeichen neu hinzu . 261
Das Scholion des Neophytus 262

XVIII. Arabische Rechenkunst.

S. 264—275.

Die Förderung der Wissenschaft durch die Khalifen . . 264
Uebersetzungen aus dem Griechischen 265
Die pythagorischen Zeichen bei den Arabern . . . 265
Mohammed ben Musa Alkharezmi 266
Algorithmus und dessen Ableitungen 267
Die Uebersetzung des Mohammed ben Musa (durch Atelhart von Bath ?) 268
Sexagesimalbrüche 271
Nichtvorkommen der complementären Division . . . 272
Die spanischen Araber 272
Johannes von Sevilla 273
Die Essenz der Rechenkunst des Beha-eddin . . . 274
Die Ausziehung der Quadratwurzel mit Hülfe von Decimalbrüchen 275

XIX. Isidor, Beda, Alcuin.

S. 276—291.

Isidor von Sevilla 277

Seite

Dessen Origines betiteltes Werk 278
Beda Venerabilis 279
Dessen mathematische Schriften 281
Die pythagorischen Zeichen der Längenmaasse . . . 283
Die Anleitung zum Dividiren rührt von Gerbert her . . 283
Alcuin 285
Dessen arithmetische Aufgaben und Auflösungen . . . 286
Das Manuscript von Ivrea 289
Das Manuscript von Zürich 290

XX. Odo von Clüny.

S. 292 - 302.

Odo von Clüny 292
Dessen Dialog über die Musik 293
Die mathematischen Schriften Odo's 293
Jedenfalls datiren die Regeln des Abacus vor das 13. Jahrhundert 295
Inhalt dieser Schrift 296
Die Zeichen der Minutien 300
Die Rhythmimachie 302

XXI. Gerbert's Leben.

S. 303—313.

Gerbert in Aurillac 304
Graf Borel von Barcelona 304
Hatto, Bischof von Vich 305
Gerbert in der spanischen Mark 305
Reise nach Rom 306
Zusammenkunft Gerbert's mit Otto I. 307
Zehnjähriger Aufenthalt in Rheims 307
Gerbert, Abt in Bobbio 308
Zweiter Aufenthalt in Rheims 308
Politische Thätigkeit Gerbert's 309
Reise nach Deutschland zu Otto III. 311
Römerzug Otto III. 312
Gerbert, Erzbischof von Ravenna 312
Gerbert Pabst als Sylvester II. 313

Seite

XXII. Gerbert's Mathematik.

S. 314—329.

Hiess ein Lehrer Gerbert's Josephus? 314
Plan, nach welchem Gerbert unterrichtete 316
Gerbert's Rechenbrett 317
Der Brief an Remigius von Trier 318
Gerbert's Geometrie 319
Der Brief an Constantinus 320
Das Buch, von welchem in diesem Briefe die Rede ist . . 322
Gerbert keinenfalls Verfasser der in Handschrift E enthaltenen Geometrie 323
Gerbert's Brief an Otto III. 324
Die Chronik des Adhemar von Chabanois 326
Die Chronik von Verdun 327
Wilhelm von Malmesbury 327

XXIII. Abacisten und Algorithmiker.

S. 330—340.

Die Abacisten 331
Bernelinus 332
Gerland 333
Radulph von Laon 334
Das Zeichen des Sipos und dessen Anwendung . . . 336
Die späteren Horizontalreihen auf dem Abacus . . . 337
Die Bögen und deren Anzahl 338
Die Algorithmiker 339
Die Kenntniss griechisch-römischer Rechenkunst schwindet . 339

XXIV. Leonardo von Pisa.

S. 341—354.

Leonardo Fibonacci 341
Das Buch über den Abacus aus dem Jahre 1202 . . 342
Die praktische Geometrie 344
Leonardo wird dem Kaiser Friedrich II. vorgestellt . . 344
Disputation mit Johann von Palermo 345
Das Buch über Quadratzahlen 346
Flos 346
Die Aufgabe der Vögel 347
Inhalt des Abacuswerkes 348

Seite
Die Methode der Inder 349
Die Regel Elchatayn oder Falsi 349
Andere Methoden, welche nach verschiedenen Ländern hinweisen 352

Schlussbetrachtungen.

S. 355–363.

Zusammenstellung einiger neuen Untersuchungen aus diesem Buche 356
Die Lebensbeschreibung des Pythagoras und ihre Gegner . 357
Der längste Tag der Chaldäer, Chinesen und Inder . . 361
Die Zahl 60 und ihre Vielfachen bei den Persern . . 361

Anmerkungen S. 364—432

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Einleitung.

Es gab eine Zeit — und wem wären Werke aus dieser Zeit *nicht* erinnerlich — in welcher man die Weltgeschichte fein säuberlich abtheilte und sorgsam Acht gab, dass ja Nichts aus einem Gefache in das andere hinüberreiche. Da gab es eine Geschichte der Griechen und eine Geschichte der Römer, vielleicht auch eine Geschichte orientalischer Reiche, und wenn diese drei einzelnen Kästchen in einem Futterale staken, dann nannte man es Geschichte des Alterthums. Fast ebenso ging es mit der Geschichte des Mittelalters, der Neuzeit. Noch viel strenger war aber die Sonderung, wenn wir die Geschichte einzelner Kulturzweige betrachten. Es verstand sich fast von selbst, dass eine Geschichte der Religionen sich nicht um die Geschichte der Kunst zu kümmern habe, dass diese mit der politischen Geschichte Nichts gemein habe, dass die Geschichte dieser oder jener Wissenschaft wieder ein für sich abgeschlossenes, von chinesischer Mauer umgebenes Ganze bilde. In der eigentlich sogenannten Weltgeschichte denkt jetzt wohl Niemand mehr daran, eine derartige principielle Scheidung für möglich zu halten. Man ist zu der Ueberzeugung gelangt, dass die Menschheit einem Organismus gleicht, dessen einzelne Glieder in immerwährender, wenn auch nicht stets auf den ersten Blick ersichtlichen Verbindung stehen. Man hat sich der Gewissheit nicht verschliessen können, dass jede Bewegung des einzelnen Gliedes früher oder später, mehr oder weniger auch den übrigen sich mittheile, und daher

auch nur im Zusammenhange betrachtet und beurtheilt werden könne. Auch die Geschichten der einzelnen Kulturen mussten einer Kulturgeschichte weichen. Man suchte nachzuweisen, und die Schule, die den Versuch wagte, wächst täglich, dass das Kulturleben der Völker ebensowenig abgeschlossen ist, wie ihr politisches Leben. Das ist eigentlich selbstverständlich, und dennoch gilt es hier, noch manche Vorurtheile zu vernichten. Es gilt noch immer, den Beweis zu führen, dass wo Völker friedlich oder feindlich zusammentrafen und längere Zeit mit einander verkehrten, nothwendiger Weise die Bildung derselben sich vermischen musste, dass aber auch rückwärts der Schluss gezogen werden könne: Wenn bei Völkerschaften eine Aehnlichkeit auf diesem oder jenem Gebiete der Geistesentwickelung stattfindet, so ist das meistens kein blosser Zufall, sondern die Folge von gegenseitiger Einwirkung oder gemeinsamem Ursprunge. Diese letztere Beweisführung kann nur von der Specialforschung geführt werden, und in der That haben Männer weit ausgebreiteten Wissens die Götterfiguren der einzelnen Religionen, die Wortformen der einzelnen Sprachen, die Kunststyle der da und dort zerstreuten Bauwerke und Skulpturen zu dem angegebenen Zwecke verglichen. Nenne ich indessen zu diesen drei Gebieten noch das der Litteratur, welches eigentlich der vergleichenden Sprachforschung schon anheimfällt, so ist damit die Aufzählung jener Versuche so ziemlich erschöpft. Schon seit einer Reihe von Jahren dachte ich nun, es müsse möglich sein, noch andere Berührungs- und Verschmelzungspunkte der Völker nachzuweisen. Wurde doch jene Strasse, welche von Volk zu Volk führte, nicht bloss von Priestern, von Baumeistern, Bildhauern und Dichtern betreten, muss doch wohl jeder Stand auf ihr gewandelt sein und seine Spuren hinterlassen haben. Ich konnte mir daher wohl denken, dass z. B. eine vergleichende Geschichte der Kochkunst der einzelnen Nationen von Interesse sein könnte, lange bevor ich zufällig erfuhr, dass wirklich ein in Donaueschingen verstorbe-

ner Forscher, wenn ich nicht irre Herr Schuch, sich eifrig damit beschäftigte, eine solche zusammenzustellen.

Mein eigener Beruf als Mathematiker wies mir gleichfalls ein Feld der Nachforschung an, welches bisher noch wenig oder gar nicht bebaut war. Und dennoch, was war natürlicher, als dass bei dem Verkehre der Völker ebenso wie bei dem der Einzelnen solche Verhältnisse sich ergeben mussten, welche eine mathematische Bildung, einfachster Art wenigstens, theils nöthig machten, theils voraussetzten. Die Untersuchungen, welche von diesem meinem Gesichtspunkte aus anzustellen waren, zeigten freilich eine nicht unbedeutende Schwierigkeit. Der Gegenstand derselben, die einfachsten Sätze der Messkunst, die Anfänge des Zahlenrechnens, die davon unzertrennliche Frage nach den Zahlensystemen und vor Allem nach den Zahlzeichen, das waren so elementare Dinge, dass Vorarbeiten über die Geschichte derselben, wie ich sie brauchte, nur sehr zerstreut sich vorfanden, dass ein Sammeln dieses Materials fast mehr dem Zufalle überlassen bleiben musste, als es aus einer geordneten Thätigkeit hervorgehen konnte. Aber noch schlimmer, die Dinge, mit deren Geschichte ich mich beschäftigen wollte, waren, wie ich schon sagte, auch dem Einzelverkehr so unentbehrlich, dass eine gleichzeitige Erfindung an verschiedenen Orten sehr wohl möglich war, und dann hörten alle Folgerungen auf, welche auf den Zusammenhang der Völker gezogen werden wollten. Diesen Schwierigkeiten gegenüber trat aber allerdings auch wieder eine grosse Erleichterung darin hervor, dass ich mich an Einzelheiten halten konnte, die weit sicherer als Resultate einer Verbreitung als vielmehr einer selbstständigen Entstehung aufgefasst werden können. Grosse Gedanken reifen mitunter gleichzeitig in verschiedenen Köpfen, kleinere Rechenvortheile hingegen, bestimmt geformte Zeichen, Symbolisirungen, welche keinen an sich gegebenen Anhalt haben, solcherlei lässt, wenn es an verschiedenen Orten vorkommt, wohl mit Sicherheit auf eine Uebertragung schliessen. Es verhält sich damit ähnlich, wie mit jenen kleinen Ornamenten der Baukunst,

welche stylmässig geworden die Fortpflanzung der Kunst von Ort zu Ort verfolgen lassen. So sammelte ich denn zu dem gegebenen Zwecke, wo immer Brauchbares mir erscheinen mochte, und während dieses Sammelns wurde mir die eigentliche Grundidee desselben klarer und klarer, die anfangs halb unbewusst mich geleitet hatte. Manches so Aufgefundene habe ich schon in einzelnen Abhandlungen in meiner in Gemeinschaft mit Herrn Professor Schloemilch und Dr. Kahl herausgegebenen Zeitschrift für Mathematik und Physik veröffentlicht. Trotzdem fürchte ich jetzt keinen Tadel dafür, wenn ich das schon Mitgetheilte hier in neuem Zusammenhange wieder aufnehme. Kann es ja bei einer historischen Arbeit, dem eigentlichen Gegenstande nach, nicht darauf ankommen, nur Neues, selbst Erdachtes vorzutragen, stellt sich doch gerade in dem Zusammenhange, in welchem die Ereignisse geordnet erscheinen, ein Hauptmoment dar, nach welchem ein Geschichtswerk zu beurtheilen ist.

Es ist eine ganz andere Furcht, die mich befällt, indem ich diese Blätter der Oeffentlichkeit anheimgebe. Ich wage es hier, Entdeckungsreisen in fremde noch wenig durchwanderte Gegenden zu unternehmen, und bin im wörtlichen Sinne des Ausdruckes der Sprachen nicht mächtig, die dort zu Hause sind, wenigstens nicht so mächtig um jeden Eingeborenen, der mir etwa begegnet, um Auskunft zu bitten; ich muss mich vielfach auf Dolmetscher verlassen, denen der Gegenstand meiner Neugier zu fern liegt, als dass in ihrer Verdeutschung nicht etwa unfreiwillige Irrthümer vorkommen könnten. Und dadurch setze ich mich doppelten Vorwürfen aus. Der Mathematiker wird sagen, wie kann man bei so einfachen Gegenständen mitunter in Zweifel sein, wie kann man besonders mit solcher Ausführlichkeit Dinge behandeln, deren leiseste Andeutung uns Fachmännern ja schon genügend ist. Der philologische Leser, denn auch auf solche mache ich mir Hoffnung, wird im Gegentheil die Nase rümpfen über die Breite, mit welcher hier und da sprachliche Gegenstände erörtert sind, ja ich fürchte sogar, er

wird hier und da Erläuterungen finden, die er für unrichtig hält, und ich gestehe gern seinem Urtheile darin das Vorrecht zu. Gleichwohl bin ich entschlossen dem beiderseitigen Tadel mich auszusetzen in der Hoffnung, man werde auch von beiden Seiten berücksichtigen, dass hier bei dem erstmaligen Versuche in der That die Schwierigkeit vorlag: Entweder ein Mathematiker musste ihn unternehmen in der Gefahr, oder sage ich lieber auf die Hoffnung hin, von Sprachgelehrten berichtigt zu werden, da wo mangelnde Kenntniss ihn irre leitete; oder aber Philologen von Fache stürzten sich in den mathematischen Urwald, um ihn zu lichten. War aber nur diese Alternative vorhanden, so glaube ich mich berechtigt für's Erste als Pfadfinder aufzutreten. Vielleicht hätte ich noch länger gezögert, meine Untersuchungen zusammenzustellen, wenn nicht eine äussere Veranlassung hinzugetreten wäre.

Herr Dr. Friedlein nämlich veröffentlichte eine Schrift unter dem Titel: „Gerbert, die Geometrie des Boethius und die indischen Ziffern, ein Versuch in der Geschichte der Arithmetik." Erlangen 1861. Der Herr Verfasser ist so freundlich unter den drei Arbeiten, welche nach seiner Ansicht in neuester Zeit am meisten zur Beantwortung der Frage beigetragen haben, ob der Ursprung des Systems des Stellenwerthes der Zahlzeichen an verschiedenen Orten unabhängig von einander zu suchen sei, oder ob und welche Uebertragung sich nachweisen lasse, die beiden Abhandlungen zu nennen, welche ich im ersten und dritten Bande der vorerwähnten Zeitschrift für Mathematik und Physik abdrucken liess, zu denen er dann noch die Abhandlnng von Herrn Joseph Krist „Ueber Zahlensysteme und deren Geschichte" hinzufügt, die im vierten Jahresbericht der Obern Realschule in Ofen im Jahre 1859, also nach der Veröffentlichung meiner Arbeiten erschien. Schon der Aufsatz von Krist und noch mehr die Friedlein'sche Brochüre liessen mich erkennen, dass es mir glücklich gelungen war, einen der Zwecke zu erfüllen, die ich mir bei meinen eigenen Abhandlungen gestellt hatte, nämlich die Aufmerk-

samkeit deutscher Gelehrten in höherem Grade auf eine, wie ich glaube, kulturgeschichtlich wichtige Frage zu lenken, als es bisher der Fall gewesen war. Leider begnügten sich aber Beide, sowohl Krist als Friedlein, im Wesentlichen mit dem Studium dessen, was eben in Deutschland schon vorlag, und versäumten es, mit den Untersuchungen einiger französischen Schriftsteller sich bekannt zu machen, welche für die Geschichte der Zahlzeichen überaus wichtige Entdeckungen gemacht hatten, und so als vortreffliche Vorarbeiten auch für meine Zwecke dienen konnten, wenn sie gleich nicht von demselben allgemeineren Grundgedanken geleitet wurden. Ich meine die Arbeiten von Chasles, von Vincent und Henri Martin (de Rennes), welche ich zwar noch vielfach zu erwähnen haben werde, die ich aber gleich hier im Voraus als solche bezeichnen muss, ohne deren genaueste Kenntniss eine Beurtheilung der Frage der Zahlzeichen durchaus unmöglich ist. Ich selbst war mit den Untersuchungen von Martin, die 1856, in der Zwischenzeit zwischen meinen beiden Abhandlungen erschienen, leider zu spät bekannt geworden, um seine Resultate meinen Veröffentlichungen einzuverleiben, und ebensowenig konnte ich mit meinen damaligen Kenntnissen den Arbeiten von Vincent Geschmack abgewinnen. Ich darf daher weniger als irgend ein Anderer meinen Nachfolgern zum Vorwurfe anrechnen, wenn sie die nämliche Vernachlässigung sich zu Schulden kommen liessen, wie ich selbst, und nur die Bemerkung kann ich nicht unterdrücken, dass die Resultate der Friedlein'schen Brochüre wohl sicher anders gelautet haben würden, als es jetzt der Fall ist, wenn der Verfasser sich wenigstens die Untersuchungen von Chasles vollständig angeeignet hätte, auf die ich allerdings zu wiederholten Malen hinwies. Statt dessen scheint er nur die Geschichte der Geometrie des französischen Gelehrten benutzt zu haben, und kommt so zu Folgerungen, welche er mit nicht in Abrede zu stellendem Scharfsinne so scheinbar darstellt, dass die Gefahr nahe liegt, ein mit dem Gegenstande unbekannter Leser möchte denselben Glauben schenken. Es ist wahrlich nicht

Sucht nach litterarischer Fehde, die mich jetzt antreibt, mit neuen Gründen die Annahmen zu bestätigen, welche durch Friedlein bekämpft werden; noch weniger ist persönliche Eitelkeit im Spiele, da es ja Annahmen betrifft, die ich mir zwar aneignete, deren bei weitem Meisten aber schon früher ausgesprochen waren. Aber wer sich einmal ein Jahrzehnt hindurch theils im Stillen, theils öffentlich mit einem Gegenstande beschäftigt hat, der wird begreifen können, wie man diesen Gegenstand lieb gewinnt, und auch nicht die leiseste Trübung des Spiegels ertragen kann, in dem man sich selbst zu schauen gewohnt ist.

So war denn das Erscheinen der Friedlein'schen Schrift hinreichende Veranlassung für mich, die Scheu, welche die Schwierigkeiten des Gegenstandes hervorzurufen geeignet waren, zu brechen und mir zu erlauben, diese mathematischen Beiträge zum Kulturleben der Völker der Oeffentlichkeit hinzugeben. Mit der nächsten Veranlassung war aber gleichzeitig auch der Plan dieser Schrift gegeben. Die Geschichte der Zahlzeichen musste als rother Faden sich mitten hindurchziehen, an welchen alsdann freilich eine nicht unbeträchtliche Anzahl seitlicher Gewebe sich anknüpfen kann und wird. Indessen waren auch bei diesem allgemeinen Plane offenbar noch zwei Wege der Untersuchung möglich. Der eine führt den Strom hinauf, setzt aber voraus, dass wenn man an eine Verbindungsstelle zweier Gewässer kommt, man schon wisse, welches der Nebenfluss, welches der Hauptfluss ist, welches also weiter aufwärts zu verfolgen ist. Dieser Weg ist der künstlichere. Er lässt den, welcher zum ersten Male ihn wandelt, in Zweifel, ob er nicht auf dem Irrwege sich befinde, ob nicht einer der vernachlässigten Seitenarme der eigentliche Ursprung des Stromes sei. Der andere Weg ist freilich nicht von einem einzigen Punkte aus einzuschlagen. Von jeder Quelle des Grundgebirges müssen Wanderer aufbrechen, welche den Felsbach begleiten, bis mehr und mehr zusammentreffen, bis Bach und Fluss und Strom sich zu einem grossen Ganzen vereinigen. Dieser Weg ist der mühsamere, aber seine

Kenntniss giebt Gewissheit. So mag denn der Versuch gewagt sein, ihn zu betreten. Ich will mich bestreben theils in chronologischer, theils in damit eng zusammenhängender geographischer Reihenfolge zu entwickeln, wie die Zahlzeichen bei den verschiedenen Völkern der alten Geschichte ausgesehen haben, wie mit ihnen gerechnet wurde, und daran erst werde ich die Schlüsse knüpfen, welcherlei Verbindungen obgewaltet haben mögen. Vollständig wird freilich für die ältesten Zeiten die Darstellung nicht sein können. Es giebt, um bei meinem vorigen Bilde zu bleiben, im Urgebirge nur zu viele Strecken, welche selbst dem geübtesten Bergklimmer unwegsam bleiben, um wie viel mehr dem Sonntagsspatziergänger, der auf ebenem Boden sich am Gemüthlichsten fühlt, und in gedruckten Reisehandbüchern weit besser zu Hause ist, als da oben bei dem ewigen Schnee und Eis der Pergamente und Inschriften. Brauche ich da noch zu sagen, dass ich jedem Führer auf dem beschwerlichen Wege die dankbarste Erinnerung nachtrage? Wer mich begleitet, wird erkennen, dass es wenigstens in meiner Absicht liegt, überall auf's Gewissenhafteste die Männer anzuführen, deren Spuren ich folge. Dass ich diese Citate wie fast den gesammten sogenannten wissenschaftlichen Apparat in die Anmerkungen verwiesen habe, welche dem Bande angehängt sind, geschah mit Rücksicht auf solche Leser, deren Beruf sie nicht grade auf eine strenge Prüfung des Gebotenen hinweist, sondern ihnen gestattet sich mit den blossen Resultaten zu begnügen. Solche Leser wissen es erfahrungsmässig zu Dank, wenn man ihren Augen die trockenen Beweisstellen, namentlich die in fremden Sprachen, entrückt, welche sie sonst doch überschlagen würden. Dem Gelehrten von Fache aber erschwert es die Prüfung keineswegs, wenn er das beweisende Material zusammengestellt an besonderem Orte findet.

I. Die Egypter.

So weit auch die Ansichten der Fachgelehrten darüber auseinandergehen, wie viel Einfluss die altegyptische Kultur auf die übrigen Völker des Alterthums geübt haben mag, darin sind doch wohl jetzt Alle einig, dass das Nilthal eine Stätte uralter Kunst und Wissenschaft gewesen, dass kein fremdes Element die am weitesten hinaufreichenden Spuren dieser Bildungsperiode verunreinigt, dass wir es dort mit eingeborener Schrift und Darstellung zu thun haben, oder doch mit solcher, deren Einwanderung mit viel mehr Recht eine vorhistorische genannt werden muss, als andere Ereignisse, denen man vordem dieses Prädicat beilegte. In der That scheinen noch heute vollständig erhaltene Schriftdenkmale bis weit jenseits des Jahres 2000 v. Ch. G. hinaufzuweisen, und für den Höhengrad der damaligen Entwicklung spricht als unzweifelhaftes Wahrzeichen der Inhalt jener verschiedenen Gemälde, Inschriften und Papyrusrollen. Wenn wir in jenem Grabgewölbe bei Benihassan eine seltsame Procession von Fremdlingen abgemalt sehen, die bei dem vornehmen Besitzer der Grotte eingeführt werden, und unter ihrem Gepäcke ein musikalisches Instrument mit sich tragen, so glauben wir kaum dem modernen Berichterstatter, welcher daneben als Datumsangabe den Namen des Königs Sesurtesen II. findet, der im 23. Jahrhundert vor der jetzt gebräuchlichen Zeitrechnung regierte. [1]) Und wenn wir auch mit Ueberspringung von acht Jahrhunderten uns in die Zeit des Sesostris versetzen, dessen egyptischer Name Rhamses II. ist; [2]) so wird auch in dieser Zeit die Existenz eines eigens eingerichteten Bibliothekzimmers mit astronomischen Deckengemälden nicht wenig in Erstaunen setzen, welches in dem sogenannten Memnonium auf der Westseite von Theben noch heute erhalten ist. [3]) Wenn ich somit wohl sicherlich berechtigt bin, bei den Egyptern als Ausgangspunkt meine Untersuchun-

gen zu beginnen, so tritt mir dabei zugleich eine Pflicht entgegen. Grade bei so hohem Alter der Ereignisse, bei so häufig einander widersprechenden Angaben solcher Gelehrten, die ihr ganzes Leben dem Studium Egyptischer Denkmale widmeten, kann der Laie wohl verlangen, dass ihm zum Mindesten so viel geboten werde, dass er sich ein Urtheil darüber bilden könne, in wie weit Zuverlässigkeit der Angaben hier überhaupt möglich ist, in wie weit die Entzifferung der sogenannten Hieroglyphen mehr als nur scharfsinnige Spielerei ist. Dass ich selbst aber als Laie anderen Laien gegenüber diese Aufklärung versuche, wird man mir vielleicht den Schriftstellern zu Liebe verzeihen, deren ich mich dabei als Quelle bediente. [4])

Das Erforschen jener im Allgemeinen als Hieroglyphen bezeichneten Schriftzüge musste theils wegen ihres eigenthümlichen Aussehens, theils wegen der interessanten Darstellungen, in deren Begleitung sie auftraten, den grössten Reiz ausüben, und Geisteskräfte ersten Ranges mussten ihre schönste Belohnung darin finden, auch nur einzelne neue Züge zu enträthseln. Für eine gewisse Anzahl von Zeichen war dieses allerdings kaum nöthig. Ein wahrscheinlich in Egypten geborener Schriftsteller aus dem Anfange des 5. Jahrhunderts n. Ch. G. Horapollo [5]) überlieferte bereits manche schätzbare Vorarbeiten in dieser Beziehung, Es war trotzdem lange Zeit Gebrauch, diesen Schriftsteller als apokryph zu betrachten, und über seine Erklärungen achselzuckend hinwegzugehen. Erst seit dem Anfange unseres Jahrhunderts kam er wieder zu Ehren, und gilt jetzt wenn auch nicht immer als untrügliche Quelle, doch stets als treffliche Controle neuerer Untersuchungen. Ging es doch dem Vater der Geschichte Herodot kaum besser, der lange genug als Fabeldichter verketzert wurde, bis aus dem Schutte der Jahrtausende endlich wieder an's Licht gebracht wurde, was er noch aus eigenem Augenscheine kannte, was aber eingestürzt und begraben für unmöglich erachtet wurde, weil es der vorgefassten Meinung widersprach, als ob von den Griechen erst Bildung, Kunst und Wissenschaft ausgegangen wäre, als ob vor ihnen die Kultur noch nicht existirt, und Alles wüste und leer gewesen in den Köpfen der Menschen. Und ganz ebenso wurde beispielsweise Diodor's Erzählung [3]) von jener Bibliothek des Sesostris aufgefasst, bis Champollion, der Wiederentdecker egyptischer Vorzeit, wie man ihn wohl nennen muss, sie an dem angegebenen Orte auffand.

Noch ein weiterer Schriftsteller von etwa 200 Jahre früherem Datum als Horapollo hätte gute Dienste erweisen können, wenn man seine Autorität nicht unterschätzt hätte, Clemens von Alexandrien. Er ward gegen 250 n. Ch. G. in Athen geboren, wie Andere wollen in Alexandrien. Jedenfalls wurde er am letzteren Orte in egyptische Kunst und Wissenschaft eingeweiht. Er machte dann grössere Reisen auch in Palästina und verbrachte seine letzten Lebensjahre bis etwa 317 in stiller Zurückgezogenheit mit Abfassung eines grösseren Werkes beschäftigt, welches den Titel Stromata führte, d. h. buntgewirkte Teppiche, dann im Allgemeinen Buntes, Mannigfaltiges. Im 5. Buche dieser Stromata gab er werthvolle Aufschlüsse [6]) über die Schreibweise der Egypter, und wies den Unterschied ihrer drei Schriftgattungen nach, der zum grossen Schaden der Entzifferung lange Zeit übersehen wurde. Clemens unterscheidet nämlich eben so streng als richtig die hieroglyphische, die hieratische und die epistolographische Schrift.

Die eigentliche Hieroglyphenschrift im engeren Sinne besteht, wie wir jetzt wissen, aus etwa 900 kleinen Abbildungen von mitunter sehr leicht, mitunter auch sehr schwer erkennbaren, sinnlich wahrnehmbaren Gegenständen. Menschen in verschiedenartigster Stellung, Vierfüssler und Vögel, Geräthschaften des häuslichen Lebens, Pflanzen und einzelne Theile des menschlichen oder thierischen Körpers spielen dabei die Hauptrolle. Wenn indessen *auch jedes* dieser Zeichen richtig erkannt wird, so ist damit erst *das* Geringste geleistet, indem, wie Clemens von Alexandrien schon angiebt, die Anwendung derselben eine verschiedene ist, bald kyriologisch, bald symbolisch. Kyriologisch, d. h. selbstredend und zwar, wie ausdrücklich hinzugesetzt wird, durch das erste Element, sind die Zeichen eine wahre Buchstabenschrift, bei welcher jedes Bildchen den ersten Laut des dasselbe benennenden Wortes darstellt. So bezeichnet der Löwe ein L, weil er egyptisch labu heisst, der Adler, achem ist ein A, die Mütze, klaft ist ein K [7]) u. s. w. Dieser Buchstabenschrift steht dann eine symbolische Wortschrift gegenüber, bei welcher jedes Zeichen einen Gegenstand bedeutet und zwar auch wieder, wie Clemens von Alexandrien uns berichtet, nach verschiedenem Principe. Die Darstellung kann eine mimetische sein, d. h. eine auf Nachahmung begründete eigentliche Bilderschrift, welche durch Hinzeichnung der Gestalt des Ge-

genstandes den Gegenstand bezeichnet, z. B. wenn man die Sonne durch einen Kreis andeutete; oder die Darstellung ist tropisch, wie wenn man die Eigenschaften, Titel und Thaten der Könige durch Zeichen und Ausdrücke andeutete, welche sich eigentlich auf die Götter bezogen; oder endlich die Anspielung war noch fremdartiger, noch räthselhafter, alsdann wurde die Darstellung änigmatisch genannt, z. B. wenn man die Sonne durch einen Käfer andeutete, weil dieser die Kugeln, die er aus Rinderdung bildet, mit abgewendetem Antlitz fortwälzt, ähnlich wie die Sonne auch eine Kugel ist, von der man das Antlitz abwendet. Dieses scheint mir unzweifelhaft die richtige Erklärung der Definitionen, welche der alexandrinische Schriftsteller von der hieroglyphischen Schrift und ihren Unterarten giebt, wenn auch manche Gelehrte einen andern Sinn unterschieben wollen. [8]) Zu der hier gegebenen Auffassung passt auch ziemlich gut eine Stelle des Porphyr, [9]) der die symbolischen Zeichen nur in mimetische und änigmatische unterscheidet, ohne die tropischen zu nennen, welche auch ganz gut den änigmatischen zugerechnet werden können. Im Uebrigen freilich ist dieselbe Stelle nicht ganz übereinstimmend. Die Anwendung dieser hieroglyphischen Schrift in allen ihren Unterarten ist wesentlich monumental, wobei sie sich theils in Stein eingehauen, theils auf Gemälden abgebildet vorfindet.

Hieratische Schrift nennt die betreffende Stelle der Stromata die von den heiligen Schreibern, also den Priestern benutzte. Weiteres ist nicht darüber bemerkt. Indessen scheint sie, besonders in den den Mumien mitgegebenen Papyrusrollen erhalten, im Wesentlichen eine zum Schreiben bequemere Form der Hieroglyphenschrift zu sein. In der That lassen sich manche Zeichen aus jener Schrift, wie z. B. der Fisch, das Auge, die mit Füssen versehene Schlange (**Figur 1**) mit leichter Mühe wieder erkennen. Andere Zeichen hingegen sind willkürlicher Art, oder doch nicht auf bekannte Hieroglyphen zurückzuführen.

Die Epistolographische Schrift, sagt unser Autor drittens, sei die, welche in den egyptischen Schulen immer zuerst gelernt wurde. Er meint damit offenbar die gewöhnliche Brief- und Cursivschrift, dieselbe welche von Diodor und Herodot als landesübliche (enchorische) und volksthümliche (demotische) Schrift bezeichnet wird, und welche auf solchen Documenten uns erhalten ist, die auf Angelegenheiten des bürgerlichen Lebens sich beziehen,

als Käufe, Verträge, Quittungen und dergleichen. Sie verhält sich zur hieratischen Schrift etwa wie diese zu den Hieroglyphen. Sie ist aus ihr entstanden, indem die einzelnen Zeichen noch handgerechter abgekürzt und abgerundet wurden.

Die Menge der Zeichen, welche ich oben für die hieroglyphische Schrift auf etwa 900 angab, nimmt in der hier benutzten Reihenfolge der Schriftarten ab, was, so weit sie Buchstabenschrift sind, leicht erklärlich ist. Da es nämlich Wörter in übergrosser Anzahl giebt, welche gleichmässig anlauten, so muss es ebensoviele mögliche Hieroglyphen ihres Anfangsbuchstaben geben. So stellt z. B. ausser der früher erwähnten Mütze auch die Schale, kelol, den Buchstaben K vor. Bei der hieratischen Schnellschrift müssen einzelne zu complicirte oder in der Abkürzung zu wenig verschiedene Hieroglyphen wegfallen, und noch mehr muss dieses der Fall sein bei einer Schrift, welche die ungeübte Hand des gewöhnlichen Bürgers bemeistern soll.

So einfach diese Folgerungen alle sind, so dauerte es doch lange, bis sie aus den Untersuchungen unermüdlicher Forscher sich ergaben, und es wird mir wohl gestattet sein, auch über die Entzifferungsversuche selbst ein Wort vorauszuschicken, bevor ich die Zahlzeichen mittheile, auf die es uns zwar eigentlich allein ankommt, deren Verbürgtheit aber sonst keineswegs einleuchtet. Die Sprache zunächst, in welcher die Inschriften verfasst sind, war zwar ausser durch die Quellen selbst nicht genau ermittelbar. Indessen besass man doch einige Kenntniss des Koptischen, d. h. der egyptischen Sprache, wie sie in den ersten christlichen Jahrhunderten gesprochen wurde, und glaubte von dieser aus Rückschlüsse machen zu dürfen; eine Vermuthung, welche auch nachträglich als durchaus berechtigt sich erwies, indem wie Röth, wohl einer der genauesten Kenner dieser Sprachen, sich ausdrückt, das Koptische dem Altegyptischen noch viel näher steht, als etwa das entartete Latein des Mittelalters der alten Römersprache. [10])

Allein auch diese an sich hinreichend bedeutsame Erledigung der Sprachfrage hätte wohl noch nicht zu so wichtigen Folgen geführt, als sie nach sich zog, wenn nicht bei der grossen egyptischen Expedition des ersten Napoleon, die politisch ebenso resultatlos verlief, wie sie ihm in der Geschichte der Alterthumskunde einen unsterblichen Platz sichert, der Stein von Rosette aufgefunden worden wäre, der später von den Engländern in Besitz

genommen, sich jetzt noch in dem britischen Museum in London vorfindet. Dieser Block von schwarzem Basalt, der bei Fundamentarbeiten zu dem Fort St. Julien ausgegraben wurde, enthält nämlich drei Reihen von Zeichen. In der obersten, leider stark beschädigten, stehen Hieroglyphen; die zweite Abtheilung enthält demotische Schrift; in der dritten liest man auf griechisch, dass dem Könige Ptolemäus Epiphanes im 9. Jahre seiner Regierung (also etwa 197 v. Ch. G.) von der egyptischen Priesterschaft gewisse Ehrenbezeugungen bewilligt worden seien, und dass diese Bewilligung auf diesem Steine geschrieben sei mit heiliger Schrift, mit landesüblicher Schrift und mit griechischer Schrift. So hatte man also in der dritten Abtheilung die voraussichtlich leidlich wörtliche Uebersetzung der beiden oberen Abtheilungen, und in den ziemlich häufigen Eigennamen einen Schlüssel zum hieroglyphischen sowie zum demotischen Alphabete, wenn es wirklich eine Buchstabenschrift war, die vorlag. Darnach sahen die demotischen Zeichen am ersten aus, und so gingen die ersten gelungenen Versuche von Sylvestre de Sacy im Jahre 1802 auch wirklich auf diese. Er erkannte fünf Eigennamen mit Bestimmtheit wieder. Auf dieser Spur folgten ihm noch verschiedene Forscher, unter welchen seit 1814 namentlich Thomas Young hervorragt, dem der schon errungene dreifache Ruhm des Arztes, des Physikers und des Mathematikers nicht genügte. Ihm ist die erste ganze Uebersetzung der demotischen Inschrift gelungen, welche ein ziemlich vollzähliges Alphabet, zugleich aber auch den Beweis lieferte, dass Buchstabenschrift mit symbolischen Wortzeichen hier gemischt erscheint, was die vornehmste Schwierigkeit bei Entzifferung der egyptischen Inschriften noch heute bildet. Derselbe rastlose Gelehrte begann nun im Jahre 1819 auch die Erklärung der eigentlichen Hieroglyphen und machte bald die wichtige Entdeckung der sogenannten Namensringe, d. h. dass Zeichengruppen, welche einen Eigennamen alphabetisch darstellen, für sich in einen Ring eingeschlossen wurden. Damit war wieder der Schlüssel gegeben, welchen Niemand besser zu benutzen verstand, als der jüngere Champollion, der das Gesammtresultat aller Forschungen in seiner nachgelassenen Grammatik niederlegte. Diese Grammatik bildet denn auch die Grundlage, auf welche alle späteren Versuche aufgebaut sind, welche selbst wieder durch die Nachfolger fast durchweg neu gestützt und nur in einzelnen Punkten als mangelhaft be-

funden wurde. Von deutschen Gelehrten, welche diesen schwierigen und mühsamen Untersuchungen sich unterzogen, nenne ich Spohn, Seyffarth, Kosegarten, Klaproth, Lepsius, Brugsch, Röth, dessen vollständig vollendete Uebersetzung des egyptischen Todtenbuches dem Publikum leider vorenthalten zu bleiben scheint.

Was nun die Zahlwörter betrifft, so werden sie mitunter auf schwerfällige Weise ersetzt, indem das zu Zählende so oft wiederholt wird, als vorgeschrieben ist. So fand z. B. Champollion in einer Inschrift von Karnak „9 Götter" in der Weise geschrieben, dass das Zeichen für einen Gott neunfach neben einander abgebildet war. In andern aber gleichfalls seltenen Fällen sind die Zahlwörter alphabetisch ausgeschrieben, was für die Kenntniss ihres Wortlautes überaus angenehm ist. Bei weitem am Häufigsten brauchten aber die Egypter bestimmte Zahlzeichen, denen der Franzose Jomard schon während der egyptischen Expedition im Jahre 1799 auf die Spur kam, und 1812 die hieroglyphische Gestalt derselben publicirte. Unabhängig von ihm fand auch Young dieselbe Interpretation, welche überhaupt nie angezweifelt wurde, vielmehr allseitige Bestätigung fand. Es sind die Zeichen (**Figur 2**), welche 1, 10, 100, 1000, 10000 bedeuten, und welche theils von dem Stein von Rosette herrühren, theils aus dem sogenannten Grabe der Zahlen, das Champollion unweit der Pyramiden von Gizeh auffand, und in welchem dem reichen Besitzer seine Heerden mit Angabe der einzelnen Thiergattungen vorgezählt werden als 834 *Ochsen*, 220 Kühe, 3234 Ziegen, 760 Esel, 974 Schaafe. [11]) Die Frage, was wohl diese Zeichen eigentlich darstellen sollen, hat Seyffarth dahin zu beantworten gesucht, die 1 sei eine Messstange, 10 eine Umwallung, 100 ein zusammengerolltes Palmblatt, 1000 eine Lotospflanze, 10000 ein Finger. Er setzt ferner hinzu, diese Zahlzeichen hätten auch Buchstabenwerth und zwar sei 1 = a, 10 = ch, 100 = f, 1000 = k, 10000 = t. Schwartze sieht in dem Zeichen für 100 einen Krummstab, wie die Auguren ihn später trugen, legt ihm aber gleichfalls die Aussprache f bei. Champollion stimmt so weit überein, dass das Zeichen von 1000 ein Lotosblatt sei, zugleich auch Anfangsbuchstabe des Wortes 1000, dass es aber ein Zischlaut sei, etwa sch. In Bezug auf 10000 findet er ebenso einen Finger und den Laut t als Anfangsbuchstaben des Wortes. [12]) Ich begnüge mich natürlich damit, diese weit ausserhalb meines Urtheils liegenden Ansichten mitzutheilen, und möchte mir nur

die Erinnerung erlauben, dass, wie ich schon in einer früheren Abhandlung bemerkte, [13]) der Name des Lotos im Sanskrit zugleich ein Zahlwort von ziemlich unbestimmter Bedeutung ist. Lassen übersetzt ihn als 100 Million, Bohlen und ebenso auch Colebrooke als 1000 Million, Bopp in seiner Grammatik sogar als 10000 Million. Ich wage es nicht, darauf als auf einen möglichen Zusammenhang hinzuweisen, doch ist die Thatsache für sich wohl interessant genug, um hervorgehoben zu werden.

Die Methode, nach welcher mit Hülfe dieser hieroglyphischen Zeichen die Zahlen geschrieben werden, ist weitläufig genug. Man wiederholt nämlich das Zeichen der Einheit einer jeden Ordnung so oft, als es vorkommen soll, und bedient sich dabei, wohl zur besseren Uebersicht, einer eigenthümlichen Gruppirung der Zeichen, indem nicht mehr als höchstens vier Zeichen derselben Art dicht neben einander geschrieben werden. Kommen also etwa 7 Zehner vor, so zerlegt man sie in zwei durch einen kleinen Zwischenraum getrennte Gruppen, deren Eine aus 3, die Andere aus 4 Zehnern besteht. Die Gruppe, welche aus der geringeren Anzahl von Zeichen derselben Art besteht, findet sich immer rechts, und es ist nur eine sich treu bleibende Fortführung desselben Grundsatzes, wenn von Zeichen verschiedener Art gleichfalls das niedrigere zur Rechten, das höhere zur Linken steht. Will man also in den jetzt besprochenen Zeichen 15379 schreiben, so kommt von rechts nach links angegeben zuerst 1 Einer, dann nach einem Zwischenraume eine Gruppe von 4 Einern, nach einem neuen Zwischenraume eine zweite Gruppe von 4 Einern; hierauf 3 Zehner und von ihnen etwas entfernt 4 Zehner; weiter 3 Hunderter; die Tausender folgen nun wieder in zwei Abtheilungen zuerst 1 Tausender, dann ihrer 4; endlich vollendet 1 Zehntausender die verlangte Zahl (**Figur 3**). Abgesehen von den Gruppen ist also die Bezeichnung innerhalb der einzelnen Ordnungen (als Einer, Zehner, Hunderter u. s. w.) eine einfach additive, wie wir uns ausdrücken, d. h. die Zeichen werden addirt, wie sie nebeneinander stehen. Bei den Zehntausendern erleidet nach Champollion [14]) die Methode eine Ausnahme, indem man zwar 40000 noch durch 4 nebeneinanderstehende Zehntausender schreibt, von 50000 an hingegen das Zeichen für Zehntausend etwas erhöht, und die Einer (Zehner u. s. w.), welche angeben, wie oft Zehntausend genommen werden sollen, in etwas kleinerer Gestalt darunter setzt. Hier geht also die ad-

ditive Schreibweise in eine multiplicative über. Man sieht übrigens leicht ein, dass eine derartige Veränderung ziemlich nothwendig war, wenn die Uebersichtlichkeit nicht leiden sollte, weil kein Zeichen höherer Ordnung als für Zehntausend vorhanden war.

Ich habe schon gesagt, dass die Reihenfolge der niedrigeren Zeichen zu den höheren von rechts nach links ging, dem äusseren Anscheine nach mit unserer modernen Reihenfolge in Einklang. Dem ist aber nicht so. Denn da die ganze Schrift der Egypter mit der der meisten Orientalen übereinstimmend von der Rechten zur Linken gelesen wurde, so ist die Schreibart ihrer Zahlen der bei uns gebräuchlichen gerade entgegengesetzt. Man liest zuerst die Einer, dann die Zehner, Hunderter, Tausender und Zehntausender. Merkwürdiger Weise blieb man indessen nicht bei dieser Reihenfolge, sondern kehrte sie später um, so dass sich bei einigen von Seyffarth abgedruckten [15]) grösseren hieroglyphischen und hieratischen Zahlen das höhere Zeichen rechts von dem niedrigeren findet, und bei den demotischen Zahlen ist diese letztere Folge zur unveränderlichen Regel geworden. Leider ist die Zeit nirgends genauer angegeben, aus welcher die einen und die anderen Inschriften und Documente stammen, so dass nur im Allgemeinen die Vermuthung ausgesprochen werden kann: Ursprünglich war in der Hieroglyphenschrift die Reihenfolge der Ziffern die oben angegebene; die hieratische und besonders die demotische Schrift sind jüngere Erfindungen; als die letztere sich verbreitete, war auf uns unbekannte Weise die Veränderung eingetreten, dass die Zahlen von den Zeichen höchsten Ranges anfangend nach den niedersten zu geschrieben wurden; aus der Periode des Uebergangs finden sich Zahlen, die nach dem einen, und Zahlen, die nach dem andern Principe geordnet sind.

Die hieratischen und demotischen Zahlzeichen, von denen hiermit schon Einiges angegeben ist, wurden zwischen 1824 und 1826 von Champollion in der überaus reichen und wichtigen egyptischen Sammlung in Turin und auf den Papyrusrollen der vaticanischen Bibliothek entdeckt. Man hat dabei Ordnungszahlen (**Figur 4 u. 5**) von Hauptzahlen (**Figur 6 u. 7**) zu unterscheiden. Erstere sind besonders bei der Angabe von Monatstagen im Gebrauche und gehen dem zu Folge wenigstens bei Wilkinson, nach welchem die zehn ersten hier abgebildet sind, bis zu der 29sten. Es ist fast überflüssig darauf hinzuweisen, dass die vorhin schon

besprochene Gruppirung auch hier wieder stattfindet, und dass plötzlich für die neunte Ordnungszahl, welche eine Zerlegung in drei Gruppen nöthig machen würde, ein einfaches Zeichen auftritt. Das einfache Zeichen für die zehnte Ordnungszahl steht wieder in Einklang mit den Hieroglyphen. Die Hauptzahlen scheinen bis zu unbegrenzter Höhe vorzukommen. Bei der Abbildung folge ich gleichfalls Wilkinson, wenn ich auch nicht alle Zahlzeichen aufgenommen habe, welche bei ihm sich finden. Ausser den ersten zehn Zeichen und Varianten derselben, welche ich in der Figur wiederzugeben bemüht war, deren Verschiedenheit mir aber mitunter selbst nicht recht ersichtlich ist, hat er noch Zeichen für die Zehner (20, 30...90), Hunderter (100, 200...900), Tausender (1000, 2000....9000), für Zehntausend, ja sogar ein Zeichen für 70000 wird angegeben, obwohl als Variante das Zeichen für 10000 siebenmal nebeneinander geschrieben hinzugefügt ist. Die Zeichen der Zahlen von 200 an möchte ich nicht als selbstständige auffassen. [16]) Die Hunderter scheinen vielmehr durch die Verschmelzung des Zeichens für Hundert mit den Zeichen der Einer entstanden. Eine Ausnahme macht dabei nur 900, welches durch dreimalige Wiederholung von 300 dargestellt wird, sowie auch 800 nicht recht verständlich ist. Nach ähnlichem Principe halte ich die Tausender für aus dem Zeichen für Tausend und den Einern zusammengesetzt, und ebenso bildete man möglicherweise auch die Zehntausender. Das multiplicative Verfahren hat also hier eine viel grössere Ausdehnung gewonnen, als bei den hieroglyphischen Zahlen sich nachweisen liess. Um so mehr ist zu bedauern, dass die Zeit nicht angegeben ist, zu welcher man so schrieb.

Jetzt ist es wohl auch am Platze zu erwähnen, was Horapollo in Bezug auf die Zahlzeichen anführt. Die Ausbeute ist freilich gering, denn er sagt nur, dass die 5 dargestellt werde durch einen Stern, [17]) die 10 durch eine grade Linie, an welche eine zweite sich anlehnt. [18]) Den Stern will auch Jomard in der That aufgefunden haben, und zwar in fünfzackiger Gestalt, doch ist Seyffarth der Ansicht, damit sei nicht die Zahl 5, sondern nur der Planet Mars als fünfter Planet gemeint. Das Zeichen für 10 erkennt man dagegen augenblicklich in dem entsprechenden demotischen Zahlzeichen wieder. Noch eine dritte Stelle desselben Schriftstellers wird mitunter angeführt, und aus ihr der Beweis zu führen gesucht, die Egypter hätten die Zahl 1 durch zwei Striche bezeich-

net.[19]) Das ist jedenfalls ein Missverständniss, indem der Wortlaut des Satzes, der von der hieroglyphischen Bedeutung des Geiers ausgeht, nur die Ueberzeugung hervorbringt, dass die Altegypter eine Gewichtseinheit besassen, welche zwei Drachmen zur Zeit Horapollos entsprach. Diese Gewichtseinheit wurde durch das Zeichen des Geiers, des Sinnbildes mütterlicher Liebe, dargestellt, denn die Einheit, sagt Horapollo, ist Mutter und Ursprung aller Zahlen.

Zum Schlusse dieser Untersuchung will ich noch die Frage aufwerfen, was wohl die eigentliche Bedeutung der hieratischen und der von diesen nur wenig verschiedenen demotischen Zahlzeichen sein mag? Ich sage ausdrücklich, ich will die Frage aufwerfen, da die Beantwortung jedenfalls doch nur von einem genauen Hieroglyphenkenner geliefert werden kann. Seyffarth [16]) hat zu zeigen gesucht, dass die hieratischen Zahlzeichen, welche als selbstständige zu betrachten sind, also die Zeichen 1 bis 9, 10 bis 90, 100, 1000 und 10000 zugleich auch Buchstabenwerth besitzen in ähnlicher Weise, wie es oben für die hieroglyphischen Zahlzeichen angedeutet wurde. Er findet dem entsprechend als Ursprung eines jeden dieser 21 Zeichen ein wirkliches Bild, wenn er auch selbst zugeben muss, dass wenigstens die 1, 2 und 3 auch aus ebensovielen nebeneinander geschriebenen und einfach verbundenen Strichen erklärt werden können. Er sieht endlich sogar eine Uebereinstimmung mit den Buchstaben der sogenannten hebräischen Quadratschrift, bis zu welcher ich aber meine Phantasie nicht anspornen kann, wenigstens nicht ohne Uebergangsformen etwa aus dem phönikischen Alphabete anzunehmen, die mir zu wenig bekannt sind, um ein eigenes Urtheil abgeben zu können. Möge daher ein der Sache gewachsener Forscher diese interessante und wichtige Hypothese zur Erledigung bringen.

Eine andere Frage, welche an die Besprechung der Zahlzeichen sich naturgemäss anschliesst, geht dahin, was etwa von egyptischer Rechenkunst oder, allgemeiner gesprochen, von egyptischer Mathematik nachweisbar ist. Ich brauche bei dieser Frage keine Furcht zu hegen, die Grenzen möglich allgemeinster Verständlichkeit, die ich mir gesteckt habe, zu überschreiten, denn leider wissen wir nur sehr Weniges darüber, das Meiste erst durch zweite und dritte Ueberlieferung. Von directen Nachrichten aus Inschriften ist mir wenigstens Nichts weiter bekannt geworden, als

was Seyffarth angiebt,[20]) dass nämlich ziemlich häufige Summirungen vorkommen, wobei ein dem modernen Pluszeichen ähnliches stehendes Kreuz zum gleichen Zwecke benutzt wird, und vor der Summe des zu Verbindenden noch ein weiteres Zeichen sich findet, welches also dem Sinne nach unserem Gleichheitszeichen entspricht. Die zu addirenden Posten sind theils ganze Zahlen, theils Brüche, über deren Schreibweise indessen noch mancher Zweifel zu walten scheint. Vielleicht kommen nur Brüche mit gewissen Nennern vor, welche bekannte Unterabtheilungen von Maass, Gewicht oder Zeit bilden. Jedenfalls stimmen diese, wenn gleich unbedeutenden Ueberreste damit überein, was Herodot [21]) und Plato [22]) melden, dass bei den Egyptern das Rechnen etwas ganz allgemein Uebliches, ja sogar ein Gegenstand des Elementarunterrichtes gewesen sei. Die Stelle des Herodot besitzt noch eine besondere Wichtigkeit dadurch, dass sie angiebt, die Egypter hätten mit Marken gerechnet. Darin zeigt sich dieselbe instrumentale Methode, welche fast allerwärts uns entgegentreten wird, und deren Beschreibung später ein eigenes Kapitel gewidmet werden soll. Waren nun auch Rechenexempel dem Egypter nicht fremd, so spricht dennoch Alles dafür, dass die Geometrie mit weit grösserer Vorliebe behandelt wurde. Darauf geht eine auch noch in späteren Kapiteln zu benutzende Stelle aus der Astronomie des Theon von Smyrna, [23]) in welcher ausdrücklich gesagt ist, die Egypter hätten sich bei der Untersuchung der Planetenbewegung constructiver Methoden bedient, hätten also gezeichnet, während die Chaldäer zu rechnen vorzogen, und von diesen beiden Völkern hätten die griechischen Astronomen die Anfänge ihrer Kenntnisse geschöpft. Darauf gehen noch verschiedene andere Ueberlieferungen, welche Röth [24]) sorgsam zusammengestellt hat. Bei einem Volke, welches namentlich die symmetrischen Körper z. B. Pyramiden und Obelisken in so grossartigem Maassstabe architektonisch verwerthete, kann indessen auf eine ziemlich tief gehende Kenntniss der Geometrie auch ohne weitere Zeugnisse rückwärts geschlossen werden, so wie a priori das regelmässige Austreten des Nils, wenn auch wohl nicht alljährlich wiederkehrende, aber immerhin häufiger anzustellende geodätische Arbeiten, Vermessungen und Ländertheilungen erforderte, die Erfindungsgabe also mit Nothwendigkeit auf dieses Gebiet lenkte. Von der Astronomie der Egypter war so eben schon die Rede. Es liegt aller Grund vor, dieselbe für eine weit vorgeschrittene zu halten, wenn

die Angaben Biot's [25]) richtig sind, welcher die Kalenderreform, wonach zu den bisherigen 360 Tagen des Jahres noch 5 Tage hinzukamen, in das Jahr 1780 v. Ch. G. verlegt, indem er dabei zum Theil hieroglyphischen Urkunden folgt, zum Theil seine Schlüsse auf eigene Rechnungen gründet. Mancherlei wird aber endlich für die Kenntnisse, die wir den Egyptern zuschreiben müssen, sich aus den Kenntnissen solcher Männer ergeben, welche unzweifelhaft deren Schüler waren. So wird Pythagoras uns einen tieferen Einblick in die egyptische Geometrie gewähren, so zeigen die Methoden der Astronomie des Thales [26]) und des Anaximander [27]), dass unsere Angaben über egyptische Astronomie zuverlässig sind.

II. Die Babylonier.

Eine zweite der Geschichtsforschung nachgrade ebenso wohl erworbene Thatsache wie die der altegyptischen Kultur ist das reiche Geistesleben, welches in den Ländern des Euphrat und Tigris sich regte. Wohl an keinem Flecke der Erde fand ein so rascher Wechsel der herrschenden Nationalitäten und der in denselben wurzelnden Dynastien statt, als grade dort; aber auch nirgends hat auf und aus den Trümmern der alten Hauptstadt so rasch die neue sich erhoben, wenn auch mitunter Zwischenperioden einer weiter abliegenden Residenz eintraten. Nur wenige Meilen von einander entfernt entstanden das alte Babylon, Seleucia, Ktesiphon, Bagdad, deren Ueberreste noch Zeugniss geben von alter und ältester Kultur. Es liegt in der Natur der Sache, dass jede siegreich eindringende fremde Dynastie ihre Sprache mit sich brachte, welche zwar das schon Vorhandene nicht ganz zu verdrängen vermochte, aber doch die bevorzugte war, und bei der streng absoluten Gewalt orientalischer Fürsten, die in sich selbst den Mittelpunkt des Reiches sieht, als Hofsprache überall die erste vielleicht freilich wenigst verständliche Stelle erhielt, während die eigentliche Volkssprache erst den zweiten Rang einnahm. Ich glaubte dieses gleich vorausschicken zu müssen, um zu erläutern, dass die schriftlichen Ueberreste dortiger Gegend weit bedeutendere Differenzen aufweisen, als sonst begreiflich wäre, indem nicht bloss eine Verschiedenheit der Zeichen auftritt, wie etwa in Egypten, sondern die Sprache selbst ist eine andere, ja sogar andern Stammes. Wenn auch nur die Inschriften von der Zeit der Perserkriege aufwärts verglichen werden, so ergeben sich unter ihnen schon d r e i Gattungen, welche

man sehr frühzeitig zu unterscheiden wusste, wenn gleich alle drei nicht selten dicht unter einander stehend auftreten, und darin denselben Charakter tragen, dass sie sämmtlich Keilschriften sind.

Die Bedeutung dieses Wortes hat Grotefend, der erste wirkliche Entzifferer, dahin begrenzt, dass darunter jene Schriftarten gemeint sind, welche in den Provinzen des alten persischen Reiches hier und da zerstreut vorkommend einen Mangel aller Rundung aufweisen. Die Zeichen setzen sich dabei aus zwei Elementen zusammen, dem Keile und dem Winkelhacken, welch letzterer indessen von Manchen als die Verbindung zweier zu einander geneigten und an der breiten Stelle verschmolzenen Keile betrachtet wird, woraus dann die Berechtigung abgeleitet wird, den Keil in seinen verschiedenartigsten Stellungen und Combinationen als einziges Element der Keilschrift aufzufassen. Mag dieser Streit ein Wortstreit sein oder nicht, genug die verschiedenen Arten von Keilschrift werden bestimmt durch den höheren oder geringeren Grad von Einfachheit in der Zusammenstellung der einzelnen Charaktere aus Winkelhacken, vertikalen, horizontalen und geneigten Keilen. Grotefends erste Arbeit über diesen Gegenstand wurde am 18. September 1802 der göttinger Academie vorgelegt [28]) und von da an beschäftigte er sich unablässlich mit Weiterführung seiner anfänglichen Resultate. Ihm und anderen Entzifferern ist es gelungen, nachzuweisen, dass die chronologische Reihenfolge der drei Schriftarten, von welchen indessen selbst wieder jede in mehreren Varietäten vorkommt, von der complicirtesten zur einfachsten fortschreitet, so dass diese letzte als die neueste sich herausstellt: ein ähnliches Verhältniss, wie es auch bei den Hieroglyphen der Egypter stattfindet In der That wollen auch, es sei dieses beiläufig bemerkt, einzelne Forscher die älteste Keilschrift selbst als aus einer Bilderschrift abgeleitet betrachten.

Die drei Sprachen sind in derselben chronologischen Reihenfolge 1) eine semitische oder besser gesagt aramäische (wahrscheinlich die Sprache Alt-Babylons); 2) eine skythische, wie sie noch von den meisten Erklärern genannt wird, obzwar über sie die grössten Zweifel stattfinden, und weit auseinandergehende Meinungen über die Erfinder derselben geäussert worden sind; 3) eine indogermanische, dem Sanskrite und noch mehr der alten Zendsprache sehr nahe stehend (wohl die Sprache der alten Perser).

Inschriften aus Persepolis, der alten Gräberstadt persischer Könige, in allen drei Sprachen wurden zuerst aufgefunden und der Entzifferung unterworfen. Der Gang, den dieselbe nahm, ist ein zu interessanter, als dass ich mir versagen könnte hier einzuschieben, wie Grotefend in Folge einer in jugendlichem Uebermuthe eingegangenen Wette den jüngsten persischen Theil der Inschrift bewältigte. Schon vor Grotefond war es Tychsen und Münter geglückt den Worttheiler (**Figur 8**) zu entdecken, d. h. das unverhältnissmässig häufig wiederkehrende Zeichen eines einzeln stehenden, von oben und links nach unten und rechts geneigten Keiles, so dass zwischen je zwei solchen Zeichen eine Gruppe von mindestens zwei höchstens elf anderen Zeichen eingeschlossen war. Schon sie hatten daraus den kühnen Schluss gezogen, dieser einzelne Keil werde wohl nur ein Symbol sein, welches ein Wort vom anderen scheide, ohne selbst einen bestimmten Sinn zu haben. Auf diese Hypothese baute Grotefend zunächst weiter und kam zu der doppelten Ueberzeugung, dass eine Buchstabenschrift vorliege, so wie dass dieselbe von der Linken zur Rechten zu lesen sei. Die erstere Folgerung zog er aus der Anzahl der zwischen je zwei Worttheilern enthaltenen Charaktere. Er meinte, 'das häufige Vorkommen von 10 und 11silbigen Wörtern sei doch unwahrscheinlich, und eine Silbenschrift war jedenfalls neben der Buchstabenschrift die einzige Alternative, wofern die Annahme richtig war, dass zwischen zwei Wortheilern nur ein Wort stehe. Dass aber selbst unter Fallenlassen dieser Hypothese keine Wortschrift vorlag, in welcher jedes einzelne Zeichen ein ganzes Wort bedeutet hätte, war dadurch erwiesen, dass sehr oft dasselbe Zeichen zweimal, in selteneren Fällen sogar dreimal ganz unverändert hinter einander auftritt, was bei Wörtern im höchsten Grade unwahrscheinlich ist. Die Richtung, in der die Schrift zu lesen sei, erschloss Grotefend aus einer Reihe von Gründen, aus welcher für den Laien am plausibelsten ist, dass sämmtliche unter einander stehende Zeilen mit ihrem Ende links eine vertikale grade Linie bilden, während an dem Ende rechts mitunter eine Zeile über die andere hinausragt. Das lässt nahezu mit Bestimmtheit vermuthen, dass links der Anfang ist. Ich will gleich hier bemerken, dass wenigstens diese Richtnng auch bei den übrigen Keilschriften sich bestätigte, was bei der in aramäischer Sprache vorhandenen auffallen muss. Rawlinson macht desshalb auch die Bemerkung, [29]) die Rich-

tung des Schreibens hänge nie von der Sprache ab, sondern nur von dem benutzten Alphabete. So gebe es Inschriften auf Münzen, die genau desselben Inhaltes in derselben Sprache auf den beiden Seiten der Münze, aber in verschiedenem Alphabete auftreten und das einemal in semitischer Weise von rechts nach links, das anderemal nach arischer Sitte von links nach rechts zu lesen seien. Dadurch wird alsdann erreicht, dass auf beiden Seiten der Münze die Inschriften sich Buchstabe für Buchstabe entsprechen.

Das so weit von Grotefend Aufgefundene bot doch erst eine schwache Spur, um so schwächer als der sie verfolgen wollte gar nicht einmal mit den orientalischen Sprachen näher bekannt war, sondern nur im sogenannten Dechiffriren eine ziemliche Uebung sich erworben hatte. Grotefend wusste aus der Reisebeschreibung Niebuhrs, welcher die Inschriften mitgebracht hatte, dass dieselben sich über den Abbildungen von Königen vorfinden, die wahrscheinlich der Dynastie der Achämeniden angehörten, wie Heeren in der ersten Auflage seiner „Ideen“ bereits gezeigt hatte. Nun zeigte sich aber ein Wort besonders häufig, zum Theil gefolgt von demselben Worte mit anderer Endung. Daraus errieth Grotefend, dass das Wort König heissen müsse, das doppelte Vorkommen König der Könige, ein aus Herodot wohlbekannter Titel der Beherrscher Persiens. Das war ein zweiter grosser Schritt, allein für sich doch noch ungenügend. Denn vorausgesetzt Grotefend hatte richtig gerathen, so wusste er zwar, was das Wort bedeute, aber *nicht* wie es zu lesen war, und das blieb doch immer die *Hauptsache.* Dazu führte ihn ein weiterer Schluss, der bei Weitem die grösste Combinationsgabe verrieth.

Beim Vergleichen zweier Inschriften sah er nämlich, dass diese sehr viele Aehnlichkeit besassen, und das Wort König verschiedentlich endigend, also voraussichtlich in verschiedenem Casus, mehrfach enthielten. Aus der Anzahl der Wörter versuchte er nach Analogie anderssprachiger Inschriften, welche De Sacy von anderen Orten Persiens her übersetzt hatte, den folgenden Sinn zu ermitteln: A der grosse König, der König der Könige, Sohn des B des Königs. Die zweite Inschrift lautete dann, indem denselben Zeichengruppen derselbe Sinn beigelegt wurde: B der grosse König, der König der Könige, Sohn des C. Also hier war Grossvater, Vater und Sohn, von welchen die beiden letzten A und B den Titel König führten, der erste C ihn nicht führte. Dass A und B

nicht Cambyses und Cyrus waren, ergab sich daraus, dass diese beiden Namen sonst denselben Anfangsbuchstaben hätten aufweisen müssen. Eine andere Königsfolge musste daher gemeint sein, und als solche bot sich Xerxes, Sohn des Darius, Sohn des Hystaspes dar, von welchen allerdings zwei Könige, der Grossvater Hystaspes aber nicht König war; eine Familie die gleichfalls als Seitenstamm von den Achämeniden sich herleitete. Eine Controle für die Richtigkeit dieser Namen musste der Buchstabe r abgeben, welcher nahezu in der Mitte von Darius und Xerxes identisch auftreten musste und sich auch in der That so ergab. Die anderen Buchstaben der drei Namen folgten, wenn auch nicht so rasch wie es hier gesagt ist, nach, und so war der Schlüssel zu weiteren Entdeckungen vorhanden.

Der Klang der Wörter, welche man jetzt las, ohne sie zu verstehen, umgekehrt wie Grotefend angefangen hatte, sie zu verstehen, ohne sie zu lesen, bewies, dass die Sprache eine indogermanische war, und mit Hülfe analoger, bekannter Sprachen desselben Stammes konnte man allmälig das Alphabet vollständig wiederherstellen. Aehnliche Versuche glückten in Betreff der ältesten complicirtesten Keilschrift, welche als aramäisch erkannt wurde, und in welcher eine ganze Literatur existirt, die aus den Schutthaufen von Niniveh und Babylon neu erstand. Ihre Entzifferung ist indessen bei Weitem schwieriger und also auch vorläufig ungewisser, weil hier keine reine Buchstabenschrift vorliegt, sondern Buchstaben mit Silben und sogar Begriffszeichen wechseln. Am weitesten zurück war bis in der neuesten Zeit die Entzifferung der dem Alter nach mittleren Keilschrift. Die Männer, welche sich besondere Verdienste um das Verständniss der sämmtlichen Gattungen erworben haben, sind ausser Grotefend noch die Deutschen Lassen, Holtzmann, Oppert, Mordtmann, die Engländer Rawlinson, Hincks, Norris und Andere.

Auch über das Vorkommen der drei Sprachen muss Einiges bemerkt werden, wofür besonders Rawlinson mir als Quelle diente. Die älteste babylonisch-assyrische Schrift findet sich in den meisten Varietäten. Die Backsteine Babylons, die Wandskulpturen Ninivehs bieten zwei derselben dar; eine dritte, welche desshalb als achämenidisch-babylonisch benannt werden kann, findet sich auf den dreisprachigen Inschriften aus den Zeiten dieses Königshauses, und ist in grösseren Bruchstücken zu Van, zu Behistun, vor Allem

zu Persepolis vorhanden. Die zweite Schrift findet sich niemals allein, sondern nur in den eben erwähnten Trilingualinschriften, scheint also die Sprache einer Nationalität zu sein, welche zur Zeit der Achämeniden unter persischer Herrschaft stand und wichtig genug war, um auch ihr verständlich die Reichsannalen zu verkünden. Ein Analogon dazu bietet die noch heutige Gewohnheit [30]) zu Bagdad, die Regierungserlasse arabisch, türkisch und persisch zu veröffentlichen. Welche Nationalität diese zweite war, darüber gingen, wie bemerkt, die Ansichten weit auseinander. Skythen, Meder und Turkomanen wurden in ihr gesucht, und je nach dem Standpunkte des Forschers auch gefunden. Die neuesten Arbeiten von Mordtmann [31]) geben, wie mir scheint, schlagende Gründe dafür, dass es die Sprache der Bewohner der Provinz Susiana war. Denn *einmal* werden die drei ersten Provinzen des Perserreiches immer als Persien, Susiana und Babylon bezeichnet; zweitens findet sich dem entsprechend die sogenannte zweite Keilschrift immer in einer mittleren Stellung; drittens endlich hiessen die Namen Persien und Babylon in der zweiten Keilschrift ebenso wie in den beiden anderen, wogegen statt der Provinz Susiana unerwarteter Weise der Name Afardi auftritt. Das kann doch wohl nur der Name sein, dessen die Eingeborenen allein sich bedienen, der also nur in der Landessprache existirt. Endlich die dritte, neueste Sprache ist — und auch das wurde vorher schon bemerkt — die persische der Achämenidenkönige. Sie findet sich theils als Hauptinschrift am *hervorragenden* Ehrenplatze bei den dreisprachigen Ueberresten, theils, *aber* selten, auch allein. Sie scheint nicht über Cyrus hinaufzugehen, dem Rawlinson desshalb die Erfindung zuzuschreiben geneigt ist. In der That muss hier von einer Erfindung gesprochen werden, indem nur die einfachsten Elemente der bisherigen Schriftzüge in neuen wenig complicirten Zusammenstellungen zu 35 Lautzeichen (so viele kennt man jetzt [32]) verbunden wurden, welche vordem gar nicht, oder wenigsens nicht so gestaltet existirten. Darin liegt, wie Herr Holtzmann bei Gelegenheit eines populären Vortrages über Keilschrift [33]) mit vollem Rechte bemerkte, eine so kolossale Neuerung, wie sie bei keiner sonst bekannten Staatsumwälzung je vorkam, und möchte ich hinzusetzen wie sie auch nirgends möglich wäre, wo das Volk nur eine Spur mehr darstellt als die Sklavenheerde des Regenten, also nirgends als im Oriente. Ein charakteristisches Beispiel dortiger Anschauungsweise erzählt der

bekannte Reisende Pallas [34]) noch vom Anfange dieses Jahrhunderts, dass nämlich ein Mongole, der den andern beim Schopfe raufe, straffällig sei, nicht etwa weil er dem Anderen wehe that, sondern weil der Schopf dem Fürsten gehört.

Ich komme jetzt wieder zu den Zeichen, deren Erläuterung zu Liebe das Vorangegangene auseinandergesetzt wurde, zu den Zahlzeichen der Keilschrift. [35]) Es scheint, als ob die Zahlzeichen die einzigeu waren, welche der Erfinder der persischen Keilschrift fast unverändert aus der altassyrischen herübernahm. Genau betrachtet darf uns diese Thatsache nicht Wunder nehmen. Auch in späteren Zeiten haben Ziffern in der Regel nur geringere Veränderungen von einer Schriftart zur anderen erlebt, sie bildeten gewissermassen ein Gemeingut von neben einander wohnenden Völkern, und ihre Identität ist Schuld daran, dass heutigen Tages mathematische Schriften selbst von Solchen gelesen und annähernd verstanden werden können, welchen die Sprache des Textes absolut unbekannt ist. Ja es ereignet sich überhaupt bei Wortzeichen (wie doch Ziffern welche sind), dass sie verschiedenen Völkern gemeinsam sein können. So erzählt Staunton, [36]), dass Inselbewohner des indischen Oceans bei totaler Unkenntniss der chinesischen Sprache einen schriftlichen Verkehr in den Zeichen dieser Sprache durchführen konnten, welche offenbar in ihrer Landessprache denselben Wortbedeutungen zum Bilde dienten. In der also allen Gattungen von Keilschrift gemeinsamen Bezeichnung von Zahlen treten als selbstständige Elemente der Vertikalkeil und der Winkelhacken zunächst hervor, der erste als Einheit, der zweite als Zehn, vielleicht wie Grotefend meint, als Bezeichnuug beider Hände, welche man beim Beten mit zusammengeschlossenen Fingern, aber abgesperrten Daumen, flach auf einander legte. Dabei war die Bezeichnung zunächst für die kleineren Zahlen durch blosses Nebeneinanderstellen, durch Juxtaposition, wobei das Princip gewahrt wurde, dass von der Linken anfangend zuerst die Zehner, dann die Einer geschrieben wurden, dass also niemals das Kleinere dem Grösseren vorausgeht. Daraus folgte, dass wenn um Raum zu sparen mehrere Winkelhacken oder Keile übereinander gezeichnet wurden, ein einzelnes etwa noch hinzuzufügendes Zeichen in grösserer Form unter den übrigen oder rechts, nicht aber links beigefügt wurde, weil es eben der Bedeutung nach niedriger als jene Doppelreihe war. So erklären sich fast alle bekannten Zahlen unter 100 (**Figur 9**).

Von Hundert an, dessen Zeichen ein Vertikalkeil mit rechts folgendem Horizontalkeil ist,[37]) tritt eine wesentliche Veränderung ein. Zwar die Richtung der Zeichen im Grossen und Ganzen, also der Hunderter, Zehner, Einer wird nicht geändert, aber neben der Juxtaposition der Zahltheile verschiedener Ordnung erscheint plötzlich ein multiplicatives Verfahren, indem links vor das Zeichen von Hundert die kleinere Zahl gesetzt wird, welche andeutet, wie viele Hundert gemeint sind. Die Vermuthung wird dadurch sehr nahe gelegt, es sei in Folge dieses multiplicativen Gedankens, dass Tausend durch Vereinigung des Winkelhackens, des Vertikalkeils und des Horizontalkeils dargestellt wird (**Figur 10**). Aber dieses Tausend wird dann selbst wieder als neue Einheit benutzt, welcher die kleinere Zahl multiplicativ vorhergeht, so dass also 2000 durch 2mal 1000 bezeichnet wird, während die Zusammenstellung von zwei Winkelhacken, einem Vertikalkeil und einem Horizontalkeil von links nach rechts immer 10mal 1000 heisst, nicht etwa 20mal 100 oder 2000, wie angenommen werden müsste, wenn das Zeichen für das 1000 wirklich 10mal 100 wäre. Hincks[38]) hat daraus die Muthmaassung geschöpft, es dürften wohl die beiden Zeichen für 100, sowie für 1000 gar nicht als unabhängige Zahlzeichen aufzufassen sein, um so weniger als sie im Babylonischen auch Buchstabenwerth besitzen, das Zeichen für 100 heisse ki und das für 1000 shi. Es seien das eben die Anfangsbuchstaben der babylonischen, also der ältesten Wörter Hundert, Tausend; es sei reiner Zufall, dass dabei Tausend als zehnmal Hundert geschrieben erscheine. Ein nicht zu verachtendes Argument dafür besteht darin, dass Tausend als ein Zeichen auch dem wenigst geübten Auge erscheint, indem zwischen Winkelhacken und Vertikalkeil keinerlei Zwischenraum gelassen ist, wie er bei multiplicativen Formen jedesmal auftritt. Ferner gewinnt diese Ansicht noch viel für sich, wenn man bedenkt, dass der Analogie nach 10000 viel eher durch 100 mal 100 als durch 10 mal 1000 darzustellen gewesen wäre. Und man erhält nahezu Gewissheit, wenn es wahr ist, was Hincks an derselben Stelle behauptet, dass nämlich 10000 ausser durch 10 mal 1000 auch durch das alphabetisch geschriebene Wort âvibi bezeichnet werde, dem wieder die Coefficienten vorgesetzt werden, wenn es erlaubt ist, sich dieses modernen Namens für die multiplicirenden kleineren Zahlen zu bedienen.

Mag nun diesem sein, wie es wolle, eine Thatsache tritt mit

Bestimmtheit hervor, nämlich die, dass die Babylonier das Bewusstsein der Einheiten verschiedener Ordnung in viel höherem Maasse hatten, als etwa die Egypter. In Bezug auf verhältnissmässig niedere Zahlen tritt das nicht so hervor. Auch bei den Egyptern sahen wir z. B. von den Hundertern an eine multiplicative Bezeichnung auftreten. Allein bei höheren Zahlen schieden die Egypter die einzelnen Ordnungen nicht so sehr von einander wie die Babylonier es thaten. So schrieben z. B. die Babylonier[39]) 36000 entweder durch 3 mal âvibi und 6 mal 1000 oder durch 30 mal 1000 und 6 mal 1000, nicht aber durch 36 mal 1000. Oder wenn etwa dieses noch angezweifelt werden könnte,[40]) so ist jedenfalls sicher, dass 120000 als 100 mal 1000 und 20 mal 1000, nicht aber als 120 mal 1000 geschrieben wurde. Die Babylonier unterschieden also streng zwischen Tausendern, Zehntausendern und Hunderttausendern, wenn sie auch dazu sich nicht erheben konnten, die Zahl 30000 etwa als 3 mal 10 mal 1000 darzustellen. Sollte man daraus weiter schliessen, dass eben eine Beschränkung des Zahlbegriffes vorhanden war, welche es nicht zuliess, Einheiten von höherer als einer bestimmten Ordnung anzunehmen?

Etwa in folgender Weise: Setzen wir einmal voraus, Tausend sei die höchste Einheit gewesen, welche durch ein besonderes Zeichen dargestellt wurde. Dann konnte eine Million oder 1000 mal 1000 noch als Product zweier Factoren geschrieben werden, deren keiner grösser als jene höchste Einheit war. Von da an musste ein dritter Factor hinzutreten, d. h. 2 Millionen musste man als 2 mal 1000 mal 1000 schreiben, 10 Millionen als 10 mal 1000 mal 1000. Hat hingegen Hincks das Wort âvibi richtig als Zehntausend übersetzt, so konnte man noch 100 Millionen, nämlich 10000 mal 10000 durch zwei Factoren darstellen. Es liesse sich sogar eine Zeit des Uebergangs annehmen, während welcher der Zahlbegriff sich erweitert hätte. Dafür sind Stellen biblischer Schriften nicht ohne Interesse, so wenn es im Buche Daniel heisst:[41]) „Tausend mal tausend dieneten ihm und Zehntausend mal zehntausend standen vor ihm“ und noch auffallender ist eine Stelle der Psalmen:[42]) „der Wagen Gottes ist zehntausend mal tausend“, wo diese ungewöhnliche Wortfolge (die grössere Zahl vor der kleineren) vielleicht nach dem beschriebenen Principe der drei Factoren zu erläutern ist

Das 10 ging erst dem 1000 mal 1000 getrennt voraus, und wurde dann mit dem ihm zunächst stehenden 1000 in ein Wort vereinigt.

Dass aber der Zahlbegriff einer Grenze unterworfen ist, kann durchaus nicht in Erstaunen setzen, wenn man an die auch heutigen Tages in dieser Beziehung unter der grossen Bevölkerungsmasse herrschende Beschränkung denkt. Kaum der Begriff einer Million dürfte zu allgemeiner Klarheit gelangt sein; bei höheren Zahlen hört die Vergleichungsfähigkeit auf, und Alles verschwimmt in einer dunklen Ahnung dem mathematischen Unendlichgrossen am nächsten verwandt. Indem ich mir vorbehalte auf jene Grenze speciell der Babylonier nochmals zurückzukommen, will ich noch eine andere Eigenthümlichkeit in der Bezeichnung vorher erwähnen.

Es ist bemerkt worden, dass im Allgemeinen bei der Keilschrift je nach der Stellung der Zeichen ein merkwürdiger nicht genug hervorzuhebender Functionswechsel eintritt, indem die kleinere Zahl rechts von der grösseren sich ihr zuaddirt, links von derselben sie multiplicirt. Es scheint nun fast nach einigen von Hincks und Grotefend gleichmässig bestätigten[43]) Fällen, dass auch dieses Princip einer Ausnahme fähig ist, indem eine kleinere Zahl einer grösseren vorgesetzt sie nicht multiplicirt sondern, was noch viel merkwürdiger ist, unter veränderter Werthbedeutung zu ihr addirt werden muss. Und doch löst sich das Räthsel ziemlich einfach. Schon a priori ist einzusehen, dass wenn bei einem Zeichen eine solche Veränderung eintritt, es wohl bei dem Vertikalkeil sein wird, da es überflüssig erscheint, den Coefficienten Eins noch besonders zu schreiben, und nach dem Früheren der einer grösseren Zahl vorgesetzte Vertikalkeil Nichts anders als diesen Coefficienten darstellen würde. Es ist daher wahrscheinlich, dass wenn derartige Formen sich finden, der Vertikalkeil ein ich möchte sagen stenographisches Zeichen für eine eigentlich anders aussehende Zahl ist, und als solches gebraucht werden darf, weil eine Verwechslung nicht möglich ist. Damit stimmt aber die Beobachtung überein, indem der einzelne Vertikalkeil grösseren Zahlen links vorgesetzt das Fünffache der Einheit des betreffenden Ranges darstellt (**Figur 11**). So finden sich die Zahlen 7 und 9 durch Vorsetzung eines einzelnen Vertikalkeiles vor den in Doppelreihen geschriebenen 2 und 4; so stellt ein Vertikalkeil mit folgendem Winkelhacken die Zahl 60 vor; und die Frage liesse sich daher aufwerfen, ob der Vertikalkeil mit folgendem ki nicht als

600, der Vertikalkeil mit folgendem shi nicht als 6000 zu lesen wäre, statt mit Grotefend [44]) zu sagen, die Tausendzahl sei gleich der Hundertzahl so sehr als ein Nennwort behandelt worden, dass man sogar einen einzelnen Vertikalkeil davorgesetzt finde. Eine Verwahrung ist noch dahin nothwendig, dass dergleichen Stenographie, weit entfernt dem Geiste der Keilschrift zu widersprechen, vollständig demselben inne wohnt, indem sogar in der durchaus alphabetischen persischen Keilschrift derartige Abkürzungen vorkommen, etwa ein Wort nur durch den ersten und letzten Buchstaben geschrieben wird. Ich habe dieses früher absichtlich nicht angeführt, um die Begriffe nicht zu verwirren; aber den Entzifferern kosteten solche Abbreviaturen Mühe genug, so lange sie in denselben Spuren einer Silbenschrift, oder gar einer Wortschrift zu sehen glaubten.

Ich kehre zu der Schreibart grosser Zahlen zurück, für welche ich eine gewisse Grenze als wahrscheinlich vorhanden darstellte. Nicht als ob diese Grenze bei den Theoretikern stattgefunden hätte. Die Fachgelehrten werden wohl damals grade wie jetzt sich auch da noch zu helfen gewusst haben, wo der übrigen Menschheit die Deutlichkeit der Anschauung verloren ging. Aber das gewöhnliche Leben kannte keine höheren Zahlen, man ging im Allgemeinen in der Rechnung nicht darüber hinaus. Dieser Umstand wird sehr erklärlich, sobald man eine weitere Hypothese eintreten lässt, deren Begründung nicht allzuschwierig erscheint, die Hypothese nämlich, dass die Babylonier zu ihren Rechnungen sich machinaler Hülfsmittel bedient haben, insbesondere des Rechenbrettes. Derartige Bretter sind im ganzen mittleren Asien zu Hause, wo nicht einmal die Sage die Zeit ihrer Erfindung angiebt, so ursprünglich treten sie dort auf. In den östlichen wie in den westlichen Grenzländern ist bis auf den heutigen Tag dieses Brett mit seinen Schnüren und Abtheilungen der unentbehrliche Gefährte eines Jeden, welcher mit Zahlenoperationen zu thun hat. Der chinesische Kaufmann kann ohne seinen Suanpan ebensowenig auskommen, wie der russische ohne seinen Tschotü, und die Geschwindigkeit ihres Verfahrens mit diesen Apparaten setzt jeden erstmaligen Zuschauer in Erstaunen. Hatten aber die Babylonier ein Rechenbrett, so besass dieses doch nur eine bestimmte Anzahl von Abtheilungen, und über die höchste Ordnung dieser Abtheilungen hinaus war keine instrumentale Bezeichnung möglich, mithin auch

keine unmittelbare Anschauung, und so erklärt sich das früher Angenommene.

Es wird allerdings nirgends, so viel ich habe finden können, mitgetheilt, dass die Babylonier etwa zur Zeit der Achämeniden ein Rechenbrett besassen. Aber um so sicherer ist es, dass sie lange vorher eine ganze Literatur besassen, welche mit der Rechenkunst sich beschäftigte. „Ein aufgegrabener Saal in einem der Schutthügel zu Niniveh, so erzählt Röth,[45]) enthielt eine förmliche Bibliothek aus aufgespeicherten Thontafeln bestehend, deren Inhalt jetzt einen der Schätze des britischen Museums ausmacht, und die begonnene Entzifferung dieser Tafeln lehrte, dass sie auf Befehl des letzten ninivitischen Königs, des allbekannten Sardanapal, in der Mitte des siebenten Jahrhunderts v. Ch. Geb., wenige Jahre vor dem tragischen Ende dieses Königs, förmlich zum Zwecke der öffentlichen Belehrung, als Staatsbibliothek aufgestellt worden waren. Die verschiedenen wissenschaftlichen Fächer in dieser Bibliothek unterschieden sich zum Behufe des leichteren Aufsuchens durch die verschiedene Färbung der Thontafeln: schwarz, grau, bläulich, violett, roth, gelb, braun, weiss; und in der That ist ihr wissenschaftlicher Inhalt von gleicher Mannigfaltigkeit: Mythologie, Geschichte, Geographie und Statistik, Botanik, Zoologie, Astronomie und Astrologie, Kalender, Arithmetik, Architektur und Grammatik.“ Es zeigte sich ausserdem im vorigen Kapitel, dass überhaupt den Babyloniern Rechenkunst in hervorragender Weise zugeschrieben wurde. Es zeigte sich, dass die Egypter, deren Rechenkunst niedriger angeschlagen wird, ein instrumentales Verfahren mit Steinchen zu Herodots Zeiten besassen. Es wird ferner an einer anderen Stelle gezeigt werden, dass der Abax der Griechen, welcher zur Zeit des Pythagoras, vielleicht schon vorher, bekannt war, bereits als eine Vervollkommnung des Rechenbrettes anzusehen ist, dem also jenes vorhergehen musste. Wird es nach Zusammenfassung aller dieser Umstände gewagt erscheinen, wenn ich die Existenz des Rechenbrettes, zum allermindesten in der einfachen Gestalt, bei den Babyloniern, an dem Mittelpunkte des Handelsverkehrs, als bekannt annehme?

Auch dieser letzte Ausspruch mag noch einigermassen erläutert werden,[46]) da ich mich künftig auf ihn zu beziehen gedenke.

Babylon war zu der Epoche, von welcher ich rede, allerdings der Hauptmarktplatz der Welt, von welchem aus Strassen nach allen Himmelsgegenden führten, und nach welchem Karawanen ohne Zahl sich drängten. Dort tauschten sie die Erzeugnisse ihrer Heimath aus theils untereinander, theils gegen die Fabrikate der babylonischen Industrie. Dieser rege Verkehr wäre schon aus der sittenlosen Vertraulichkeit zu entnehmen, welche Fremden gegenüber den babylonischen Frauen einmal in ihrem Leben anbefohlen war,[47]) und welche gewiss nur an einem Orte entstehen konnte, wo der Begriff der Moral gegen den des Gelderwerbes gesunken war, wo der Fremde als solcher bevorzugt war, weil der ökonomische Vortheil erkannt war, den er dem Staate brachte. Ausserdem sind aber directe Nachrichten über die einzelnen Post- und Karawanenstrassen vorhanden, eine davon kann sogar heute noch in ihren Ueberresten nachgewiesen werden,[48]) und auch die einzelnen Gegenstände des damaligen Handels sind bekannt, sowie die Quellen, aus welchen sie zu beziehen waren. Da kamen von Osten, aus dem jetzigen Tibet die edeln Steine, die Onyxe und Sarder, vor Allem die Lapis Lazuli, welche in Babylon zu Siegelringen verarbeitet wurden. Eben daher bezog man die Cochenille, unentbehrlich zum Färben der weltberühmten Teppiche und sonstigen Webereien, ebendaher wohl auch Gold, dessen Heimath (vielleicht das reiche Ophir der Bibel?) bald da, bald dort vermuthet wird. Die indischen Jagdhunde aus der dortigen Gebirgsgegend bildeten nicht minder einen eigenen Handelsartikel. Aus dem Norden brachten leicht gebaute Schiffe aus Thierhäuten zusammengesetzt das Getreide und die Weine Armeniens und Mesopotamiens den Euphrat und den Tigris herab. Der ferne Süden, vielleicht sogar die Inseln des indischen Oceans, namentlich Ceylon, lieferten Perlen und Gewürze, Elfenbein und die feinen Holzarten zum Ausschnitzen jener kunstvollen Stäbe, ohne welche kein hoffähiger Kavalier der ninivitischen Wandskulpturen erscheint, und die von Herodot ganz besonderer Erwähnung[49]) gewürdigt werden. Fast am Wichtigsten war aber sicherlich aus jenen Gegenden die Einfuhr an Baumwolle, welche verarbeitet das Hauptproduct babylonischer Gewerbsthätigkeit bildete. Aus dem fernsten Osten endlich sehen wir die Chinesen dort erscheinen, welcher z. B. Jesaias gedenkt, wenn er sagt:[50]) „Siehe diese werden von ferne kommen, und siehe jene von Mitternacht, und diese vom Meer und jene vom Lande Sinim.“ Die Strasse

nach Westen diente im Gegensatz zu den bisher genannten Wegen besonders dem Exportverkehre. Auf dieser Strasse lieferte Babylon seine Fabrikate, zu denen auch noch wohlriechende Wasser von sehr früher Zeit an gehörten, in die Schiffe der phönikischen Vermittler, von welchen sie zum Theil unter ihrem eigenen Namen als sidonische Gewebe und dergleichen weiter nach Westen ihren Lauf nahmen. Es ist, beiläufig bemerkt, nicht nöthig, bei solchem Namenswechsel an absichtliche Fälschung zu denken, so wenig wie andrerseits der Name eine Bürgschaft für die ursprüngliche Herkunft liefert. So wurde nach Hager [51]) das chinesische Papier von den Arabern als Papier von Samarkand bezeichnet, weil sie es an dem dortigen Handelsplatze erhielten, so sprach man von arabischen Ziffern, so lange man der Ansicht war, dieses Volk habe uns die Kenntniss derselben vermittelt.

Indem in der angegebenen Weise Babylon eine Weltstadt genannt werden muss, ein Stapel- und Marktplatz fast aller Nationen, so ist es um so einleuchtender, dass grade dort die praktischen Rechenkünste am entschiedensten gepflegt wurden, dass Jeder mit Zahlen umzugehen wusste, dass allmälig auch theoretische Betrachtungen wenigsteus bei den Gelehrten der Nation zur Sitte wurden, und dass man so auch wohl jene Eigenschaften der Zahlen entdeckte, welche zunächst vielleicht kaum mehr als Spielereien schienen, und erst im weiteren Verlaufe, möglicher Weise bei einem Volke, das zu sinnreichen Speculationen geneigter war, als zu Speculationen des Handels, sich zur Zahlentheorie erhoben. Mit dieser Bemerkung bin ich nun freilich wieder dicht an eine Frage gerückt, die manchem meiner Leser wenig Interesse einflösen mag, an die Frage nach der wissenschaftlichen Mathematik der Babylonier.

Wir könnten diese Frage mit voller Bestimmtheit für die ältere Zeit des 7. Jahrhunderts beantworten, wenn nur erst die Bibliothek des Sardanapal übersetzt wäre. Vorläufig entbehren wir aber noch der Kenntniss dessen, was in jenen Thonbüchern enthalten ist, und für alle Zeiten gar ist uns wohl das verloren, was ein gewisser Perigenes über die Mathematik der Chaldäer geschrieben haben soll. [52]) Ein Nothbehelf wenigstens wäre auch wahrscheinlich die Schrift des Jamblichus über Babylon, wenn diese

noch vor wenigen Jahrhunderten vorhandene und zur Herausgabe vorbereitete Schrift [53]) nicht verloren gegangen wäre. Das Alles ist nun dahin, und so wird die Ausbeute, welche aus den verschiedenartigsten indirecten Quellen gewonnen werden kann, nur in geringem Maasse das überschreiten, was ich bereits andeutete. Zunächst ist über die Bezeichnung der Zahlen noch eine Kleinigkeit zu sagen. Die Schreibweise, wie die Keilinschriften sie uns aufbewahrt haben, ist eine für ein rechnendes Handelsvolk ziemlich unbehülfliche, so dass kürzere Methoden sicherlich wünschenswerth erschienen. Diesem Wunsche ist vielleicht zuzuschreiben was vorher von der stenographischen Bedeutung des Vertikalkeiles mitgetheilt wurde. Aber auch dieses genügte nicht, wenn Layard uns genau berichtet. [54]) „Zwei Schreibweisen," sagt er nämlich, „scheinen gleichzeitig bei den Assyrern (d. h. also in der Periode vor dem zweiten Aufblühen Babylons etwa im 7. Jahrhundert) in Gebrauch gewesen zu sein, die Keilschrift, welche von links nach rechts geschrieben wurde, und eine Currentschrift, welche nach Art des Hebräischen und Arabischen von rechts nach links lief. Dieser auffallende Unterschied würde auf einen doppelten Ursprung der Zeichen hinweisen. Die Zahlzeichen bestanden gleich den Buchstaben aus Combinationen des Keiles. Doch scheinen auch Zahlzeichen der Currentschrift existirt zu haben, welche den egyptischen einigermaassen ähneln. Ich könnte, däucht mir, auf den gemalten Backsteinen von Nimrud verschiedene solcher Currentziffern nachweisen, indem augenscheinlich jeder Backstein mit einer Nummer versehen ist." Zu diesen Angaben Layards passt im Ganzen, was Röth über eine solche Backsteininschrift mittheilt, [55]) welche er „Tempel des El unseres Herrn" übersetzt, eine wie er hinzufügt ganz passende Bezeichnung eines zum Tempelbau bestimmten Backsteins. Von einer Nummerirung weiss Röth allerdings Nichts, und ich habe überhaupt über die Currentziffern keine weiteren Nachrichten sammeln können, nicht einmal in einem Aufsatze von Norris über assyrische Gewichtsteine, [56]) der von Anfang eine Ausbeute zu versprechen schien.

Ich habe dann früher auch schon Schlüsse auf die Existenz des Rechenbrettes bei den Babyloniern gezogen, für welche ich die Wahrscheinlichkeitsgründe zusammenstellte. Fragen wir weiter, welcherlei Aufgaben dem Handelsvolke am häufigsten vorkommen, also dort von den Theoretikern ausgebildet werden mussten. Es

sind dieses zunächst einfache Additionen, dann Multiplicationen, im weiteren Verlaufe Proportionsrechnung. Mathematisch ausgebildet konnte daraus, aber auch nur daraus, die Lehre von den einzelnen Progressionen, von den sogenannten Medietäten hervorgehen. Und nun berichtet uns Jamblichus, also ein Schriftsteller, welcher sich speciell mit den Verhältnissen Babylons beschäftigt hat, Pythagoras habe die harmonische Medietät aus Babylon, wo sie erfunden worden sei, nach Griechenland mitgebracht. [57]) Es wird uns ferner berichtet, die Rechenkunst des Pythagoras, welche, wie auch Theon von Smyrna angiebt, babylonischen Ursprunges war, sei von Nicomachus nur etwas weitläufiger behandelt worden. [58]) Die Schriften des Nicomachus aber, der um das Jahr 100 n. Ch. Geb. lebte, [59]) sind ganz erhalten, und in ihnen findet sich eine vollständige Lehre von den Proportionen; es findet sich darin eine Abhandlung über Polygonalzahlen; es finden sich die Unterscheidungen der Zahlen, welche in der Zahlentheorie gemacht zu werden pflegen, also Definitionen von graden und ungraden, von zusammengesetzten und Primzahlen. Ich bin weit entfernt, alle diese Erfindungen nach Babylon zurückverlegen zu wollen. Ich halte es vielmehr für ganz unberechtigt, den Nicomachus als blossen Nachschreiber zu bezeichnen. Die ganze Anlage seiner Schriften ist nicht darnach angethan, als wenn ein unerfinderischer Geist hier sich breit mache. Hat doch Nicomachus den merkwürdigen Satz aus der Lehre vom Grössten und Kleinsten entdeckt, dass das grösste Product von Factoren von gleicher Summe dann erzielt wird, wenn die Factoren unter sich gleich sind. [60]) Aber die Wiege dieser Kenntnisse muss in Babylon gestanden haben.

Noch von einer anderen Richtung babylonischer Wissenschaft wird uns erzählt, welche kurz hervorgehoben werden muss; ich meine die astronomische. Wie eng dieselbe bei diesem Volke mit der Rechenkunst zusammenhängt, zeigt wieder die bekannte Stelle des Theon. [23]) Ausserdem aber wird noch die beobachtende Astronomie besonders gehegt worden sein, da Herodot uns ausdrücklich berichtet, [61]) die Babylonier hätten den Gnomon erfunden, der sicherlich schon bei ihnen dieselbe Rolle spielte, welche er später bei den Griechen einnahm. Ja die ganze Zeitmessung scheint babylonischen Ursprunges zu sein, und das älteste benutzte Instrument war wohl die Wasseruhr, bei welcher also das Ausströmen einer gewissen Menge von Flüssigkeit als jedesmal in derselben Zeit sich

vollziehend angenommen wird. Bedeutende Forscher, wie Böckh, [62]) gehen sogar so weit anzunehmen, jene Flüssigkeitsmasse habe einen dreifachen Zweck erfüllt, sie sei in der Zeiteinheit ausgeflossen und habe selbst sowohl eine bestimmte Maasseinheit als auch eine Gewichtseinheit gebildet. Diese Ansicht hat noch an Wahrscheinlichkeit gewonnen, seit man weiss, [56]) dass wirklich die Mine ein babylonisches Gewicht war. So viel also vorläufig über babylonische Wissenschaft. Ich werde in einem späteren Kapitel noch darauf zurückzukommen haben.

III. Die Chinesen.

In den beiden vorhergehenden Kapiteln wurde der Versuch gewagt, als Einleitung in die Darstellung der Zahlzeichen auch über die Sprache und die Schrift zweier Völker einige Notizen zu sammeln, welche erst in den letzten Jahrzehnten, kann man sagen, genauer bekannt wurden, seit die moderne Wissenschaft Expeditionen ausrüstete und Nachgrabungen in systematischer Weise leitete, die nie geahntes Material zu Tage förderten. Hier bin ich in einer nur wenig verschiedenen Lage. Ich will über die Zahlzeichen eines Volkes Mittheilungen machen, dessen Sprache und Schrift dem lesenden Publikum im Grossen und Ganzen unbekannt ist, theils wegen der Schwierigkeiten, welche deren Erlernung wirklich darbietet, theils wegen der Abgeschlossenheit, in welcher das Reich der Mitte dem Europäer lange Zeit ein Land der Fabeln und Mährchen geblieben ist, von dem man viel lieber Wunderbares hören mochte, als dass man in die Wahrheit eindrang. Ich hoffe desshalb auch hier Entschuldigung zu finden, wenn ich Allgemeines vorausschicke.[63])

Die chinesische Sprache ist eine überaus arme. Sie besteht aus, wie es scheint, nur 450 einsilbigen Wörtern. Die Einsilbigkeit ist dabei allerdings von chinesischem Standpunkte aufzufassen, indem das Sprachorgan dieses Volkes noch im Stande ist, drei ja vier Vokale in einer Silbe hinter einander hören zu lassen, wie z. B. in dem Zahlworte kieou, neun. Consonanten hingegen kommen, etwa mit Ausnahme der Zischlaute, die in anderen Sprachen indessen ja zu den Halbvokalen gerechnet werden, kaum je zwei hintereinander vor. Die Fähigkeit, Vokale zu unterscheiden, benutzt die chinesische Sprache noch weiter, um ihren Wortvorrath wenigstens einigermaassen zu vergrössern. Jedes Wort nämlich kann in mehr oder weniger verschiedener Accentuation

ausgesprochen werden, von denen es im Ganzen vier Arten giebt, welche indessen das Ohr des Europäers kaum von einander zu trennen im Stande sein soll, geschweige denn, dass er sie nachahmen könnte. Durch diese viererlei Accente — welche in europäischen Schriften durch ^ ´ ` ˘ bezeichnet zu werden pflegen — die freilich nicht sämmtlich bei sämmtlichen Wörtern vorkommen, steigt der Wortreichthum auf 1203. Im Voraus lässt sich daher einsehen, dass damit eine Sprache nicht auskommen kann, wofern nicht ein Wort zur Benennung von sehr vielen Dingen angewandt wird, wodurch aber das Verständniss schon für den einheimischen Zuhörer, und weit mehr noch für den Fremden in einer Weise erschwert wird, die man sich nur annähernd begreiflich machen kann, wenn man aus eigener Erfahrung weiss, wie schwierig es für den Ausländer ist, der Aufführung einer Posse auf einem Theater als erstmaliger ungewohnter Zuschauer zu folgen und durch die einzelnen Wortwitze derselben sich nicht irre machen zu lassen. Was dort gesucht wird, bietet jeder chinesische Satz von selbst dar, und zwar in mehrfacher Auswahl, indem fast jedes Wort desselben bald so bald so aufgefasst werden kann, einzelne Wörter sogar bis zu 40 verschiedene Bedeutungen haben.[64])

Eine bedeutende Hülfe gewährt alsdann das Zusammensetzen zweier Wörter, welches nie so gemeint ist, dass der ganze Sinn beider Wörter sich vereinigt, um einen neuen Begriff zu bilden, sondern so dass diejenige Bedeutung hervortritt, welche beiden Wörtern gemeinsam ist. Man wählt also zum Zusammensetzen zwei Wörter, die bei vielfältig verschiedener Bedeutung eine identisch besitzen; oder man schlägt den entgegengesetzten Weg ein, man bildet nämlich aus zwei Wörtern, welche bloss verwandte oder gar einander entgegenstehende Bedeutung haben, ein neues Wort, welches dann gewissermaassen als vergleichendes Mittelglied gilt. Ich will suchen durch je ein Beispiel die Sache klarer zu machen. Das Wort dáo hat 9 Bedeutungen: führen, entwenden, erreichen, einstürzen, bedecken, Fahne, mit Füssen treten, Getreide, Weg. Das Wort lú hat 7 Bedeutungen: Edelstein, Thau, Seerabe, schmücken, Wagen, der Fluss Lu, Weg. Die Bedeutung Weg, aber nur diese allein, ist beiden gemeinsam, also heisst dáo-lú der Weg ohne irgend welche Zweideutigkeit. Ferner heisst unter Andern chiûng der ältere Bruder, dí der jüngere Bruder; zusammen chiûng-dí Bruder im Allgemeinen. Oder zû heisst die feinere Ma-

terie, lŏ die gröbere Materie; zû-lŏ in dem Mittelzustande sein, wo sich die gröbere Materie von der feineren scheidet, in den letzten Zügen liegen, sterben.

Ein weiterer Mangel der chinesischen Sprache ist, dass sie der Flexion durchaus entbehrt. Weder Casus noch Numerus bei den Hauptwörtern, weder Person noch Art noch Zeit bei den Zeitwörtern ergeben sich aus dem einzelnen Worte. Alle diese Unterscheidungen drückt der Chinese durch die Stellung der einzelnen Wörter gegen einander aus, so wie durch eigens dazu vorhandene Partikeln. In früher Zeit wurden sogar diese letzteren selten oder gar nicht angewandt, und grade dieser Umstand macht die älteren Werke der Chinesen so schwer verständlich, dass besondere syntaktische Regeln für dieselben gelten, welche unter dem Namen des alten Dialekts, des gù-wên gelehrt werden, während der neuere Dialekt, die Mandarinensprache gûan-chóa in vieler Beziehung klarer und bestimmter ist. Für die wissenschaftlichen Werke ist indessen der ältere Dialekt der einzig maassgebende, da bis zur grossen Bücherverbrennung im Jahre 213 v. Ch. Geb. alle Werke in diesem Style verfasst wurden, und er auch heute noch für ernstere Schriften, also insbesondere für Philosophie im weitesten Sinne des Wortes im Gebrauch ist, während der etwa in der angegebenen Epoche entstandene neue Dialekt hauptsächlich in Romanen, Lustspielen und dergleichen leichten Literatur seine Anwendung findet. [65])

Ist somit die chinesische Sprache arm an Wörtern, vielvermögend durch Combinationen, so ist die chinesische Schrift in beiden Beziehungen überreich. Die chinesische Schrift ist eine Wortschrift, wenn man so will, und sie ist es auch nicht. Sie ist recht eigentlich eine gegenständliche Schrift, eine Schrift für das Auge, welche verstanden werden kann, ohne dass man sie grade chinesisch auffasst. In ältester Zeit scheint in China der Gebrauch von mit Knoten versehenen Schnürchen in Uebung gewesen zu sein, die ähnlich ausgesehen haben mögen, wie jene Quippos, jene verschiedenfarbigen Fäden, deren die Peruaner sich bis ins 16. Jahrhundert hinein bedienten. So wird wenigstens allgemein berichtet, und damit stimmt auch unter Anderen eine Stelle aus einem chinesischen Werke des 6. Jahrhunderts vorchristlicher Aera. In dem Lao-theu-tao-te-king d. h. in dem Buche des Pfades der Tugend von Lao-theu, welches Julien übersetzt hat, sagt der Ver-

fasser im 80. Capitel [66]), was er Alles thun würde, wenn er Herrscher über ein kleines, nur wenig bevölkertes Land wäre. Er würde, meint er, das Volk abhalten, sich seiner Waffen zu bedienen; er würde ihm Furcht vor dem Tode einflössen und Abscheu gegen Wanderungen; er würde es zurückführen zum Gebrauche geknüpfter Schnüre, und so würde es das Alter und den Tod herannahen sehen, ohne je auch nur mit einem benachbarten Volke zusammengekommen zu sein. Der nächste Schritt bestand darin, dass man die mit Knoten versehenen Fäden projectivisch abzeichnete. Man erhielt so die sogenannten K o u a s [67]), welche freilich kaum noch als Schrift betrachtet werden können. Etwa im Jahre 2950 v. C. Geb. soll alsdann Fu-hi der erste Kaiser eine wirkliche Schrift erfunden und eingeführt haben. Es war eine B i l d e r - s c h r i f t, welche für jeden einzelnen Gegenstand ein besonderes Zeichen hinmalte, das seinen Umrissen entsprach. Ein solches Zeichen konnte also in verschiedener Weise ausgesprochen werden, wenn der Gegenstand verschiedene Benennung zuliess, und umgekehrt wurde ein und dasselbc Wort seinen verschiedenen Bedeutungen gemäss verschiedentlich geschrieben.

Diese Schrift ist ihrem Charakter nach unverändert bis auf den heutigen Tag geblieben. Wohl hat sie solche Umwandlungen erlitten, wie sie einestheils die Schnellschrift, andrentheils die Schönschrift verlangten; wohl ist desshalb jetzt selten oder nie zu erkennen, aus welchem Bilde das heutige Zeichen hervorgegangen ist, selbst wenn man es weiss. Jedoch das Prinzip ist genau dasselbe wie vor 4800 Jahren. Aus diesem Principe freilich konnte man zunächst nur Gegenständliches bezeichnen, und zur schriftlichen Darstellung von vielen Begriffen konnte nur allmälig übergegangen werden. So entstanden nach und nach Zeichen, die wir secundäre nennen können und welche inbegriffen die chinesischen Gelehrten sechserlei Zeichen annehmen. Ohne dieser Eintheilung folgen zu können, will ich nur einige Beispiele solcher secundären Zeichen anführen. Das Wort „oben“ wurde angedeutet durch einen Horizontalstrich, über dem ein Punkt steht; das Wort „unten“ durch einen ähnlichen Strich mit dem Punkte darunter. Um „Thränen“ zu schreiben vereinigte man ein Auge und Wassertropfen. Um einen Todten darzustellen, brauchte man das Bild eines Menschen, welches gewöhnlich stehend und mit dem Profile nach links schauend dargestellt wurde, als auf dem Rücken liegend. Der Be-

griff „folgen" wurde bezeichnet durch drei hintereinander stehende Menschen und dergleichen mehr. Also, um es zu wiederholen, Vervollkommnuhg und Veränderung genug im Einzelnen, im Ganzen aber Beibehaltung desselben Principes. Aus diesem Principe selbst folgt nun ein ziemlich wichtiges Resultat für den Gegenstand unserer eigentlichen Untersuchung.

Sehr bald nämlich musste das Bedürfniss rege werden, auch Zahlwörter schriftlich darzustellen, und wozu fast jedem anderen Volke eine Aushülfe etwa durch die Buchstaben des Alphabets geboten war, die Chinesen konnten dazu kein anderes Mittel anwenden, als dass sie Zeichen für die einzelnen Zahlwörter erfanden. Mit anderen Worten bei den Chinesen müssen selbstständige Zahlzeichen ureigenthümlich existiren [68]), oder wenn dergleichen von aussen eingeführt sein sollten, so könnte es nur von solchen Ländern her sein, wo dasselbe Princip der Schrift stattfand, und von wo gleichzeitig vielleicht noch andere Zeichen mitgekommen wären. Ich glaube indessen, dass diese Einschränkung des ersten Ausspruches eine ziemlich müssige Vorsicht war, indem wohl sicherlich kein Einfluss derjenigen Völker, bei welchen allein noch Zahlzeichen ohne Buchstabenschrift sich vorfinden, der Azteken und Muyscas des neuen Continents [69]), auf die Chinesen anzunehmen ist. Ob die entgegengesetzte Hypothese sich nicht eher vertheidigen liesse, darüber eine Untersuchung zu führen, liegt eben so weit ausser dem Plane dieses Buches, als mir das nothwendige Material dazu abgeht. Alexander von Humboldt neigte dieser Meinung zu.

Wenn nun aus dem Principe der chinesischen Schrift die Erfindung chinesischer Zahlzeichen sich mit Nothwendigkeit ergiebt, so liegt der Gedanke nahe, dass eben diesem Principe zu Folge unzählige solcher Zeichen sein müssten, indem jede neue Zahl als neuer Begriff auf neue Weise dargestellt werden müsste. Ueberlegt man sich indessen die Sache näher, so geht eine ganz anderes Resultat hervor. Wenn auch Schrift und Sprache der Chinesen sich nicht decken, so ist eine gewisse Analogie der beiden doch nicht zu verkennen, in so weit bei beiden die Neigung zu Combinationen herrscht, die Neigung Neues dadurch auszudrücken, dass man schon Bekanntes verbindet. Die Sprache war dazu, wie wir sahen, durch ihre Armuth genöthigt, und so mussten auch die Zahlwörter aus wenig Elementen zusammengesetzt werden. Die chinesische Sprache

fand diese Elemente in den Grundzahlen des decadischen Zahlensystems, welches sie in consequentester Weise ausbildete. Sie wählte Namen für die Zahlen 1 bis 9, dann für 10, 100, 1000 und 10000. Es sollen noch weitere Namen für das je Zehnfache existiren und zwar bis zu der Zahl, welche wir jetzt durch eine Eins mit 18 Nullen schreiben,[70]) aber der gewöhnliche Gebrauch bleibt bei Zehntausend stehen, als dessen Vielfache die höheren Zahlen angegeben werden. Es wird unnöthig sein, zurückzuverweisen auf das, was im vorigen Kapitel von der ähnlichen babylonischen Gewohnheit gesagt wurde. Es wird eben so unnöthig sein hervorzuheben, dass die chinesische Sprache das decadische System mit bei weitem den meisten bekannten Sprachen gemein hat, da dasselbe der Anzahl der Finger entsprechend fast von allen Völkern benutzt wurde, und selbst die wenigen Ausnahmen zumeist aus der Hälfte oder dem Doppelten der Zahl 10 hervorgegangen sind, die übrigen in kaum nennenswerther aber freilich um so interessanterer Verbreitung vorkommen.

Ausser dem Fünfer-, Zehner- und Zwanzigersystem kenne ich nur das Vierersystem, welches nach Aristoteles bei einem thracischen Volksstamme existirt haben soll;[71]) das mit ersterem vielleicht zusammenhängende Sechszehnersystem, welches Bopp in der Paginirung eines alten Codex des Mahabharata aufgefunden hat;[72]) das Siebenersystem, welches in der Zigeunersprache vorzukommen scheint;[73]) das Achtzehnersystem, welches die Osseten, ein kaukasischer Volksstamm besitzen sollen.[74]) Ob, wie F. Pyrard in seiner 1619 erschienenen Reisebeschreibung behauptet,[75]) in einem maldivischen Sprachidiome Zwölf die Basis der Numeration ist, lasse ich dahin gestellt. Ueber das sogenannte chinesische Zweiersystem habe ich nachher noch zu reden.

Die Chinesen, sage ich, hielten in ihrer Sprache das decadische System in consequentester Weise fest. Es ist leicht einzusehen, wie sie dabei zu Werke gehen mussten. Eine Flexion der Wörter existirte nicht. Eine eigentliche Zusammensetzung etwa der beiden Wörter drei und zehn in den einen Laut dreissig konnten sie auch nicht bilden, das wäre gegen alle Regel gewesen, wie aus dem hervorgeht, was oben über chinesische zusammengesetzte Wörter mitgetheilt wurde. Es blieb also keine andere Wahl übrig als folgende: die Zahlwörter von einander getrennt zu lassen, und ihre gegenseitige Beziehung durch die Stel-

lung der Wörter zu präcisiren. Das war ja das grosse Hülfsmittel der chinesischen Sprache; das konnte und musste man henutzen. Man stellte also z. B. fest die Wortfolge „drei zehn“ solle 30, dagegen die Wortfolge „zehn drei“ solle 13 bedeuten. Wenn man aber so sprach, und wie ich glaube, gezeigt zu haben, so sprechen musste, dann konnte die Schrift sich mit ebenso wenigen Zeichen begnügen wie die Sprache mit Wörtern; dann ergiebt sich, dass die Zeichen ebenso auf einander folgen mussten wie die Wörter, um denselben Sinn auszudrücken, dass also hier die Functionsveränderung von Addition in Multiplication, je nachdem eine Zahl einer anderen nach oder vorgesetzt wird, als eine naturnothwendige erscheint.

Das war in der That auch die Methode, nach welcher die Chinesen von jeher ihre Zahlen schrieben. Sie bedienten sich dabei bestimmter Zeichen [76]) (**Figur 12**) für 1 bis 9, 10, 100, 1000, 10000 und hielten die im Vorigen angegebene Reihenfolge fest. Das mehr nebensächliche Aeussere dieser Reihenfolge ist uns allerdings ebenso fremdartig wie die ganze Sprache. Während nämlich bei uns die Wörter von links nach rechts, die Zeilen von oben nach unten gelesen werden, schreibt und liest der Chinese die Wörter von oben nach unten, die Zeilen von rechts nach links. [77]) Daraus folgt gleichfalls eine Schreibweise und Aussprache der chinesischen Zahlen von oben nach unten, wie sie am besten aus einem Beispiele hervorgeht (**Figur 13**). Ausser den so benutzten Ziffern, welche unter dem Namen der altchinesischen bezeichnet werden sollen, giebt es aber, und das ist höchst merkwürdig, noch andere Gattungen von Ziffern, welche nicht vertikal sondern horizontal und zwar so geschrieben werden, dass die höchste Ordnung am weitesten links steht, also in ähnlicher Weise wie bei den Ziffern der Keilschrift. Ich will dabei zwei Gattungen unterscheiden, die ich die Kaufmannsziffern und die wissenschaftlichen Ziffern nennen will. Die Kaufmannsziffern (**Figur 14**), welche nach der Behauptung des bekannten Sinologen Ed. Biot [78]) nie gedruckt erscheinen, sondern nur im täglichen Gebrauche des Lebens auftreten, haben das Eigenthümliche, dass bei ihnen die multiplicative Ziffer, welche also angiebt, wie viele Zehner, wie viele Hunderter u. s. w. gemeint sind, nur äusserst selten, wie es scheint nur dann wenn keine Einheiten von anderer Ordnung vorkommen, links von dem Zeichen der betreffenden Einheit,

sonst meistens über demselben auftritt. Eine zweite und noch wichtigere Eigenthümlichkeit besteht aber in dem Zeichen der Null, welche auf unserem Untersuchungswege uns hier zuerst begegnet. Die chinesische Kaufmannsschrift benutzt einen Kreis, um anzudeuten, dass Einheiten einer gewissen Ordnung, welche aber selbst nicht weiter angedeutet wird, sondern aus den Nachbarsziffern einleuchtet, nicht vorhanden sind. Sie steht also an der Schwelle der vollständigen Positionsarithmetik, welche die Ordnung niemals besonders angiebt, sondern in der immer nur die Stellung der einzelnen Zahlzeichen ihren höheren oder niedrigeren Werth bedingt, was selbstverständlich möglich ist, sobald die Null zur Ausfüllung fehlender Stellen existirt, nicht aber ohne dieselbe.

Gewichtige Gründe scheinen mir nachzuweisen, dass hier etwas später erst Eingeführtes, nicht ursprünglich Vorhandenes vorliegt. Das geht eben aus der Art hervor, wie die Zahlwörter ausgesprochen wurden. Ich habe gezeigt, dass eine Zahl wie 36 z. B. im Chinesischen durch drei Sylben ausgedrückt werden muss „drei-zehn-sechs“, der Chinese konnte also nicht leicht zu dem Gedanken kommen, bei dem Schreiben dieses Zahlwortes, oder vielmehr dieser Zahlwörter, da ja eine Zusammensetzung nicht vorliegt, den mittlern Theil „zehn“ wegzulassen, wie die Positionsarithmetik es verlangt. Aber recht gut denkbar ist es, dass der neue Styl, welcher überall Partikeln einschob, um den Sinn leichter erkennbar zu machen, hier in der Null auch ein Zeichen benutzt hätte, welches, da die Einheiten höheren Ranges selbst angegeben waren, eigentlich höchst überflüssig war, welches auch gar nicht ausgesprochen wurde, aber doch dazu diente, die Deutlichkeit zu erhöhen. Für diese Auffassung spricht namentlich, dass wenn z. B. 102 geschrieben wurde, nicht etwa 1 . 100 . 0 . 10 . 2 sondern nur 1 . 100 . 0 . 2 das Zeichen war. Denn Null wurde nicht ausgesprochen, ein beigefügtes Zehn hätte ausgesprochen werden müssen. Gleichwohl tritt ein Ausnahmefall ein, den ich vorläufig mit meinen dargelegten Ansichten nicht recht in Einklang zu bringen weiss, den ich mich aber um so mehr verpflichtet fühle hervorzuheben. Wenn nämlich Zahlen wie 120 geschrieben werden sollen, so geschieht das durch 1 . 100 . 2 ohne folgendes 10 und ohne Schlussnull, obschon das 10 sicherlich gesprochen wird. Die 2 ist hier dadurch in ihrem Ordnungswerthe erhöht, dass sie direct auf 1 . 100 folgt.

Die zweite Gattung horizontal geschriebener Ziffern ist die,

welche ich die wissenschaftlichen Ziffern genannt habe. Ich finde sie in der schon angeführten Notiz von Biot und in einem Aufsatze von Biernatzki über die Arithmetik der Chinesen.[19]) Bei dem letzteren Schriftsteller findet sich die Angabe „dass die ersten fünf Ziffern durch eine dem Werthe der Ziffern entsprechende Anzahl von parallelen Strichen dargestellt wurde; wobei es wie es scheint dem Belieben überlassen bleibt, die Striche senkrecht oder horizontal neben einander oder kreuzweis einander gegenüber zu stellen. Die Ziffern von 6 bis 9 werden in ähnlicher Weise so bezeichnet, dass die in ihnen allen enthaltene 5 durch einen horizontalen Strich ausgedrückt wird, an welchen dann die noch zu 5 hinzutretenden Einer in senkrechter Stellung angefügt werden; die Null wird durch die Kreislinie dargestellt. Nachdem man sich auf diese Weise eine einfache, deutliche und sinnentsprechende Bezeichnung der Zahlen geschaffen hatte, drückte man den Werth der Ziffern durch ihre Stellung neben einander aus; und zwar nach dem Decimalsystem; ganz eben wie wir es thun.“ Eine so nachsichtige Beurtheilung die Stilistik dieser Erläuterung erfordert, so wird sie doch einschliesslich der kreuzweis einander gegenüberstehenden Parallelstriche verstanden werden können, wenn man die beigefügten Beispiele zu Hülfe zieht (**Figur 15**). Die Zeichen ferner, welche Biot angiebt, weichen nur unwesentlich von jenen ab (**Figur 16**). So wäre also hier der weitere Schritt zur vollständigen Positionsarithmetik gethan. Es frägt sich nur, wann er erfolgte.

Biot entnimmt seine Zeichen dem Y-kou-yen-touan, einem Buche aus mongolischer Zeit, welches also zwischen dem 7. und 10. Jahrhundert n. Ch. Geburt gedruckt wurde. Biernatzki citirt für seine Beispiele ein Werk des Tsin-kiu-tschaou, der gar erst um 1240 n. Ch. Geb. schrieb. Es ist daher nicht ersichtlich, worauf Biernatzki seine Behauptung stützen will, dass die Positionsarithmetik in China „bereits mehrere Jahrhunderte vorher existirte, ehe man von einer ähnlichen Theorie in Europa eine Ahnuug hatte, und ehe das Ziffersystem der Araber erdacht war.“ Schon der letzte Theil dieses Satzes beweist, dass Biernatzki zu wenig mit der Geschichte der Zahlzeichen vertraut ist, als dass sein nicht weiter motivirter Ausspruch von Gewicht sein könnte; und so glaube ich, dass man sich begnügen muss, mit Biot zu folgern, dass die Chinesen zu mongolischer Zeit den Positionswerth der Zahlen kannten, während ich für die frühere und ganz gewiss für die früheste

Periode meine vorher schon näher dargelegte Meinung festhalte.[80]) Es wird ihr hoffentlich nicht zum Vorwurfe gereichen, dass sie damit übereinstimmt, was Sir John Davis, der Verfasser eines bedeutenden Werkes über China, folgendermaassen ausspricht: [81]) „Die Chinesen schreiben ihre Zahlen in Worten und zwar ganz verschieden von der arabischen Weise zu zählen, bei welcher sich die Zahlen um zehnmal vergrössern, oder verkleinern, je nach der Stellung, welche sie zu einander einnehmen."

Zwei Umstände darf ich freilich nicht mit Stillschweigen übergehen, welche gegen mich zu sprechen scheinen. Erstens das complicirte Zeichen ling (**Figur 12**), welche Abel Remusat in seiner chinesischen Grammatik als dem Nullkreise gleich bedeutende alte Form angiebt. [76]) Ich gestehe, dass ich hierfür keine vollständige Erklärung weiss, muss aber doch Folgendes bemerken. Bei Abhandlung der Grammatik des alten Dialektes, wo die altchinesischen Ziffern zum erstenmal abgedruckt sind, theilt Abel Remusat das Zeichen ling nicht mit, sondern erst in der Grammatik des neuen Dialekts, wo neben den Kaufmannsziffern nochmals die alten Zeichen stehen, erscheint ling als synonim dem Nullkreise. Möglich wäre daher immer, dass ling in frühen Zeiten kein eigentliches Zahlwort war, sondern den Begriff Nichts darstellte Später bedurfte man eines Zeichens, um in Druckwerken in Verbindung mit den übrigen alten Ziffern auch die Null darstellen zu können, und wählte dazu jenes Nichts. Ich gestehe, dass ich diese Hypothese mache, ohne von ihrer Richtigkeit irgend welche Beweise liefern zu können. Ihre Möglichkeit jedoch ist von vorn herein nicht in Abrede zu stellen, und ausser der Lage einen Fachmann zu Rathe zu ziehen, muss ich mich mit dieser Möglichkeit begnügen.

Den zweiten Skrupel, welcher auftauchen kann, veranlasst das sogenannte chinesische Zweiersystem. Durch Betrachtungen zahlentheoretischer, hier nicht weiter zu erörternder Natur war Leibnitz einst zu dem Gedanken einer Binärarithmetik gelangt, d. h. der Rechnung mit einem Zahlensysteme von der Grundzahl 2, welches daher nur der beiden Ziffern 0 und 1 bedurfte, um alle noch so grossen Zahlen darzustellen. Es ist bekannt, dass er an dieser an sich überaus einfachen Erfindung eine ausserordentliche Freude hatte, weil er darin einen symbolischen Beweis der Weltschöpfung erkannte, dass aus Nichts mit Hülfe des Einen (nämlich aus 0 und 1) Alles entstehen könne. [82]) Er setzte sogar darauf die Hoffnung,

kein Mensch werde der Evidenz des Beweises sich verschliessen können, und schickte desshalb seine Erfindung als untrügliches Bekehrungsmittel an Pater Bouvet, einen französischen Jesuiten, der sich als Missionär in Pecking authielt. Dieser glaubte nun in der Anwendung von nur zwei von einander verschiedenen Zeichen den Schlüssel zu den sogenannten Kouas des Fo-hy gefunden zu haben, welche gleichfalls nur aus zwei Elementen bestehen, nämlich aus ganzen und gebrochenen Linien von gewisser Länge. Erstere hielt Bouvet für Einheiten, letztere für Nullen, und theilte es Leibnitz in seiner Rückantwort vom 14. November 1701 mit. Leibnitz selbst berichtete darüber mit wahrem Vaterstolze an die pariser Academie, in deren Memoiren für das Jahr 1703 die Arbeit abgedruckt wurde. [83]) Von da an ist die binäre Arithmetik der Chinesen eine der Geschichte der Mathematik so sichere Thatsache, dass sie von Buch zu Buch sich forterbte, und ich darf mich über diesen Mangel an Kriticismus um so weniger aufhalten, als ich selbst noch in meiner zweiten Abhandlung zur Geschichte der Zahlzeichen keinen Augenblick an der Richtigkeit des von Leibnitz Mitgetheilten zweifelte. [84]) Dann wäre es aber allerdings schlimm um die Ansicht bestellt, welche die Positionsarithmetik der alten Chinesen leugnet. Denn das Schwierigste ist jedenfalls die Erfindung der Null, die, wenn sie einmal vorhanden war, sicherlich im decadischen Systeme genau ebenso wie im binären Systeme benutzt worden wäre, um das Fehlen von Einheiten einer gewissen Ordnung darzustellen.

Zum Glück beseitigt sich dieser Einwurf sehr leicht. Denn was den Mathematikern als längst anerkannte Wahrheit galt, das war den Kennern der chinesischen Sprache fast eben so lange als Irrthum bekannt, und bereits Duhalde hat gezeigt, dass die Kouas eben nur projectivische Zeichnungen der früheren Knotenschnüre sind. [67]) Insbesondere die acht Kouas des Fo-hy, welche Bouvet meinte, sind überhaupt keine Zahlen, sondern haben eine physikalische Bedeutung. Sie heissen der Reihe nach Luft, Regen, Wasser, Berg, Erde, Donner, Feuer, Wind, so dass also, wenn sie um eine Kreisperipherie herum geschrieben werden, die vier Elemente Luft, Wasser, Erde, Feuer an den Endpunkten zweier zu einander senkrechten Durchmesser auftreten, und zwischen je zwei Elementen ein Mittelbegriff sich findet, der an beide erinnert.

Habe ich somit, wie ich glaube, meine Ansichten über die alte Zahlbezeichnung der Chinesen genügend bewiesen und damit

festgestellt, dass sie neun Zeichen für die Zahlen 1 bis 9, dann weitere Zeichen für die höheren Einheiten 10, 100, 1000, 10000 besassen, dass die Null hingegen noch unbekannt war, und somit an eigentliche Positionsarithmetik nicht zu denken ist; habe ich ferner, wie ich gleichfalls glaube, die Vermuthung des chinesischen Ursprungs der angegebenen Zeichen zu einem hohen Grade von Wahrscheinlichkeit erhoben, so ist jetzt die Frage aufzuwerfen, ob denn umgekehrt die Chinesen wohl auf andere Völker Kultureinflüsse vor alter Zeit ausgeübt haben, mit andern Worten ob ein frühzeitiges Zusammentreffen der Chinesen mit westlichen Völkern nachweisbar ist?

Man war eine Zeit lang geneigt, solche Zusammenkünfte der Chinesen mit Völkern des fernen Westens als unbestreitbar gesichert anzunehmen, nachdem Gardner Wilkinson die Spuren davon in Egypten aufgefunden zu haben erklärte: [85]) „Unter den vielen Fläschchen, sagt er nämlich, welche in den Grabstätten von Theben aufgefunden wurden, haben keine Anlass zu grösserem Erstaunen gegeben, als einige von chinesischer Arbeit mit Inschriften in dieser Sprache. Die zufällige Entdeckung eines einzigen derartigen Fläschchens wäre natürlich unbeachtet geblieben. Denn wenn auch dessen Auffindung in einem egyptischen Grabe erstaunlich gewesen wäre, so hätte doch die Vermuthung nahe gelegen, dass ein zufälliger Besucher späterer Zeit es fallen liess, während er nach kostbareren Schätzen der Vergangenheit suchte. Aber diese Erklärung hört auf annehmbar zu sein, wenn wir finden, dass ganz *ähnliche* Gläschen in verschiedenen Gräbern zu Theben entdeckt wurden. Ich selbst habe verschiedene gesehen und zwei davon mit nach England gebracht. Ein drittes ist durch den gelehrten Prof. Rosellini beschrieben, welcher es in einem vorher noch ungeöffneten Grabe zwar ungewissen Datums fand, das aber nach dem Stile seiner Skulpturen einer pharaonischen Periode nicht viel nach der 18. Dynastie angehört haben muss.“ Man sollte sagen, die Gewissheit hätte noch gewisser werden müssen, als Layard davon kaum verschiedene Entdeckungen auf altassyrischem Gebiete machte. Statt dessen drückt sich dieser Forscher in folgender Weise aus: [86]) „In einem an der Südseite des Hügels von Arban eröffneten Laufgraben fand man ein kleines, grün und weisses mit chinesischen Schriftzügen beschriebenes Fläschchen. Ein ähnliches brachte mir nachträglich ein Araber aus einem Grabe in der Nachbarschaft. Solche

Fläschchen sind auch in egyptischen Gräbern entdeckt worden, und über deren Alter und das Datum und den Ort ihrer Einführung nach Egypten herrschen bedeutende Zweifel. Die wahrscheinlichste Meinung ist jetzt die, dass sie verhältnissmässig neuen Ursprunges sind und wahrscheinlich im 8. oder 9. Jahrhunderte erst durch die Araber aus dem fernen Osten hierher gebracht wurden, zu einer Zeit, in welcher ausgedehnte Handelsverbindungen mit jenen Ländern unterhalten wurden. Genau ähnliche Fläschchen werden noch heute in dem Bazar zu Cairo zum Verkaufe angeboten und dienen zur Aufbewahrung des Kohl d. i. eines Pulvers, mit welchem die Damen ihre Augenbrauen färben.“ Ich muss gestehen, dass ich mich durch Layards Behauptung nicht vollständig überzeugt fühle, dass seine Vergleichung der gefundenen Fläschchen mit moderner Waare mir vielmehr kaum von Bedeutung erscheint, nachdem wir wissen, wie Chinesen nicht weniger als Egypter ein überaus stationäres Volk waren, bei welchen es recht gut denkbar ist, dass sie vor 3600 Jahren schon ähnliche Fläschchen wie heute fabricirten, gradeso wie damals schon egyptische Damen und vielleicht auch Herren ihre Haare und Augenbrauen zu färben pflegten. [87]) Wenn indessen die Autorität Layards eine zu bedeutende ist, um so leicht angezweifelt zu werden, so ist ein immerhin noch frühzeitiger Zusammenhang zwischen China und Babylon durch die im vorigen Kapitel angeführten Worte des Jesaias „jene werden kommen vom Lande Sinim“ ausser Zweifel gestellt, da die Identität der Sinim mit den Chinesen gesichert ist. [88]) Von anderer Seite ist der Ausspruch des Kong-fu-tse (den man gewöhnlicher Confuzius zu nennen pflegt) für diesen Verkehr von Bedeutung, dass auch die Reiche des Westens weise Männer besässen. Was hingegen die Verbindung zwischen China und dem südwestlichen Nachbarlande, Indien betrifft, so dürfte dieselbe erst später einen regen Aufschwung genommen haben. Sonst scheint es unerklärlich, dass während die beiden grossen Reformatoren dieser Völker Kong-fu-tse und Buddha ganz gleichzeitig lebten, dieselben keinerlei Berührungsstellen zeigen. [89]) Erst um das Jahr 250 v. Ch. Geb. muss das Eindringen des Buddhismus in China als vollgültiger Beweis intimer Beziehungen der beiden Nationen zu einander betrachtet werden, eine Zeit, die beiläufig bemerkt, wohl nicht bloss zufällig mit der Erbauung der grossen Mauer und der schon früher erwähnten Bücherverbrennung zusammenhängt. Denn Kaiser Tsin-tschi-hoang-

ti[90]) befahl ein Autodafe altchinesischer Schriftwerke, welchem nur wenige entgingen, damit, wie sein Premierminister sich ausdrückte, der Geschmack der Alten nicht über die neueren Einrichtungen ein Verdammungsurtheil sprechen oder gar die Politik des Kaisers tadeln solle. Dies ganze Verfahren sieht doch sehr nach religiöser Intoleranz aus, wiewohl ich die genauere Beweisführung dahingestellt sein lassen muss, sowie auch die Beantwortung der Frage, ob die Einführung des neuen Dialektes gleichfalls im Zusammenhang damit steht? Die chinesisch-babylonischen Beziehungen sind uns indessen für das specielle Gebiet dieser Untersuchungen sicherlich bei weitem wichtiger, und so behalte ich mir vor auf diese noch zurückzukommen. Ich werde alsdann deren frühes Vorhandensein auch noch mit Gründen mathematischer Natur zu belegen haben und verschiebe es daher bis zu dieser Gelegenheit Näheres über dahin zielende weitere Kenntnisse der Chinesen mitzutheilen. Vorläufig sei nur das Eine erwähnt, dass der alte Suanpan der Chinesen als unmittelbar aus ihren Knotenschnüren entstanden gedacht werden kann.

IV. Die Inder.

Gleich zum Anfange dieser Untersuchung muss ich eine Bemerkung vorausschicken, welche geeignet scheint, manche Missverständnisse zu zerstreuen. Das Wort Inder[91]) als geographischer Begriff aufgefasst würde nämlich hier keinerlei Anhaltspunkte gewähren, da in verschiedenen Theilen des grossen Landes, das man mit dem Gesammtnamen Indien zu belegen gewohnt ist, verschiedene Völkerschaften mit verschiedenen Sprachen bei und nacheinander lebten, welche auch in dem Bereiche ihrer Kultur, der uns hier vornehmlich interessirt, in der Schreibweise der Zahlen grosse Abweichungen darbieten. Ausser Stande genügendes Material für die Zahlzeichen aller dieser Stämme zu vereinigen, von denen ich beispielswiese die, wie es scheint, nicht unmerkwürdigen Tamulziffern und Teluguziffern nenne,[92]) begnüge ich mich damit die Ziffern jenes Volkes zu besprechen, welches kann man sagen der historischen Auffassung des Namens der Inder zum Gegenstande dient, jenes Volkes, welches man auch nach der Sprache seiner eigentlichen Literatur das Sanskritvolk genannt hat. Es ist keiner Frage unterworfen, dass das Sanskrit einst Volkssprache eines Stammes war,[93]) welcher vielleicht zwischen dem Jahre 1400 und 1360 v. Ch. Geb. von dem grossen Hauptstamme der Arier sich trennte. Um das 9. Jahrhundert,[94]) bis zu welcher Zeit das Sanskrit sich als herrschende Sprache über ganz Vorderindien bis zur südlichen Grenze des Mahrattenlandes ausgebreitet hatte, begann es auszusterben; Töchtersprachen bildeten sich aus ihm, und es selbst blieb nur in den Priesterschulen der Brahmanenkaste erhalten. Etwa im 3. Jahrhundert v. Ch. Geb. wurde es von dem in Canodsche regenerirten Brahmathume als heilige Sprache in das öffentliche Leben zurückgeführt und gewann immer mehr Boden als Ausdruck aller

höheren geistigen Entfaltung. In diesem Charakter hat es sich auch etwa im 5. Jahrhundert n. Ch. Geb. über ganz Indien verbreitet, und wenn auch, namentlich seit dem Eindringen der Muhammedaner, Druck und in Folge dessen geistige Apathie sich mehr und mehr über Indien lagerten, so blieb das Sanskrit doch noch lange fast das einzige Darstellungsmittel der wissenschaftlichen Literatur, und so giebt es selbst noch heute viele Inder, welche es verstehen und darin schreiben können. Es spielte eben dort nachgrade eine ähnliche Rolle, wie die hebräische Sprache bei den Juden, unter welchen bis zum Anfange dieses Jahrhunderts Niemand auf den Charakter eines Gebildeten Anspruch machen konnte, der jener Sprache nicht mächtig war. Ja die Analogie geht so weit, dass während dem Hebräischen der Name der heiligen Sprache blieb, die Buchstaben der Sanskritschrift heute noch dévanâgarî Götterschrift[95]) heissen. Die hier bezeichnete Beschränkung des Namens der Inder ist grade bei unserem Gegenstande Nichts weniger als neu, indem vielmehr immer nur Inder in dem angegebenen Sinne des Wortes gemeint sind, so oft man von den indischen Ziffern reden hört.

Die directen Quellen, welche für indische Ziffern zu Gebote stehen, sind verhältnissmässig späten Datums. Es sind Inschriften,[96]) die bis etwa in das Jahr 250 vor dem Beginne der modernen Zeitrechnung hinaufreichen, Bücher seit dem Anfange der zweiten Periode der Sanskritsprache, also auch seit dem dritten Jahrhundert v. C. Geb., und besonders speciell mathematische und astronomische Werke aus noch späterer Zeit. Ich erwähne unter diesen als älteste die Schrift des Arya-Bhaṫṫa, des grössten indischen Astronomen. Ueber sein Zeitalter gehen die Ansichten ziemlich weit auseinander. Ich selbst war lange geneigt ihn in ziemlich frühe Zeit zu setzen, wozu mir vor Allem der Umstand maassgebend war, dass Arya-Bhaṫṫa als Urvater indischer Algebra genannt wird und ihm viele Erfindungen z. B. über unbestimmte Gleichungen in einer Weise von den Commentatoren des 7. Jahrhunderts zugeschrieben werden, als könne man ihn nicht lange genug vorher setzen. Lassen[97]) meint Arya-Bhaṫṫa habe kurz vor den Anfängen der Dynastie der Satrapenkönige gelebt, eine Zeit, die etwa um das Jahr 226 n. Ch. Geb. falle. Colebrooke, sicherlich einer der genauesten Kenner indischer Mathematik, wagt es nicht seine

Lebenszeit genau zu fixiren, sondern meint [98]) nur, sie müsse zwischen das Jahr 100 und 500 n. Ch. Geb. fallen. Martin endlich sagt [99]) ganz bestimmt, Ayra-Bhatta sei ein Astronom aus dem Anfange des 5. Jahrhunderts, wofür er an anderer Stelle den Beweis zu liefern verspricht. Ist nun die Autorität Martin's genügend, um schon ein günstiges Vorurtheil für die von ihm ausgesprochene Meinung hervorzurufen, so habe ich doch eine weitere Stelle aufgefunden, nach welcher Arya-Bhatta noch um ein Jahrhundert später zu setzen wäre. Whish behauptet [100]) nämlich die Commentatoren unseres oft genannten Astronomen gäben an, er sei in der Stadt Kousouma geboren als 3600 Jahre des Kalijugam schon verflossen waren. Da aber der Anfang dieser Weltperiode, des Zeitalters der Verderbniss, von den Astronomen in das Jahr 3100 v. Ch. Geb. gesetzt wird, [101]) so kämen wir folglich bis in den Anfang des 6. Jahrhunderts herab. Arya-Bhatta schrieb zwei astronomische Lehrgedichte, wie denn überhaupt die wissenschaftliche Literatur der Inder eine durchweg in poetische Form gekleidete war, ein Umstand der gleich hier hervorgehoben werden kann, und im weiteren Verlaufe dieses Kapitels noch zu Folgerungen benutzt werden wird.

Ein zweiter Mathematiker von hervorragendem Verdienste war Brahmegupta. Auch seine Lebenszeit steht keineswegs fest, wenn auch kein sehr weiter Spielraum angenommen wird. Davis [102]) setzt ihn in das 7. Jahrhundert n. Ch. Geb. Damit stimmt die Angabe eines arabischen Schriftstellers überein. Abul-Ryhan Mohammed aus Byrun stammend und desshalb mit dem Beinamen Albyruny belegt, unter welchem er bei weitem am bekanntesten ist, trieb um 1000 in Kharizm philosophisch-mathematisch-medicinische Studien in Gemeinschaft mit dem berühmten Avicenna und folgte einem von Letzterem ausgeschlagenen Rufe des Sultan Mahmud. Im Jahre 1031 verfasste er eine Schrift über Indien, welche namentlich von Reinaud in seiner grossen Abhandlung über denselben Gegenstand vielfach ausgebeutet wurde. Dort ist nun die Blüthezeit des Brahmegupta auf 664 angegeben. [103]) Auch in Indien selbst besitzt man dieselbe Erinnerung, indem William Hunter [104]) nach der Mittheilung eingeborener Gelehrten das Jahr 628 angiebt. Diesen drei für die Mitte des 7. Jahrhunderts sprechenden Behauptungen steht jedoch eine Berechnung Bentley's [104]) ent-

gegen, nach welchen eine in Brameguptas Werken angegebene Constellation dem Jahre 550 n. Ch. Geb. zukommt. Auch Brahmegupta schrieb ein astronomisches Werk Brahmasiddhanta genannt, dessen 12. und 18. Kapitel sich speciell mit Arithmetik und Algebra beschäftigen, und von Colebrooke besonders übersetzt näher bekannt wurden als die übrigen Theile der in Indien hochberühmten Schrift.

Endlich nenne ich noch Bhascara-Acharya. Dieser ward 1114 geboren,[105]) schrieb in der Mitte des Jahrhunderts sein Hauptwerk Siddhanta-siromaṅi, dessen beide Einleitungskapitel unter dem Titel Lilavati und Vijaganita ebenfalls von Colebrooke übersetzt sind, und starb am Ende des Jahrhunderts in Bidder an der Nordgrenze Hindostans. Jedenfalls kann es also nicht derselbe Schriftsteller Bhascara sein, welcher nach Albyrunys Angabe im Jahre 899 die Schrift Karana-sara verfasste. Es ist nämlich wohl kaum nöthig hervorzuheben, dass Albyruny ja 100 Jahre vor der Geburt unseres Bhascara schrieb, dass also keinerlei Verwechslung von seiner Seite möglich ist. Ebensowenig kann der anderweitigen Bestimmung der Lebenszeit des Verfassers der Lilavati ein Irrthum zu Grunde liegen, da sie auf dessen eigenen Angaben beruht. Er setzt eine seiner Schriften in das Jahr 1072 Saka, eine andere in das Jahr 1105 Saka; der Anfang der Sakaperiode ist aber 78 n. Ch. Geb. Darnach sind also in der That zwei Astronomen Bhascara anzunehmen, und damit tritt wenigstens die Frage auf, ob bei jenen anderen Mathematikern, deren Lebenszeit so wechselnd angegeben wird, etwa auch mehrere Persönlichkeiten in eine verschmolzen wurden?

Sämmtliche hier erwähnte Mathematiker liefern freilich ein für unsere Zwecke nur geringfügiges Material abgesehen von einigen Rückschlüssen, welche sie gestatten. Um so interessanter sind sie in anderer Beziehung, da sie sich mit Untersuchungen beschäftigen, welche in Europa erst viel später bis zu dem gleich hohen Standpunkte fortgeführt wurden. Ich nenne darunter besonders zahlentheoretische Betrachtungen, welche grade in der Lilavati in einer Vollständigkeit vorgetragen werden, wie die Europäer sie erst im 18. Jahrhundert erreichten. Aber, wie gesagt, für die Geschichte der Zahlzeichen findet sich nur Weniges bei ihnen. Mögen vielleicht solche historische Notizen in bis jetzt unzugänglichen Werken noch enthalten sein, wir müssen uns damit begnügen, aus dem

Bekannten zu schöpfen. Da tritt denn zunächst als nicht anzuzweifelnde Thatsache hervor, dass die fast allgemeine Sage den Ursprung der neun Ziffern bei den Indern annimmt.

Massoudi, ein gleichfalls von Reinaud häufig benutzter arabischer Schriftsteller über Indien, welcher 100 Jahre vor Albyruny lebte, erzählt[106]) unter Brahmas, des ersten indischen Königs Regierung habe die Wissenschaft ihre grössten Fortschritte gemacht. Man habe damals in den Tempeln Himmelskugeln abgebildet; die Regeln der Astrologie, des Einflusses der Sterne auf Menschen und Thiere seien festgestellt worden; die vereinigten Gelehrten verfassten den Sindhind, das Buch der Zeit der Zeiten; astronomische Tafeln wurden zusammengestellt, endlich erfand man die neun Zeichen, mit welchen die Inder rechnen. Ganz ähnlich spricht sich ein rabbinischer Commentar zu dem Sepher-Yecira des Abu-Sahl-ben-Tamim aus,[107]) einem Werke welches um 950 wahrscheinlich in der afrikanischen Stadt Cayrovan verfasst ist. Dort heisst es nämlich, die Inder hätten neun Zeichen erfunden, um die Einheiten anzuschreiben. Auch spätere Gewährsmänner stimmen damit übein. Ich möchte nicht grade Leonardo von Pisa als solchen anführen. Denn wenn dieser 1202 die Methode der Inder lobt, so kann zwar damit das Zahlenrechnen gemeint sein, vielleicht aber auch algebraische Methoden. Allein durchaus nicht misszuverstehen ist eine vielfach angeführte Stelle des Maximus Planudes. Dieser Gelehrte kam mit Leo Orphanostrophus als Gesandter des Andronikus Paläologus des Aeltern 1327 nach Venedig, wo er 1353 noch lebte. In seinem Werke über indische Rechenkunst, welches in zwei Manuscripten der Bibliothek San Marco in Venedig aufbewahrt ist, sagt er:[108]) „Weil die Zahl in's Unendliche sich erstreckt, Erkenntniss des Unendlichen aber nicht möglich ist, so haben die wissenschaftlichen Astronomen gewisse Zeichen und eine Methode erfunden, vermittelst deren die nöthigen Zahlen übersichtlicher und genauer erkannt würden. Solcher Zeichen giebt es nur neun, die folgendermassen aussehen.“ Und nun unterbricht sich der Text durch die Ziffern in der Gestalt wie sie zur Zeit des Maximus Planudes etwa gebräuchlich waren (**Figur 17**). Solcher Zeugnisse werden mancherlei angeführt, und ich stimme vollständig der Meinung bei, dass ihr Gewicht nicht zu unterschätzen ist, wenn sie wiewohl aus später Zeit doch grösstentheils von Männern her-

rühren, die Indien aus eigener Anschauung, oder wenigstens durch unmittelbare Uebertragung kannten. Nur möchte ich jetzt schon erklären, dass ich dasselbe Zugeständniss auch für andere Zeugnisse verlange, welche andere Männer in Bezug auf andere Dinge ablegten, welchen sie ebenso nahe standen, wie die hier angeführten Gelehrten dem indischen Alterthume. Es ist dieses ein so gerechtes Verlangen, dass es überflüssig erschiene es auszusprechen, wenn mich nicht die Erfahrung belehrt hätte, wie oft es unerfüllt bleibt. Ich gebe also zu, dass nach den erwähnten Volksüberlieferungen in Indien die Erfindung von neun Zahlzeichen für die Zahlen 1 bis 9 daheim ist. Wann aber die Erfindung gemacht wurde, darüber lassen uns jene Ueberlieferungen im Zweifel, da der sagenhafte König Brahma unmöglich als Zeitangabe gelten kann.

Bedeutsam dagegen für die nähere Untersuchung des Alters der indischen Ziffern ist eine Entdeckung, welche Rask der bekannte dänische Sprachforscher machte, und welche Brockhaus in dem sogleich zu entwickelnden Sinne bereits ausgebeutet hat.[109]) Rask beabsichtigte nämlich, eine sprachvergleichende Abhandlung über südindische Dialekte herauszugeben, und studirte zu diesem Zwecke während seines Aufenthaltes in Madras unter anderem die Sprache der Cingalesen. Die Resultate dieser Untersuchung legte er vorläufig 1821 in einem einzelnen Bogen nieder, der in dänischer Sprache als Singalesik Skriftläre erschien, und auf einigen Seiten von den jetzt auf der Insel Ceylon gebräuchlichen Zahlzeichen handelt. Darnach giebt es dort eine doppelte Schreibart. Das Volk rechnet allgemein mit europäischen Ziffern, welche sich vollständig eingebürgert haben. Gelehrte hingegen kennen eine alte Methode, nach der neun Zeichen für die Einer, neun Zeichen für die Zehner, ein Zeichen für Hundert und eines für Tausend existirt. Die Schreibart mit diesen Zeichen ist so, dass die kleinere Zahl nach der grösseren gesetzt wird, und dass die verschiedenen Hunderte und Tausende dadurch ausgedrückt werden, dass man die betreffende Einheitsziffer vorsetzt. So bedarf man also im Ganzen 20 Zeichen um die Zahlen 1 bis 9999 schreiben zu können, und die Darstellung von 1863 z. B. erfordert die Anwendung von sechs solchen Zeichen, nämlich 1 . 1000 . 8 . 100 . 60 . 3. Ja einige der allergelehrtesten Einwohner sollen sogar 36 Zahlzeichen kennen, indem auch die einzelnen Hunderte und die einzelnen Tausende je einem besonderen Zeichen entsprechen. Diese können dann leicht

begreiflich 1863 mit nur vier Zeichen schreiben als 1000 . 800 . 60 . 3. Diese Schreibart weicht nun freilich gar sehr von der Methode ab, welche man von den Indern herzuleiten pflegt, und so kann es wohl für's Erste Staunen erregen, dass ich die Entdeckungen Rasks wichtig für die Untersuchung des Alters der indischen Zeichen nannte. Aber dem ist so in der That. Man kann sich der Vermuthung, ja fast der Gewissheit nicht verschliessen, dass die alt-ceylonsche Gewohnheit eigentlich eine altindische ist. Ich werde noch im Laufe dieses Kapitels den vollständigen Beweis dafür liefern. Einstweilen mögen als Wahrscheinlichkeitsgründe angeführt werden, dass Ceylon im 5. Jahrhundert v. Ch. Geb. seine ganze Kultur von Indien her empfing, [110]) also wohl auch die Kunst Zahlen zu schreiben, und dann dass nach Brockhaus [111]) jene von Rask bekannt gemachten Zahlzeichen einen ganz ähnlichen Charakter besitzen, wie die ältesten bekannten Sanskritziffern, dass sie auch abgekürzte Zahlwörter sind. Hiermit komme ich zu einem Gegenstande, den Prinsep in einem berühmt gewordenen Aufsatze in der bengalischen Zeitschrift zuerst anregte, [112]) und der zur leichteren Beurtheilung jetzt vorliegt, nachdem die zerstreuten Arbeiten des englischen Gelehrten von seinem Landsmann Thomas gesammelt herausgegeben sind.

Darüber herrschte nämlich grosse Unklarheit, wie man sich die Entstehung der indischen Zahlzeichen zu denken habe unter der Voraussetzung, dass sie an Ort und Stelle erfunden wurden. Denn dass man solche eigenthümliche Zeichen bei einem Volke, welches noch dazu die Buchstabenschrift besass, also jedes beliebige Wort schreiben konnte, ersann ohne dabei von einem ganz bestimmten Gedanken geleitet zu sein; dass man übereingekommen sein soll, so wollen wir die 5, so die 7, die 9 malen, ohne dass dieser Uebereinkunft ein Anhalt zu Grunde gelegen hätte, das ist doch überaus unwahrscheinlich. Die dunkle Ahnung dieser Schwierigkeit und das Unvermögen, sie zu lösen, haben denn auch zu den abenteuerlichsten Phantasien geführt. So hat ein vor wenig Jahren verstorbener Mathematiker die Striche gezählt, welche zur Bildung unserer modernen Ziffern etwa erforderlich wären (**Figur 18**) und daraus ihre Gestalt hergeleitet. Ja er setzt hinzu: „Diese Einfachheit der Zahlzeichen, sowie ihre Uebereinstimmung mit der Sprache lassen keinen Zweifel übrig, dass wir unsere Ziffern 1, 2, 3... als die eigenthümlichen Zahlzeichen der alten germanischen Völker zu be-

trachten und nicht nöthig haben, den Ursprung derselben mit vieler erfolglosen Mühe bei den orientalischen Völkern zu suchen.[113])" Als ob im germanischen Alterthume die Zahlzeichen auch schon so aussahen, wie er sie hinmalt! Mit einer ihm zur Ehre gereichenden Selbstüberwindung hat dagegen Piccard einen ähnlichen Irrthum vermieden.[114]) Dieser fleissige Forscher erklärt in einer Abhandlung, welche er der naturhistorischen Gesellschaft des Waadtlandes vorlegte, er habe die Untersuchung mit der vorgefassten Ueberzeugung begonnen, dass die Gestalt unserer Zahlzeichen das Resultat einer geistreichen Combination sein dürfte, vermöge deren man ursprünglich so viele grade Striche vereinigte, als die Ziffer auszudrücken bestimmt war. Es gelingt ihm wirklich ziemliches Material aufzufinden, um die Zwischenformen zwischen jenen gradlinigen Zeichen und der jetzigen Gestalt als existirend nachzuweisen (**Figur 19**), und doch kommt er zu dem Schlusse, dass dieses Zutreffen ein bloss zufälliges sei, dass vor Allem die Ziffern 5, 7, 9 keine Entstehung aus ebenso vielen graden Strichen zulassen. Die positiven Behauptungen, welche neben diesem negativen Geständnisse in der interessanten Abhandlung enthalten sind, werden noch bei künftiger Gelegenheit unsere Aufmerksamkeit auf sich ziehen. Ein nach Befriedigung suchendes Erklärungsbedürfniss spukt wohl gleichfalls in der Aeusserung, die indischen Ziffern seien von den Brahmanen aus der Figur eines von zwei Durchmessern durchschnittenen Kreises gebildet worden. So berichtet wenigstens Ali Aben-Ragel,[115]) ein arabischer Astrologe aus dem Anfange des elften Jahrhunderts, und ebendieselbe Stelle meint wohl ein wenigstens an barocken Gedanken nicht armer Schriftsteller[116]) der letzten Jahre, wenn er die weitverbreitete Annahme mittheilt, die Zahlzeichen seien einem mit seinen Diagonalen versehenen Quadrate entnommen, dadurch dass diese oder jene Linien wegblieben. Aber auch diese Hypothese kann neben ihrem viel zu künstlichen Gehalte schon desshalb nicht als richtig anerkannt werden, weil sie zwar zur Noth auf die arabischen Ziffern des Aben-Ragel sich anwenden liesse, aber keinenfalls auf die indischen Ziffern, wie wir sie von den verschiedensten Perioden her kennen. Ich möchte nämlich hier schon dem so gewöhnlichen Irrthume begegnen, als ob arabische und indische Zahlzeichen durchaus einerlei wären, als ob daher daran nicht zu rütteln sei, dass die Araber ihre sämmtlichen Ziffern von Indien her übernahmen. Diese Annahme fällt

vielmehr bei der blossen Vergleichung der Zeichen, welche bei jenen Völkern in Gebrauch waren.

Aprioristische Constructionen führten somit nicht zu einer befriedigenden Erklärung der Zahlzeichen, wie sie heutigen Tages noch in Indien gebildet werden (**Figur 21**) und wie sie mit geringen Abweichungen auf den Münzen der Provinzen Nepaul und Assan vorkommend von Piccard veröffentlicht wurden (**Figur 22**). Kaum befriedigender ist die Vermuthung Seiffarth's,[117]) die Inder hätten ursprünglich die Buchstaben ihres Alphabetes als Zahlzeichen benutzt, so dass der erste Buchstabe als 1, der zweite als 2, der neunte als 9 galt. Er sucht seine Hypothese zwar durch die Uebereinstimmung der Zahlzeichen mit diesen ihres gemeinsamen Horizontalstriches entkleideten Buchstaben zu erhärten, allein die Aehnlichkeiten, welche dabei auftreten, sind weit entfernt, so sprechend zu sein, wie sie Seiffarth erscheinen, und zudem sieht er sich genöthigt, eine Reihenfolge des Alphabets anzunehmen, welche im Sanskrit durch Nichts sonst im mindesten wahrscheinlich gemacht wird. Es wird zur Verständniss dieses Einwurfes wohl besser sein, hier eine Auseinandersetzung über das Alphabet des Sanskrit einzuschalten, welche ohnedies zu dem weiter in diesem Kapitel vorzutragenden Stoffe unentbehrlich ist.

Die Sanskritgrammatik, wie sie von den gelehrten Brahmanen seit vielen Jahrhunderten, vielleicht seit zwei Jahrtausenden festgestellt ist, kennt eine Reihenfolge der Buchstaben, welche an Zahl und Ordnung von denen der europäischen Sprachen sich weit unterscheidet. Zunächst existiren 25 Consonanten in fünf Abtheilungen, deren jede als eine Varga bezeichnet zu werden pflegt. Es sind das die Kehllaute, die Gaumenlaute, die Zungenlaute, die Zahnlaute und die Lippenlaute. Jede Varga besteht wie schon angedeutet aus fünf Buchstaben, dem harten und dem weichen jeden von beiden ohne und mit Aspiration sich unmittelbar folgend und dem Nasenlaut. Die Aussprache der vier ersteren Laute jeder Varga lässt sich ziemlich durch lateinische Buchstaben unterscheiden, wiewohl auch bei ihnen durch die einzelnen Vargas hindurch Nuancirungen auftreten, welche so feiner Natur sind, dass der Europäer sie nicht nachzubilden vermag, und den sein sollenden Unterschied dadurch in lateinischer Schrift bezeichnet, dass er einen und denselben Buchstaben mit oder ohne Accent oder Punkt zu schreiben pflegt. Bei den Nasenlauten vollends ist diese Bezeichnungsweise unumgänglich

da der Nasenlaut der vier ersten Vargas mehr oder weniger wie n klingt und nur der nasale Lippenbuchstabe sich als m scharf davon unterscheidet. So heisst also die Varga der Kehllaute in lateinische Schrift umgesetzt: k, kh, g, gh, ṅ. Die zweite Varga oder die der Gaumenlaute heisst: tch, tchh, dch, dchh, ñ. Aehnlich sind die dritte und vierte Varga beschaffen, die fünfte der Lippenlaute heisst: p, ph, b, bh, m. Nach diesen 25 eigentlichen Consonanten kommen 4 Halbvokale: j, r, l, w. Als 30. bis 32. Buchstabe figuriren 3 Zischlaute: das Gaumen-S (ś), das Zungen-S (sch) und das Zahn-S (s) und schliesslich erscheint als 33. Buchstabe das h. Die Vokale bilden nebst den Diphthongen eine Abtheilung für sich, und werden gewöhnlich vor den 33 erwähnten Buchstaben aufgezählt. Die Vokale sind 10 an der Zahl oder eigentlich 5, deren jeder kurz und lang ausgesprochen vorkommt, und von welchen zwei Paare mit unserem europäischen Begriffe von Vokalen eigenthümlich contrastiren. Die 5 Paar Vokale sind nämlich ă, ā, ĭ, ī, ŭ, ū, rĭ, rī, lrĭ, lrī. Diphtonge werden dagegen nur 4 unterschieden e, ai, o, au, indem e und o als Verbindung des kurzen a mit dem i und u Laut aufgefasst werden; ai und au als Verbindung des langen a mit denselben. Somit kennt also die Grammatik 47 Laute, streng genommen sogar 48, indem man noch ein consonantisches lr annimmt, das jedoch bisher nur an einigen wenigen Beispielen aufgefunden wurde und uns hier nicht interessirt.

Was nun die schriftliche Darstellung dieser Laute betrifft, so ist ein wesentlicher Theil eines jeden Sanskritbuchstaben ein Horizontalstrich, welcher denselben nach oben abschliesst, und wohl in der Regel im Voraus durch die ganze Zeile durchgezogen wurde, gleichsam als Hülfsmittel zum graden Schreiben, wie wir den Anfängern ja auch das Blatt liniiren, freilich ohne dass diese Linien einen integrirenden Bestandtheil der Schrift zu bilden bestimmt wären. Dass bei einem solchen Durchziehen des Horizontalstriches die einzelnen Wörter kaum von einander durch das Auge zu trennen sind, ist eine der Schwierigkeiten, welche dem Neuling beim Studium des Sanskrit entgegentreten, und sie wird dadurch noch bedeutend erhöht, dass die einzelnen Wörter überdies zusammengezogen geschrieben werden, um Zeichen zu ersparen. Diese Ersparniss bezieht sich auf die Schreibweise der Vokale. Das Sanskrit hat zwar eigenthümliche Zeichen für jeden der 47 Laute, benutzt aber die Vokalzeichen nur, wenn sie für sich allein eine Silbe

ausmachen sollen, also in der Regel nur am Anfange eines Wortes oder gar einer Zeile. Folgt hingegen der Vokal auf einen Consonanten, so wird er durch kleinere Nebenzeichen ausgedrückt, welche über oder unter dem Consonanten angebracht werden, etwa wie in den semitischen Sprachen. Das kurze a bedarf dabei keines Zeichens, indem es ein für allemal inhärirt, d. h. indem jeder der 33 Buchstaben von k bis h, wenn kein anderer Vokal ihm folgt, als mit kurzem a behaftet ausgesprochen wird. Stehen nun zwischen zwei Vokalen, die einem oder auch zwei Wörtern angehören, mehrere Consonanten, so werden diese in zusammengesetzter Form geschrieben, indem Theile eines jeden einzelnen Consonanten zu einem oft sehr fremdartig aussehenden Buchstaben combinirt werden. Aber auch damit reicht man augenscheinlich noch nicht aus, denn es kann ja vorkommen, dass ein Satz mit einem Consonanten schliesst, oder dass ein ebenso schliessendes Wort besonders hervorgehoben werden soll. Dazu dient dann das Virama, Ruhezeichen, ein kleiner den Consonanten unten angehängter Strich, welcher in seiner Lage genau dem Worttheiler der Keilschrift entspricht.[118]) Wo nun dieses Ruhezeichen sich findet, schliesst man mit dem Consonanten allein ab, ohne das sonst wie gesagt ihm inhärirende ă nachklingen zu lassen. Ein Beispiel kann allein Klarheit über diese ziemlich complicirte Schreibweise verbreiten. Ich will dazu lateinischer Charaktere mich bedienen, die Vokale sofern sie als Nebenzeichen auftreten etwas kleiner über der *Hauptlinie* schreiben, und zusammengesetzte Buchstaben dadurch andeuten, dass ich sie unter einander stelle. Dann heisst:

	i	ie	ei	ie	aeh	e			
I	c	l	ṣ	s	l	l	n	=	Ich will dies Beispiel
	h	l	b	p	w		(virama)		wählen.
	w	d							

Ich kehre jetzt zu Seyffarth's Vermuthung über die Entstehung der indischen Zahlzeichen zurück. Dass er den bewussten gemeinsamen Horizontalstrich verbannte, bevor er die Gestaltvergleichung zwischen Buchstabe und Zahlzeichen vornimmt, ist dem der Sanskritschrift zu Grunde liegenden Gedanken gewiss nicht zuwider. Aber die Reihenfolge seiner Buchstaben ist eine ganz ungewohnte, dem Abudjed der Araber annähernd nachgebildete. Zum ersten Buchstaben wählt Seyffarth den Vokal a, zum zweiten das bh (24. Consonant), zum dritten das k (1. Consonant), zum vierten das th (17. Consonant), zum fünften den Diphthongen e, zum sechsten

den langen Vokal u u. s. w. Welchen Zwang aber man nach dieser schon unmotivirten Umstellung des Alphabets noch den Formen anthun muss, zeigt der blosse Augenschein der Seyffarth'schen Figuren so sehr, dass ich eine Wiederholung derselben für überflüssig hielt.

So unglücklich dieser Erklärungsversuch ausfiel, so liegt doch eine Wahrheit in demselben verborgen. Die Zahlzeichen des Sanskrit sind in der That von Buchstaben abzuleiten, und zwar sind sie, wie schon Prinsep in der früher erwähnten Abhandlung[112]) nachzuweisen sich bestrebte, Nichts anderes als die **Anfangsbuchstaben der betreffenden Zahlwörter**. So heisst 1 eka und das Zeichen 1 ist dem e entsprechend; das Zeichen 2 stammt von d aus dwi, das 3 aus dem zusammengesetzten Buchstaben tr wegen tri. Die weiteren Zusammenhänge sind 4 mit tscha (tschatur), 5 mit pa (pantscha), 6 mit scha (schasch), 7 mit sa (saptan), 8 mit a (aschtan), 9 mit na (navan). Manche dieser Uebereinstimmungen (**Figur 23**) sind augenfällig genug, andere wieder weniger. Ueberaus affallend war mir wenigstens, dass einige der modernen Devanagari-Ziffern, besonders die 2, 3, 4 und 9 den alten Buchstaben noch ähnlicher sehen, als selbst die alten Ziffern.

Thomas, der Herausgeber der Prinsep'schen Aufsätze ist im Allgemeinen mit den Ansichten seines Freundes einverstanden, geht jedoch noch weiter. Er fand auf alten Münzen nicht nur jene Zeichen, welche Prinsep bereits erklärt hatte, sondern auch Zeichen für die Zehner und Hunderte, wodurch die Aehnlichkeit der Methoden, welche Rask auf Ceylon fand, mit den altindischen in ein helleres Licht versetzt wird. Endlich wird aber deren Identität ganz unzweifelhaft durch die Entdeckungen von Stevenson, dessen dahin schlagenden Arbeiten gleichfalls von Thomas mitgetheilt werden. Stevenson will das aus sahasra (tausend) abgekürzte Zeichen eines umgekehrten s für die Zahl 1000 gefunden haben, welches mit multiplicativen Einheiten verbunden genau den cingalesischen Gebrauch wiederholt. Fassen wir also diese Angaben, an deren Genauigkeit zu zweifeln kein Grund vorliegt, zusammen, so erhalten wir das Resultat, dass das Sanskritvolk jedenfalls im 5. Jahrhundert v. Ch. Geb., also um so mehr zur Zeit der persischen Achämenidenkönige, wahrscheinlich aber noch viele Jahrhunderte später, sofern sie zum Schreiben der Zahlen sich wirklicher Zeichen bedienten, dazu die Anfangsbuchstaben der Zahlwörter wählten, welche

als Abkürzung benutzt wurden, und sofern mehrere Zahlwörter mit demselben Buchstaben anfingen, auch wohl umgekehrt oder sonst verändert wurden. Die Zahlen wurden dabei theils additiv theils multiplicativ gebraucht, wie es auch bei den übrigen bisher betrachteten Völkern sich ergeben hatte. Einen eigentlichen Stellungswerth aus jener Zeit nachweisen zu wollen wäre vergebliche Mühe, da die Existenz einer Null jedenfalls höchst unwahrscheinlich ist. Die hier in reichster Uebung vorhandene Benutzung des Anfangsbuchstaben eines Zahlwortes zur Bezeichnung desselben ist uns nicht mehr fremdartig, seit wir wenigstens Spuren davon bei Egyptern und Babyloniern auffanden, andere Spuren werden bei den Römern noch auftreten. Das Sanskritvolk behielt eine solche Abkürzungsgewohnheit auch sonst in mathematischen Schriften bei. So werden z. B. die unbekannten Grössen der Algebra, die x, y, z u. s. w. der modernen Mathematiker im Sanskrit als die schwarze, blaue, gelbe, grüne, rothe Grösse benannt, und dann jedesmal durch den Anfangsbuchstaben der betreffenden Farbe bezeichnet.

Die alte Methode mit multiplicativer Schreibart und ohne Stellungswerth ist noch sehr lange in Uebung geblieben, nachdem die eigentliche Positionsarithmetik, von der ich nachher zu sprechen habe, schon erfunden war. Sie ist dem Principe nach noch in der Methode des Arya-Bhaṫṫa vorhanden, welche Lassen wenigstens diesem Astronomen zuschreibt und in folgender Weise erläutert:[95]) „Die Methode besteht darin, den Consonanten des Alphabets nach ihrer Folge einen Zahlenwerth beizulegen, k ist 1, kh 2, g 3 u. s. w. die fünf Vargas hindurch, m gilt 25. Die Halbvokale und Zischlaute bedeuten die folgenden Zehner j 30, r 40 u. s. w. h 100. Die angegebenen Werthe gelten, wenn der Consonant mit a (kurz oder lang) gesprochen wird; jeder folgende Vokal des Alphabets, bei welchem gleichfalls auf Kürze und Länge keine Rücksicht genommen wird, und dann noch die vier Diphthongen multipliciren den vorhergehenden Werth mit 100. So ist also ki = 100, ku = 10000, e fügt 10, au 16 Nullen hinzu. Zwei verbundene Consonanten sind anzusehen als mit demselben Vokale begabt, und der Werth beider ist zu addiren; gli ist also z. B. aufzulösen in gi und li, 300 und 5000, ist also 5300.“ Offenbar spielen die Vokale hier dieselbe Rolle, welche früher den Zeichen für 100, für 1000 und vielleicht noch höheren Einheiten zugewiesen war, und

von denen es sehr viele geben konnte, da wie Colebrooke mittheilt[119]) besondere Namen bis für die 1 mit 17 Nullen vorhanden sind, vielleicht sogar noch mehrere. Ich möchte hierbei noch darauf aufmerksam machen, dass nach der Methode des Arya-Bhaṫṫa hau d. i. 1 mit 18 Nullen die höchste einer Bezeichnung fähigen Einheit war, und dass dieselbe Zahl im Chinesischen als höchste erschien, für welche noch ein besonderer Name vorkam.[70])

In der That kommen bei beiden Völkern, bei Indern wie bei Chinesen, so grosse Zahlen vor, wie nur eine buddhistische Phantasie sie erzeugen kann, und zu deren Benennung nicht einmal die eben angeführten Einheiten ausreichen, so schwindelnd deren Höhe uns auch schon erscheinen mag. Ich will als Beispiel eine Stelle aus einem freilich späten chinesischen Schriftsteller hier einschalten, welche Abel Remusat zur Mittheilung vorbereitet hatte,[120]) als der Tod ihn überraschte, und welche nach meiner Auffassung folgendermaassen heisst: „Buddha setzt auseinander, dass es drei Numerationssysteme giebt. Das erste oder niedere System lässt die Einheiten um 10faches wachsen, also 10, 100, 1000, 10000 u. s. w. Das zweite oder mittlere System lässt die Einheiten um 100faches wachsen, wie wenn man 100000 mit 100 vervielfacht, um 10 Millionen zu erhalten. Endlich das dritte oder grosse System schreitet nach der mit sich selbst vervielfachten Grundzahl fort und bildet die sogenannte Methode der 10 grossen Zahlen, welche Buddha allein begreifen konnte, und welche eine Idee erwecken sollen von dem was ist, von der unerschöpflichen unbegränzten Natur, von den reinen Verdiensten der Weisen, von den Zeiträumen der Existenzen, welche das Schicksal der veränderten Geister durchläuft, von dem Ocean der Wünsche, welche für das Glück der lebenden Wesen gebildet werden, und von der Verkettung der Gesetze, welche die unendliche Entwicklung der Welten bilden. Der Ausgangspunkt dafür oder die erste der grossen Zahlen ist asankhya, oder die Eins mit 17 Nullen:[121]) mit sich selbst vervielfacht giebt diese Zahl die zweite Potenz von asankhya oder 1 mit 34 Nullen und durch wiederholte Multiplikation dieser Zahl mit sich selbst gelangt man zur zweiten der 10 grossen Zahlen, zur 1 mit 68 Nullen. Dieselbe zweimalige Operation wird auch an der neuen Grundzahl vorgenommen, dann an allen folgenden bis zur 10., welche unsäglich heisst, und ihren Ausdruck in der 1 mit 4456448 Nullen fände. In gewöhnlicher Druckschrift würde diese Zahl etwa eine Zeile von

44000 Fuss Länge einnehmen. Und doch wird selbst diese Zahl noch von einer anderen übertroffen, welche in der mythologischen Kosmographie ihre Anwendung findet, und deren Werth gar nicht anzugeben ist. Ihr Name deutet die Zahl der Atome an, aus denen der göttliche Berg Su Meru besteht.“ So weit die Notizen Abel Remusat's. Ob dieses Zusammentreffen mit dem Gedanken der archimedischen Sandrechnung mehr als blosser Zufall ist?

Ich komme nun zur Besprechung der Positionsarithmetik, also der Numerationsmethode, deren wir uns heute bedienen, der Methode welche den erhöhten Werth einzelner Ziffern durch ihre blosse Stellung andeutet, und welche dazu der Null sich bedienen muss, deren eigentliche Bestimmung es ist, die fehlenden Stellen auszufüllen. Die Inder kannten die Null zuverlässiger Weise spätestens um das Jahr 600 n. Ch. G. Die mathematischen Schriften des Brahmegupta liefern dafür den unumstösslichen Beweis. Wie die ziemlich häufig vorkommenden kleineren und grösseren Zahlen im Originale geschrieben sind, kann ich freilich nicht aus eigener Anschauung angeben, da ich mich nur der Uebersetzung bediente, aber ein besonderer Paragraph handelt ausdrücklich von dem Rechnen mit der Null, [122]) was ohne deren Vorhandensein unmöglich wäre. Die Frage aber bleibt vorläufig noch eine offene, wo und wann die Null erfunden wurde. Es ist wohl richtig, was Brockhaus sagt, [109]) dass wenn irgend eine Erfindung ächt indischen Charakter trägt, es der Gedanke ist, dem *Nichts* einen Werth zu geben und durch das Nichtssein erst die Vollendung des Etwas zu bewirken. Aber andrerseits habe ich die Möglichkeit zu zeigen gesucht, wie die Null bei den Chinesen doch wenigstens entstehen konnte. Für die Erfindung der Null auf indischem Boden spricht einer der schon früher in Bezug auf die Erfindung der Ziffern angeführten Schriftsteller. Maximus Planudes setzt nämlich dem oben schon Angegebenen noch hinzu: [108]) „Auch schreiben sie noch ein anderes Zeichen, welches sie tsiphra nennen, d. h. auf indisch Nichts. Sowohl die neun Zeichen als die tsiphra ist indisch; letztere wird folgendermaassen geschrieben 0.“ Was hier über das Wort tsiphra gesagt ist, ist allerdings unrichtig; trotzdem bleibt die Stelle interessant, schon weil sie augenscheinlich zwischen der Erfindung der neun Zeichen und der Null einen Unterschied macht. Gleichfalls für den indischen Ursprung der Null spricht das sogenannte Scholion des Mönches Neophytus, welches

eigentlich hierher gehört, aber aus anderen Gründen in dem Kapitel erst erörtert werden soll, das mit den Arabern sich beschäftigt. Der Zweifel über die Entstehungszeit der Null lässt sich vorläufig noch weniger lösen. Möglicher Weise hat Stevenson Recht, wenn er sie sehr spät annimmt. [123]) Dann würden unter der Voraussetzung, dass die Chinesen die Null von den Indern übernommen hätten, etwa jene Reisen als Brücke gedient haben, welche seit 222 n. Ch. Geb. als Gesandtschaftsreisen zwischen beiden Ländern hin und her gingen, und unter welchen die des Fa-hian 399—414 am berühmtesten geworden ist. [124])

Jedenfalls war die Null schon vorhanden, als man eine in astronomischen Werken mitunter gebräuchliche Bezeichnungsweise der Zahlen ersann, deren Erläuterung ich Lassen [96]) entnehme. „Sie soll den Mathematikern des südlichen Indiens angehören und ist dort seit langer Zeit zu Hause, wenn sie auch schon zur Zeit des Vikramaditja [125]) noch nicht erfunden war, wie behauptet wird. Ein Erfinder wird nicht angegeben.“ Die einzelnen Ziffern werden bei dieser Methode durch Buchstaben ausgedrückt, und zwar jede einzelne nach Belieben durch verschiedene Buchstaben. Die Ziffern 1 bis 9 entsprechen nämlich der Reihe nach erstens den 9 ersten Consonanten, also der Varga der Kehllaute und den vier ersten Gaumenlauten; zweitens dem 11. bis 19. Consonanten, also der Varga der Zungenlaute und den vier ersten Zahnlauten; drittens den vier Halbvokalen, drei Zischlauten, dem h und dem südindischen lr. Die Varga der Lippenlaute bedeutet die Ziffern 1 bis 5. Endlich die noch übrigen Buchstaben, nämlich der Nasenton der Gaumenlaute und der Zahnlaute sowie alle initialen Vokale und Diphthongen sind Nullen. Vokale hingegen, welche durch Nebenzeichen geschrieben sind oder inhäriren, sind bedeutungslos, ebenso wie bei zusammengesetzten Consonanten die zuerst auszusprechenden nicht in Betracht kommen, und nur der letzte Geltung hat. Die so geschriebenen Zahlen werden alsdann nach den Regeln der Positionsarithmetik gelesen, wie die Existenz der Null es ermöglicht. Durch die reiche Combinationsfähigkeit der Methode, welcher für jede Zahl drei oder vier Buchstaben zu Gebote stehen, welche inlautende Vokale und vokallose Consonanten in beliebiger Anzahl und Art einschieben kann, ist man im Stande solche Silben zu wählen, die ausser ihrem Zahlenwerthe noch einen anderen Sinn haben, wenn man sie nach den

Regeln der Sprache in Worte abtheilt. Es ist daher eine wahre Mnemotechnik in dieser Methode vorhanden neben dem zweiten Vortheile, dass sie gestattet, die Zahlen in Wörter von bestimmtem prosodischem Gehalte zu kleiden, was bei Benutzung der eigentlichen Zahlwörter sehr schwer fallen dürfte, und doch, wie wir sahen, unumgänglich ist, weil die wissenschaftlichen Werke in Versen abgefasst sind.

Freilich noch geeigneter zu solcher Benutzung in Versen erscheint eine letzte, hier noch zu erwähnende Methode der Numeration, welche etwa als symbolische Positionsarithmetik definirt werden kann. Sie findet sich nicht blos bei den Indern und in Tibet, sondern kommt auch bei den Eingeborenen der Insel Java vor. [126]) Man benutzt bei dieser Methode für die Einer und auch für manche zweiziffrige Zahlen gewisse symbolische Wörter, welche alsdann auch mit Positionswerth zusammengesetzt werden, und dabei merkwürdiger Weise die sonst allgemeine Schreibart der Zahlen mit Stellenwerth von der niedersten Stelle rechts zur höchsten links in die entgegengesetzte umwandeln. So heisst z. B. 25 tattwa Essenz, weil der Inder fünf fünffache Elemente annimmt; aswin, die beiden Söhne des Sourya bedeuten 2; das zusammengesetzte tattwaswino heisst nicht etwa 252 sondern 225. Anka (die Ziffer) bedeutet 9, abdhi (der Ocean, deren es vier giebt) und krita (die erste der vier Weltperioden) bedeuten beide 4; das zusammengesetzte ankabdhikrita ist 449. Sourya, die Sonne mit ihren *zwölf* Wohnungen stellt die Zahl 12 dar, manou die Zahl 14 nach den ebensovielen Menous der indischen Mythologie; souryamanou wird daher offenbar 1412 sein. [127]) Diese Schreibweise lässt ein noch leichteres Einfügen der Zahlen in das Versmaass zu, als die vorher auseinandergesetzten, und scheint auch am häufigsten von den Astronomen benutzt worden zu sein. [128]) Beim Rechnen freilich müssen die Inder wohl die Ziffern angewandt haben, ohne welche keine irgend grössere Operation vollbracht werden kann, wenn nicht eine ganz unverhältnissmässige Zeit darauf verwandt werden soll.

V. Das Leben des Pythagoras.

In den bisherigen Kapiteln wurde gezeigt, dass bei den Völkerschaften des grauesten Alterthums Spuren von Kunst und Wissenschaft sich deutlich zeigen, die man als viel jüngeren Ursprungs anzunehmen gewohnt war, dass andererseits manche Erfindungen als durchaus nicht so einheitlich und plötzlich entstanden sich zeigen, wie man noch heute glaubt. Namentlich die Mathematik, in ihrer theoretischen Gestalt nicht minder als in ihren Anwendungen, tritt an den verschiedensten Orten auf, so dass die Frage unlösbar erscheint, ob wir es hier im Ganzen mit von einander unabhängigen gleichzeitigen Erfindungen oder mit Uebertragungen zu thun haben. Um so sicherer wird wohl dann behauptet werden können, dass ein Mann, der an vielen dieser Stätten ältester Kultur Jahre lang weilte, und zum Theil mit der ausgesprochenen Absicht dort weilte, sich die Kenntnisse dort zu erwerben, die dort erlangt werden konnten, dass ein solcher Mann auch seinen Zweck habe erreichen müssen. Es ist kein blosser Zufall, wenn in seinen Lehren Spuren dessen vorkommen, was er anderswo sah, es ist vielmehr Absicht, Nothwendigkeit; und unerklärlich schiene es im Gegentheil, wenn die Erfahrungen nur durch ihn hindurchgegangen wären, wenn der Strom von neuen Ideen, der die ungewohnte Seele überschwemmte, sich entfernt hätte, ohne einen wohlthätigen Niederschlag zurückgelassen zu haben.

Solcher Männer aber, welche die in sich aufgenommene Kultur da und dort Schule bildend verbreiteten, ähnlich, wenn auch mit umgekehrtem Erfolge, wie ein einziger Baumwollballen Epidemien zu verbreiten im Stande ist, Männer, welche die geistige Copula von ganzen Ländern und Völkern bilden, hat es zu allen Zeien gegeben. Es kam immer vor, dass Einer oder der Andere des

engbegrenzten Raumes der Schreibstube überdrüssig die zusammengekauerte Stellung am Studierpulte verliess und den Wanderstab in die Hand nahm, der freilich im Laufe der Zeiten sich in ein Eisenbahn- und Dampfschiffbillet verwandelte, um auswärts neue Scenerien, neues Wissen zu suchen. Nun wurden solche Reisen allmälig häufiger und häufiger, des zurückzubringenden Neuen wurde weniger und weniger, und so hat im umgekehrten Verhältnisse wie die Mittel grossartiger wurden die persönliche Wirksamkeit des einzelnen Reisenden abgenommen. Pythagoras von Samos war, wenn auch nicht der Erste, der solche Studienreisen unternahm, doch einer der Frühsten, und jedenfalls dehnte er sie weiter aus, als irgend ein Anderer vor ihm. Ich will versuchen, ein Lebensbild dieses unerschrockenen durch Wissensdurst wie durch Aufopferungsfähigkeit nicht minder als durch Talente ausgezeichneten Mannes zu geben, indem ich dabei besonders den Untersuchungen von Röth mich anschliesse.

Heimath[129]) des Pythagoras war, wie gesagt, die Insel Samos, wo seine Eltern als angesehene Leute zu der Zeit lebten, da der ältere Polykrates die Herrschaft eben an sich gerissen hatte. Der Vater Mnesarchos stammte zwar von der Insel Lemnos, hatte aber von den Samiern, weil er sie in einer Hungersnoth mit Getreide versorgte, das Bürgerrecht erhalten, und führte bald dort ein der Kunstbetriebsamkeit gewidmetes Leben, bald nöthigten ihn seine kaufmännischen Geschäfte zu Reisen nach allen damals bekannten Häfen, wobei seine Frau Pythais ihm stete Gefährtin war, ganz nach der Weise auch der heutigen griechischen Inselbewohner. Auf einer dieser Reisen im Jahre 569 v. Ch. Geb. ward Pythagoras in Tyrus geboren, und auf anderen Reisen nach dem südlichen Italien wird der zarte Knabe als Begleiter seines Vaters erwähnt. So wurde schon das jugendliche Gemüth mit Wanderscenen genährt, ein frühes Vorbild seines ganzen Lebens. Was Wunder, dass Pythagoras kaum der Kinerschule entwachsen in seinem 18. Jahre den Entschluss fasste, sich auswärts jene höhere Bildung anzueignen, die ihm vor Allem am Herzen lag. Die Ausführung des Entschlusses war nicht ganz leicht. Gewaltherrscher sind immer misstrauisch. So suchte man auch damals die Entfernung junger Männer aus bedeutenden Familien zu verhindern, hinter welcher man allerlei Verschwörungsgelüste witterte, und nur in nächtlicher Flucht konnte Pythagoras 551 sich von Samos nach Lesbos begeben, wo bei

einem Oheime Zoilos ihm gastliche Aufnahme sicher war. Zudem fand er dort Pherekydes, den jüngsten aber nicht wenigst bedeutenden Lehrer der damaligen Zeit, welcher mit den beiden Milesiern Anaximander und Thales sich in den Ruhm der Weltweisheit theilte. Und doch war Pherekydes, so viel aus seinen Schriften der Nachwelt überkommen ist, kein origineller Denker. Er war nur Dolmetscher egyptischer Wissenschaft, welche er an Ort und Stelle aufgenommen hatte, ähnlich wie vor ihm schon der geistig viel höher stehende Thales.

Die Frage, wie es kam, dass damals ziemlich plötzlich eine Reihe griechischer Gelehrten wissenschaftliche Reisen nach Egypten machten, beantwortet sich aus den politischen Verhältnissen dieses Landes. Psammetich hatte nämlich nur mit dem Beistande jonischer Hülfsvölker die Dodekarchen besiegt und seine Herrschaft befestigt. Zum Danke dafür gewährte er den früheren Bundesgenossen mannigfache Vortheile, ja er räumte ihnen seit 630 sogar feste Plätze in Egypten ein, wodurch das ehedem dem Fremden „bittere" Land für den Verkehr aufgeschlossen war, der gar bald ein wissenschaftlicher wurde, sobald nur Einer der des Handels wegen Uebergesiedelten den Drang in sich fühlte, mit der ihm dort begegnenden höheren Kulturstufe näher bekannt zu werden.

Den unmittelbaren Unterricht des Pherekydes genoss Pythagoras zwei Jahre, innerhalb welcher er besonders dessen religiösen Ideenkreis in sich aufnahm, und dann wandte er sich 549 weiter nach Milet zu Anaximander und Thales. Schon dass dieser damals bereits 90jährige Greis des Jünglings Annäherung in vertraulicher Weise zuliess, beweist, wie sehr bereits Pythagoras den künftigen grossen Mann verrieth, beweist auf welch günstigen Boden der Same exacter Wissenschaft fiel, so weit ihn Anaximander und selbst Thales ihm anvertrauen konnten. Es waren die Anfangsgründe einer kosmischen Physik, wobei Thales [130]) die Erde als eine Kugel dachte, schwimmend in einer Wassermasse, welche durch den ausgeübten Druck zwischen dem Rande des Erdkreises und dem Himmelsgewölbe als Meer emporgeschwellt wurde, während Anaximander [131]) bei Ausbildung dieser Lehre wieder einigermassen zu der altgriechischen Ansicht zurückging, welcher die Erde als Scheibe galt. Bei ihm ist nämlich die Erde wieder eine kurze Walze, deren obere Schnittfläche den bewohnten Theil bildet.

Hingegen erhob er sich zu dem Gedanken, die Erde freischwebend in der Mitte der Weltkugel ruhen zu lassen, weil kein Grund vorhanden sei, warum ein Körper, der in der Mitte einer hohlen Kugel sich befinde, nach irgend einer Seite hin vorzugsweise sich bewegen solle. Es waren dann ferner astronomische und mathematische Kenntnisse, welche die Geschichte an die Namen der beiden Gelehrten knüpft. Von Thales wissen wir, dass er das Sonnenjahr aus Egypten mitbrachte, dass er Sonnen- und Mondfinsternisse vorausbestimmte, dass er die Höhe einer Pyramide aus der Länge ihres Schattens finden lehrte, endlich dass er geometrische Sätze von theoretisch ungemeiner Tragweite einführte, wie z. B. den vom rechten Winkel im Halbkreise und den von den Winkeln an der Basis des gleichschenkligen Dreiecks, welcher Röth in seiner sonst so sorgfältigen Aufzählung entgangen zu sein scheint. Von Anaximander wird berichtet, dass er zuerst eine Himmelskugel zusammensetzte und darauf die zur Bestimmung der Himmelserscheinungen ersonnenen Kreislinien verzeichnete, dass er den Gnomon kannte, der freilich wie wir früher sahen [61]) nicht egyptischen sondern babylonischen Ursprunges ist, dass er ihn zur Bestimmung der Sonnenhöhe anwandte, ja dass er ihn sogar schon zur Zeiteintheilung als Sonnenuhr benutzte, dass er als neue Wissenschaft zuerst Geographie lehrte und auf Erz die ersten Landkarten bildete. Sowie von allgemeinem Interesse noch ist, dass Anaximander der erste Prosaiker war, während vor ihm auch bei den Griechen die Gewohnheit herrschte, welche wir bei den Indern als am längsten andauernd kennen lernten, ihre wissenschaftlichen Werke immer in Versen zu schreiben. Thales z. B. fügte sich noch diesem lästigen Gebrauche bei der Abfassung seines Lehrgedichtes über die Sonnenwende und die Tag- und Nachtgleiche. Astronomisch-physikalischen Inhaltes waren also die neuen Lehrgegenstände, welche Pythagoras in Milet sich aneignen konnte und folglich auch aneignete, wozu noch weitere eigentlich philosophische und theologische Spekulationen kamen, zu welchen Pherekydes, wie oben bemerkt wurde, ihn schon hinlänglich vorbereitet hatte. Thales wies nun den strebsamen jungen Geist weiter nach Egypten und sehnsuchtsvoll ward dieser Rath in Ausführung gebracht. Die phönikische Priesterschule zu Sidon sollte als Uebergang dienen [132]) und dorthin wandte sich Pythagoras 548. Ein ganzes Jahr brachte er damit zu, sich die Bekanntschaft mit den dortigen Weihediensten

zu erwerben, und dann erst betrat er 547 gehörig vorbereitet vielleicht zu Naukratis den egyptischen Boden.[133])

Die politischen Verhältnisse dieses Landes waren den Ausländern gegenüber kaum andere geworden, seit Thales gegen Ende der Regierung des Psammetich denselben Boden betreten hatte. Auf Psammetich waren Necho, der Umschiffer Africas (616—601), Psammis (600—595), Apries (594—570) gefolgt, und in ihrer Regierungszeit erlebte die egyptische Bildung ihren glänzendsten Aufschwung, während die äussere Macht seit Necho's Niederlage gegen Nebucadnezar gebrochen sich nicht wieder aufrichtete. Zuletzt veranlasste ein unglücklicher Krieg des Apries gegen Kyrene eine Empörung, die ihn das Leben kostete und Amasis aus plebeischem Stande entsprossen auf den Thron setzte. Damit war wieder für den Emporkömmling die Nothwendigkeit gegeben, seine unrechtmässige Herrschaft durch fremde Waffen und Bündnisse zu schützen. So zog er jonische Miethstruppen bis in seine Hauptstadt Memphis, so einigte er sich mit Kyrene in einem durch eine Heirath besiegelten Frieden, so schloss er Gastfreundschaft mit Polykrates von Samos. Es kam daher für Pythagoras Alles darauf an, den Regenten seines Heimathlandes zu versöhnen, und es scheint auch, dass der Name des erst 22jährigen Jünglings seit seinem Aufenthalte in Milet und Sidon bereits ein so weithin genannter geworden war, dass die politischen Skrupel wegen seiner früheren Flucht der wissenschaftlichen Berühmtheit weichen mussten. Polykrates empfahl in eigenhändigem Schreiben den jungen Gelehrten an den König Amasis, aber selbst mit dieser so wirksamen Unterstützung kostete es noch Kämpfe genug bis Pythagoras seinen Zweck erreichte, unter die Schüler der eigentlichen Priesterweisheit aufgenommen zu werden. Denn es war ihm nicht genug, wie seinen Lehrern Pherekydes und Thales, nur das zu erlernen, was ihm Umgang und gelegentliche Mittheilung der Priester von egyptischer Bildung zugänglich machen konnte. Das wusste er ja schon zum grossen Theile. Er wollte vielmehr als Ausländer, als Unreiner in die innersten, tiefsten Geheimnisse der Priesterwissenschaft eindringen, also den Widerstand einer Kaste besiegen, welche zu allen Zeiten die hartnäckigste Vertheidigerin ihrer Vorrechte war, welche sogar vor dem geborenen Egypter ihre Heiligthümer verschlossen hielt, wenn er nicht zu ihrem Stamme gehörte. Dazu mussten die mächigsten Hebel in Bewegung gesetzt werden, es musste der König

Amasis selbst den Fremdling bei der Priesterschaft einführen. Dieses geschah in dem Tempelcollegium zu Heliopolis. Direct abweisen wollte man den vom Könige Empfohlenen natürlich nicht, man versteckte sich vielmehr hinter dem damals schon bekannten Deckmantel mangelnder Competenz und verwies den Bittenden an das ältere Collegium in Memphis. Dort ward dasselbe Spiel aufgeführt, und Pythagoras musste wieder weiter ziehen nach Theben, wo das älteste Priestercollegium seinen Sitz hatte. Eine weitere Verweisung war jetzt nicht möglich, wenn gleich der Wille dazu nicht gefehlt haben mag, und so liess man sich hier durch die Rücksicht auf den König bestimmen, die bedingungsweise Aufnahme zu gestatten. Aber freilich, welche Bedingungen wurden dem wissbegierigen Jünglinge gestellt! Solche, die jeden Anderen zurückgeschreckt hätten, wie es auch wohl beabsichtigt war. Waschungen, Scheeren des ganzen Körpers, Fasten, vor Allem eine Operation, welche bei fast allen orientalischen Völkern in Gebrauch ebenso schmerzhaft ist, als sie hellenischer Sitte und Denkweise gradezu als unanständig galt.[134]) Und trotzdem unterwarf sich Pythagoras allen Bedingungen. Seine muthige Beharrlichkeit trug den Sieg über absperrende Engherzigkeit davon, sein eigentlicher Unterricht begann unter dem Oberpropheten Sonchis. Es scheint, als ob sein kräftiger Geist die Schwierigkeiten bald bewältigte, so dass die Priesterkaste ihn ebenso schätzen lernte, wie sie vorher sich seiner zu erwehren gesucht hatte. Sein Aufenthalt in Egypten verlängerte sich unter diesen Erfolgen von Jahr zu Jahr, und möglicherweise wäre sein kolossales Wissen für Europa verloren geblieben, wenn nicht politische Ereignisse eingetreten wären, die in jeder Beziehung für ihn von Bedeutung waren. Während der 21 Jahre nämlich, welche des Amasis Regierung nach unseres Weisen Ankunft noch dauerte, nahm Pythagoras, wie bereits angedeutet wurde, nicht bloss die ganze egyptische Wissenschaft in sich auf, er brachte es auch in dem Tempeldienste selbst zu den höchsten Ehren, und wurde den obersten Priestern zugerechnet. Da starb Amasis 527, sein Sohn Psammenit bestieg den Thron fast nur, um ihn alsbald mit seinem Leben wieder zu verlieren. Denn schon im Jahr 526 fiel Cambyses mit einem Eroberungsheere in Egypten ein, unterjochte das Land, und wandte in grausamer Klugheit seine ganze Wuth gegen die Priester, von deren einflussreicher Kaste er den nachhaltigsten Widerstand gewärtigte. Fast sämmtliche Mitglieder der Priesterschaft wurden

in die entfernteren Gegenden Asiens verpflanzt, unter ihnen Pythagoras, der sich somit plötzlich als Gefangener in Babylon sah.[135])

So traurig dieser Wechsel für ihn persönlich war, den aus dem ruhigen Frieden eines beschaulichen Priesterlebens unzart Herausgerissenen, von so unberechenbarem Vortheile war es für die Wissenschaft, dass Pythagoras jetzt fast gezwungen wurde, auch die Kenntnisse sich anzueignen, welche im Besitze der Chaldäer waren. Dass dort genügender Stoff sich vorfand, den es reichlich der Mühe werth war, sich anzueignen, braucht wohl nach dem, was in den früheren Kapiteln auseinandergesetzt wurde, nicht besonders hervorgehoben zu werden. Haben wir doch Babylon bereits als Mittelpunkt eines grossartigen Handelsverkehrs kennen gelernt, haben wir doch gesehen wie Baktrer, Inder und Chinesen dort ihren Markt halten. Damit stimmt überein, was speciell über Pythagoras mitgetheilt wird, er sei dort mit Juden, mit Brahmanen und Kalatiern zusammengetroffen, ja er sei mit Zoroaster dort in persönliche Berührung gekommen. Ich weiss wohl, dass dieser letzte Punkt an vielen Orten den meisten Anstoss erregen wird, indem gründliche Kenner der Zendsprache jeden Gedanken als unvernünftig zurückweisen, der das Leben Zoroasters in so späte Zeit versetzt. Seine Schriften seien in so alterthümlicher Sprache verfasst, dass daran nicht zu denken sei. Ohne weiter auf diese Frage eingehen zu können, möchte ich indessen nur daran erinnern, dass der Reformator des Feuerdienstes sehr wohl seine Lehre in alterthümliches Kostüm verhüllen konnte, um sie desto wirksamer zu machen, dass er diesem Zwecke zu Liebe ein Vorgänger des Pseudo-Ossian unseres Jahrhunderts werden konnte, ohne dass man ihn desshalb gradezu einen Fälscher nennen müsste. Im Uebrigen hängt indessen dieser vereinzelte Umstand viel zu wenig mit unserer Aufgabe zusammen, als dass er nicht allenfalls auch preisgegeben werden könnte, und so will ich nur für die Polemik über Zoroasters Lebenszeit auf Röth verweisen, der eine grosse Reihe von Gründen für diese spätere Epoche zusammengestellt hat.[136]) Ein anderer Zweifel, der hier im Voraus vernichtet werden muss, geht dahin, ob Pythagoras in seiner Stellung als Gefangener überhaupt in der Lage gewesen sei, sich wissenschaftlich zu beschäftigen. Dieser Zweifel könnte nämlich auftauchen, wenn man an jene Wandskulpturen und Backsteinmalereien denkt, welche die Schutthügel

von Niniveh und Babylon der staunenden Neuzeit wiedergegeben haben. Man sieht dort unglückliche Kriegsgefangene, welche unter der Peitsche eingeborener Aufseher Steine tragen, Statuen ziehen, Baumaterial aller Art beschaffen müssen, lauter Arbeiten wenig geistiger Natur. Allein es erscheint mehr als zweifelhaft, ob auch die gefangenen Priester zu so niedrigen Diensten in einem Lande herabgewürdigt wurden, welches selbst einen Mysteriendienst besass. Bei einem solchen wird der Priesterstand stets ein einflussreicher, in hohem Ansehen stehender sein, was alsdann gemeiniglich auf Priester anderer Religionen bis zu einem gewissen Grade sich ausdehnt. Sie sterben als Märtyrer, oder werden 'geachtet. Zudem dauerte die Gefangenschaft des Pythagoras zu lange, als dass nicht ein so hervorragender Geist sich aus jeder Stellung zu erheben vermocht hätte. Genaueres wissen wir allerdings nicht aus der Zeit seines 12jährigen gezwungenen Aufenthaltes, und erst die romanhafte Weise, in welcher er 513 seine Freiheit wieder erhielt, wird uns näher geschildert.[137]) Am Hofe des Darius, welcher nach der auf den Tod des Cambyses folgenden kurzen Zwischenherrschaft des falschen Smerdes seit 521 den persischen Königsthron einnahm, lebte Demokedes, ein aus Kroton gebürtiger Arzt, der, ursprünglich gleichfalls ein Gefangener, sich durch seine Kunst nicht bloss zum Posten eines königlichen Leibarztes emporschwang, sondern auch so tief in das Vertrauen des Darius sich einschlich, dass dieser ihn natürlich gegen das Versprechen der Wiederkehr an die Spitze einer Expedition stellte, welche auf Kundschaft nach Griechenland geschickt wurde. Wortbrüchig lenkte Demokedes die Fahrt gegen die Südküste von Italien, wo er in Tarent an's Land ging und sich unter den Schutz des dortigen Herrschers stellte. Die Perser mussten führerlos wieder absegeln, litten Schiffbruch, kamen so in Gefangenschaft, und wurden das Eigenthum eines gewissen Gillos von Tarent, der sie an Darius gegen verschiedene Bedingungen zurückschickte, unter welchen auch die Befreiung des Pythagoras eine wesentliche war. Und nun erst sehen wir diesen in einem Alter von 56 Jahren nach der Heimath zurückkehren, wo er gerade noch rechtzeitig ankam, um bei kurzem Aufenthalte auf Delos seinem Lehrer Pherekydes die Augen zuzudrücken. Aber noch wollte er sich die wohlverdiente Ruhe nicht gönnen. Er benutzte vielmehr noch ein halbes Jahr zu einer Rundreise durch Griechenland, dessen ihm lang entfremdeten religiösen und auch

wohl wissenschaftlichen und staatlichen Zustände er wieder kennen lernen wollte, bevor er selbst lehrend auftreten mochte.

Hier ist der grosse Abschnitt in dem Leben des Pythagoras, von welchem an der Held romantischer Abenteuer verschwindet, und der Philosoph, der Freund der Weisheit, wie er, sich selbst zu nennen, bescheiden und stolz genug war, auftritt. Der Anfang dieser zweiten Periode seines Lebens war trübe genug. Auf Samos, wo er die ersten Versuche seiner Lehrthätigkeit anstellte, missglückten dieselben so sehr, dass er den einzigen Schüler, der ihm nach einigen Vorträgen noch blieb, einen Namensvetter, Pythagoras, Sohn des Eratokles, gar bezahlen musste, um nicht ganz einsam dazustehen.[138]) Dieses Dasein, gegen welches die Stellung eines beginnenden Lehrers von Nicht-Fach-Gegenständen an deutschen Universitäten eine beneidenswerthe ist, war ihm unerträglich. Kein Wunder also, wenn er die undankbare Vaterstadt 510 verliess, um in den hochgebildeten Städten von Grossgriechenland eine neue Heimath sich zu gründen. Es war ein glücklicher Zielpunkt, den er wählte, als er nach Kroton überzog. Fand er doch dort einen Staat, welcher den ersten Schritt über die Tyrannis hinaus schon hinter sich hatte, in welchem ebensowenig die Gewaltherrschaft eines Einzelnen, als einer unbändigen Ochlokratie den geistigen Aufschwung hemmte, in welchem aber auch Reichthum und Ueppigkeit noch nicht so entsittlichend gewirkt hatten, wie etwa in der Nachbarstadt Sybaris. Fanden sich doch in Kroton schon vorher körperlich kräftig ausgebildete Naturen ebenso wie ein reges wissenschaftliches Leben. Von dem ersten zeugt der häufige Sieg, welchen Krotoniaten bei den olympischen Spielen sich errangen, von dem zweiten die weitberühmte Aerzteschule, welche um denselben Demokedes sich geschaart hatte, mit dem Pythagoras schon in der Gefangenschaft bekannt geworden war, und der in so eigenthümlicher Weise zu seiner Befreiung mitgewirkt hatte. Was freilich die Zeit betrifft, in welcher die Uebersiedlung stattfand, so war grade das Jahr 510 jenes Revolutionsjahr, in welchem fast am selben Tage die Flucht des Tarquinius aus Rom, des Hippias aus Athen erzwungen wurde, während Aufstandsversuche in Sybaris gegen den nach früher süditalienischer Gewohnheit auf den Plebs sich stützenden Tyrannen Telys missglückten. Synchronistische Geschichtsbetrachtung, die allein die richtigen Gesichtspunkte aufdeckt, weist also hier die Symptome einer und derselben geistigen Be-

wegung nach, welche die ganze damalige italienisch-griechische Kulturwelt durchlief. Auch die Orte, deren staatlich befriedigende Zustände keine Störung der äusseren Ordnung zuliessen, wurden in geistige Aufregung versetzt, welche richtig geleitet nach dem Idealen streben musste, vielleicht auch nach dem ihm so nahe liegenden Mystischreligiösen führte. Jedenfalls war damit gegeben, dass rein Wissenschaftliches kaum Interesse einflössen konnte, und dass Pythagoras, wenn er sich Gehör verschaffen wollte, zunächst in einer der beiden angedeuteten Arten vorgehen musste.

Von diesem Gesichtspunkte aus wird sein Benehmen in den ersten Wochen nach seiner Ankunft in Kroton erst verständlich. Er entfernt sich scheinbar von seinem eigentlichen Ziele, der Gründung einer streng wissenschaftlichen Schule, um es um so sicherer zu erreichen. Gleich sein erstes Auftreten ist eine öffentliche Rede an die Jünglinge der Stadt, in welcher er die Pflichten der Jugend so ernst und zugleich so anziehend darzulegen wusste, dass die Väter der Stadt ihn aufforderten, auch vor ihnen zu sprechen. Als er aber in dieser zweiten Rede Gesetzlichkeit und Sittenreinheit als die Grundlagen des Staatslebens wie der Familie hervorhob, als in Folge seiner eindringlichen Ermahnungen der Senat den Beschluss fasste, die schon zur Unsitte gewordene Verbindung mit Nebenweibern aufzulösen, da hatte er eigentlich schon gewonnenes Spiel, und die beiden folgenden Reden an die Knaben und zuletzt an die Frauen dienten nur dazu, seinen Triumph zu erhöhen. Die Rede an die Knaben behandelte so ziemlich dasselbe Thema, welches er den Jünglingen ans Herz gelegt hatte, nur in einer dem kindlichen Alter leichter zugänglichen Form. Die Rede an die Frauen ist am wenigsten genau überliefert „wahrscheinlich, wie Röth sagt, aus unzusammenhängenderen Erinnerungen, wie sie von Frauen zu erwarten sind.“ Doch kennen wir das schliessliche Resultat derselben, welches darin bestand, dass viele tausende kostbarer Gewänder in den Tempel der Here geschenkt wurden, weil keine Frau mehr wagte sich in einem solchen sehen zu lassen. Schon aus der dürren Aufzählung des Ergebnisses seiner Reden, die allein ich hier zu geben im Stande bin,[139]) begreift man die elektrisch zündende Gewalt, mit welcher er eingerostete Vorurtheile zu zermalmen, frivole Unsitte zu vernichten verstehen musste. So grossartig die plötzliche Sittenreform, so allgemein war die Begeisterung. Jetzt brauchte er nicht mehr mühsam nach Schülern zu suchen, ein Strom der

verschiedenartigsten Hörer ergoss sich zu seinen Vorträgen. Ausser den Jünglingen, welche den ganzen Tag hindurch seinen Lehren horchten, waren es nahe an 600 der bedeutendsten Männer der Stadt, waren es noch Frauen und Mädchen, welche seine abendlichen Vorträge erfüllten, und unter den letzteren die geistreiche, junge, blühende Theano, welche sich glücklich pries des 60jährigen Lehrers Gattin zu werden.

Es ergab sich aus diesem Zudrange von selbst eine bereits angedeutete Theilung der Schüler in die eigentlichen Lehrlinge, die engere Schule, und die blossen Zuhörer, die weitere Schule. Die ersteren, die Mathematiker, wie sie in der wörtlichen Bedeutung dieses Namens hiessen, waren es also, welchen die strenge Lehre des Pythagoras als wissenschaftliches Ganzes in logisch-systematischer Aufeinanderfolge von der elementarsten Mathematik bis zu den subtilsten Speculationen der Philosophie und Theologie mitgetheilt wurde. Sie lernten zugleich, dass nur ein Wissen des Ganzen zuträglich, ein bruchstückweises Wissen wegen entstehender Missverständnisse oft gefährlich, ja verderblich sei, und daher die geheimnissvolle Verschlossenheit der Pythagoriker, wie die spätere Zeit sie nannte, gegen Laien, welche so streng gewahrt blieb, dass die Schriften dieser eigentlichen Schüler des Pythagoras dem Alterthume bis zur Zeit der Ptolemäer unbekannt waren. [140]) Von den Mathematikern wohl zu unterscheiden waren die Akusmatiker, aus welchen später die Pythagoräer hervorgingen. Sie folgten nur den abendlichen populären Vorlesungen, in denen nichts exact Wissenschaftliches zur Sprache kam. Sittenlehre, Moral, Lehre von der Unsterblichkeit der Seele und der Seelenwanderung in vorsichtigster Auswahl, das war der Hauptinhalt dieser Vorträge, aus denen die Zuhörer so viel mit nach Hause nahmen als sie eben, durch anderweitige Vorkenntnisse theilweise gestört, zu begreifen fähig waren. Die Meisten derselben gehörten nämlich der schon erwähnten Aerzteschule an, und so nur löst sich das Räthsel von dem in jeder anderen Weise unerklärlichen Gemenge der verschiedenartigsten Vorstellungen aus einander entgegenstehenden Ideenkreisen, welches in deren Schriften sich vorfindet.

Aber die politische Bewegung, von welcher schon gesprochen wurde, war noch nicht verlaufen. Ihre Wellenkreise zogen sich noch immer durch die Kleinstaaten Süditaliens, und sie brachten Pythagoras und seine Schule zum höchsten Gipfel des Glanzes. In

Sybaris war, wie gleichfalls schon bemerkt, die Aristokratie gegen Telys und seine Anhänger unterlegen. Verbannte und Flüchtige kamen nach Kroton, wo sie freundliche Aufnahme und Fürsprache fanden, die sich zur förmlichen Partheinahme steigerte, als die krotoniatischen Gesandten schnöde ermordet wurden. Ein Kriegszug gegen das mächtige Sybaris wurde unternommen und gelang. Die feindliche Stadt ward 509 zerstört, das Land in Besitz genommen, und bei der Gütervertheilung fiel auch dem Pythagoras ein Stück Landes zu, wohin er mit seinen Mathematikern sich zurückzog. [141]) Von da an erfüllte sich an Pythagoras, dass wer einmal in politischen Wirren eine Rolle gespielt hat, nicht leicht von dem öffentlichen Leben sich ganz absondern kann, ohne dieser oder jener Vermuthung Platz zu machen, die rasch zur Verdächtigung wird. Es lässt sich zudem nicht in Abrede stellen, dass der Schein gegen ihn war. Mag auch Röth [142]) Recht darin haben, zu leugnen, dass eine wissenschaftliche Staatslehre, welche zu der bestehenden Verfassung im Widerspruche war, als letztes Geheimniss der Schule den Schlussstein bildete; die scharf ausgesprochene aristokratische Spaltung der Schüler, das monarchische Uebergewicht des Lehrers, sowie die stolze Abgeschlossenheit der ganzen Schule jedem Uneingeweihten gegenüber genügten vollkommen, um wenigstens eine derartige Staatsidee auszubilden, und so musste im Laufe der Jahre auf Seiten der Schule Verachtung des Bestehenden, auf Seiten der Bürger Misstrauen gegen das zu Erwartende sich regen. Zu bestimmt ausgesprochenen Conflicten kam es allerdings noch nicht. Denn wie nach allen Zeiten der Gährung und Revolution war auch damals eine darauf folgende Epoche der Ruhe und des Stillstandes eingetreten, welche erst durch einen neuen Anstoss von Osten her wieder gestört werden sollte.

Seit 493 begannen die furchtbaren Angriffe der Perserkönige gegen Athen und das in den Zeiten dieser Gefahr mit ihm sich einigende Festland Griechenlands. Auch dieser Stoss setzte sich unaufhaltsam fort. Sicilien und Karthago empfanden ihn und wurden in den Kampf verwickelt. Ebenso wenig konnte die Rückwirkung auf die süditalienischen Staaten ausbleiben, und da sie bei dem Weltkriege nicht in unmittelbare Mitleidenschaft gezogen wurden, so zerfleischten sie sich selbst in erbitterten Bürgerfehden. [143]) So in Kroton, als Hippasos ein aus der Schule als unwürdig Ausgestossener sich 490 an die Spitze der demokratischen Parthei

stellte und mit einer förmlichen Anklage gegen seine früheren Genossen auftrat. Die Schule ward zersprengt, Pythagoras selbst unter Einziehung seiner Güter verbannt, und so musste er wiederholt zum Wanderstabe greifen. Die nächsten 16 Jahre verlebte er, wenn auch angefeindet, doch verhältnissmässig ruhig in Tarent. Allein auch dort zerbrach 474 das Volk die bisherige Aristokratie, und Metapont nahm als letzten Zufluchtsort den 95jährigen Greis auf, der dort etwa vier Jahre eines kümmerlichen Lebens noch fristete. Als 471 auch in Metapont die Demokratie siegte, da umzingelte man das Haus, in welchem die Schule ihre Versammlungen hielt, warf Feuer hinein und die Meisten verbrannten elendiglich. Pythagoras selbst entkam zwar den Flammen, starb aber kurz darauf in seinem 99sten Lebensjahre. So viel über die Schicksale eines der grössten Männer aller Zeiten, für deren genauere Verfolgung nur wiederholt auf das Röth'sche Werk verwiesen werden muss, an welches die hier gegebene Darstellung sich in den wesentlichen Punkten anlehnt, wenn sie ihm auch nicht sklavisch folgte, es mitunter, wie ich wenigstens beabsichtigte, ergänzte.

Es wird leicht sein, jetzt die Aufgabe zu bestimmen, welche die nächsten Kapitel sich zu stellen haben. Erstlich wird gezeigt werden müssen, dass die ganze Lebensbeschreibung des Pythagoras, welche hier vorliegt, kein blosses Fabelmährchen ist, als welches sie mitunter angefeindet wird. Und ich glaube, dass dieser Beweis, so weit er für meine Zwecke nöthig, geliefert ist, sobald ich unter den mathematischen Lehren des Pythagoras und seiner Schule solche auffinde, deren Ursprung nur an den Orten sein konnte, welche Pythagoras vorausgesetztermaassen besucht haben soll. Damit ist zugleich der weitere Beweis geliefert, dass Pythagoras auch Anderes noch von ebendaselbst mitbringen und in Griechenland verbreiten konnte, mochte nun dort schon Verwandtes vorhanden sein oder nicht. Dies wird das Zweite sein, welches näher ausgeführt werden muss, insbesondere in Bezug auf die Zahlzeichen. Die Frage wird also als erste aufgestellt werden müssen, ob die Mathematik des Pythagoras sichere Spuren fremder Länder zeigt, und die zweite Frage wird auf die Numerationssysteme und Rechenmethoden der Griechen gehen.

VI. Die Geometrie des Pythagoras.

Ich habe mir für diesen Abschnitt der Untersuchungen die Aufgabe gestellt, in der Mathematik des Pythagoras solche Elemente aufzuschliessen, welche seine Anwesenheit in Egypten und Babylon bestätigen. Freilich wird dadurch dieses Kapitel und auch das nächstfolgende einen selbst mehr mathematischen Charakter annehmen, als das ganze übrige Buch. Meine Leser werden bereits gemerkt haben, dass dieses eben meine nicht mit der Gabel zu vertreibende Natur ist, die immer wiederkehrt. Ich entschuldige mich desshalb auch nicht mehr, sondern rathe lieber jedem abgesagten Feinde der Mathematik, diese beiden Kapitel nicht weiter zu verfolgen, als sie ihm verständlich sind. Das Spätere hängt nicht absolut von deren Detailkenntniss ab, sondern nur von dem im Anfangssatze dieses Kapitels schon ausgesprochenen Hauptresultate, dass *Pythagoras* Reisen nach Egypten und Babylon machte. Darauf allein kommt es für meine besonderen Zwecke an, und so könnte ohne Schaden für meine Folgerungen Alles, was im vorigen Kapitel in eingehenderer Weise von den Schicksalen des Pythagoras berichtet wurde, ein blosser Roman sein, wenn nur sein Aufenthalt an den erwähnten Orten wahr ist.

Ich glaube indessen auch an jene Einzelheiten. Ich bin mit Röth durchaus einverstanden, dass wenn auch Porphyr „der Göttliche“ und Jamblich „der Bewundernswürdige“ höchst mittelmässige Geister waren, die einen sehr ungünstigen Begriff von der neuplatonischen Schule geben, der sie um das Jahr 300 n. Ch. Geb. vorstanden, trotzdem oder vielleicht sogar wegen ihrer Unbedeutendheit die Zusammenstellung aus alten Schriftstellern, welche sie als Lebensbeschreibung des Pythagoras und als Abhandlung über das pythagorische Leben herausgaben, eine getreue Compilation ist mit

wenig oder gar keiner eigenen Zuthat. Ich bin ferner der Ansicht, dass die Stücke, welche ausdrücklich von beiden Schriftellern dem Aristoxenos und Dikäarch zugeschrieben werden, ohne allen Zweifel denselben auch angehören, dass aber diese berühmtesten Schüler des Aristoteles, deren Werke von Cicero und dem ganzen Alterthume als klassische geschätzt werden, die kaum 150 Jahre nach dem Tode des Pythagoras lebten, die selbst Freunde und Zeitgenossen von Pythagoräern waren, dass sie, sage ich, als glaubwürdige Zeugen uns gelten müssen. Aus ihren Aussagen aber hat Röth zumeist geschöpft und das dort Gefundene durch Bewältigung einer Menge von Literatur zu prüfen gewusst, vor welcher auch der blosse Nacharbeiter fast zurückschreckt. Dass dabei ein Lebensbild voll innerer Wahrheit entstand, wird der Leser vielleicht noch besser aus meinem kurzen Auszuge ersehen als aus dem Originalwerke, in welchem manche Zwischenbetrachtung den einheitlichen Ueberblick stört, Manches auch wohl nicht deutlich genug hervorgehoben ist, wie z. B. die Einwirkung der jedesmaligen politischen Verhältnisse. Ich wiederhole also, dass ich in der Röth'schen Wiederherstellung der Lebensbeschreibung des Pythagoras ein Stück positiver Kritik erblicke, dem ich kaum ein zweites an die Seite zu stellen wage, und von dessen Richtigkeit ich mich um so mehr überzeugt habe, je genauer ich mich hineinarbeitete. Ich füge hinzu, dass ich es als einen Akt der Pietät gegen den Verstorbenen, und wenn auch mehr als früher, doch immer noch nicht genug Gewürdigten betrachte, zum weiteren Bekanntwerden seiner Riesenleistung nach Kräften beizutragen. Ich erfülle damit nur eine schwache Pflicht der Dankbarkeit gegen einen Mann, dessen Aufmunterung es ganz besonders war, welche mich in die historisch-mathematischen Forschungskreise hinüberwies. Dieses zu meiner Vertheidigung Solchen gegenüber, welche das vorige Kapitel etwa mit einem Kopfschütteln gelesen haben, und noch immer der Meinung sind, Schwachköpfe wie Jamblich und Porphyr könnten nimmermehr als Quelle dienen, auch wo sie blosse Abschreiber sind. Ich bedaure auf deren Beistimmung verzichten zu müssen, werde jedoch auch in diesen Kapiteln nicht umhin können, ausser wo meine eigenen Untersuchungen mich Anderes lehrten, mich durchaus an Röth's Darstellung anzulehnen, und mit ihm so späte und wie man behauptet unzuverlässige Gewährsmänner wie Jamblich und Porphyr, neben diesen auch noch Nicomachus, Theon

von Smyrna und sogar Proclus zu benutzen. Vielleicht wird es mir verziehen, weil ich auch Plato gleichzeitig berücksichtige, den Röth wohl mit Unrecht einigermaassen vernachlässigte, wo es um wirkliche Mathematik und nicht um Zahlensymbolik sich handelte.

Noch viel lieber hätte ich mich allerdings an solche Schriftsteller gehalten, welche im Alterthume über Geschichte der Mathematik schrieben. Manches werthvolle Material muss vor Allen in den Schriften des Theophrastus von Lesbos[144]) enthalten gewesen sein, unter denen sich eine Geschichte der Astronomie in 6 Büchern, eine Geschichte der Geometrie in 4 Büchern, eine Geschichte der Arithmetik in 1 Buche befand. Was wäre von diesem berühmten Schul- und Zeitgenossen des Dikäarch und Aristoxenos nicht zu erwarten? Aber leider sind alle diese Werke spurlos verschwunden. Nur die Titel hat Diogenes Laertius uns aufbewahrt. Und auch von dem zweiten berühmten Geschichtsschreiber der Mathematik, von Eudemus von Rhodus, wissen wir nur, dass er eine Geschichte der Astronomie und der Geometrie verfasst hat. Es bleibt also keine Wahl. Man muss auf jede historische Betrachtung dieser griechischen Vorzeit verzichten, oder sich mit den Quellen begnügen, die ich nannte.

Von den fremden Elementen, welche durch Pythagoras der europäischen Mathematik überkamen, nenne ich zuerst die egyptisch-geometrische Methode. Die älteste griechische Geometrie, welche uns erhalten ist, ist die des Euclid, eines von Ptolemäus Lagi gegen das Jahr 300 v. Ch. Geb. nach Alexandrien berufenen Mathematikers. Die Elemente nannte der mit Recht berühmte Verfasser seine Schrift, und es scheint, dass er damit nur einen Titel benutzte, der schon längst für derartige Werke in Gebrauch war, für Werke also, welche in bestimmter Form mit Satz und Beweis, Aufgabe und Auflösung die mathematischen Grundlehren verbreiteten, welche zur Verständniss anderer Wissenschaften nothwendig waren. Diese Definition[145]) giebt uns wenigstens Proclus, der gelehrte wenn auch nicht allzugeistreiche Erklärer des Euclid, der von 412 bis 485 lebte,[146]) und ebenderselbe erzählt auch von Elementenschreibern vor Euclid. Als ältesten nennt er[147]) Hippokrates von Chios, dann Leon, ferner Theudios von Magnesia und Hermotimos von Kolophon. Hippokrates von Chios aber lebte um 450 v. Ch. Geb., also in der unmittelbarsten Nachbarschaft der Lebenszeit des Pythagoras, und war sowie die drei anderen oben Ge-

nannten Pythagoräer,[148]) während Euclid selbst als Platoniker bezeichnet wird.[149]) Damit allein wäre freilich der Ursprung der euclidischen Darstellungsweise noch nicht nachgewiesen, wenn nicht über die Unterrichtsmethode des Pythagoras und deren Heimath damit Uebereinstimmendes bekannt wäre. Pythagoras begann die wissenschaftliche Erziehung seiner Schüler regelmässig damit, dass er sie zu Anfang viel auswendig lernen liess. Das war so Gebrauch in Egypten, wo er selbst in ganz ähnlicher Weise unterrichtet worden war,[150]) wo auch noch zu Herodots Zeiten das Gedächtniss mehr als sonst irgendwo geübt ward.[151]) Der erste Gegenstand, welcher gelernt werden musste, war Mathematik.[152]) Und diese selbe erste Stelle im ganzen Lehrplan behielt die Mathematik in allen griechischen Schulen bei.[153]) Um also Gedächtnissstoff zu sein musste sie nothwendiger Weise in einer prägnanten, scharfen Form auftreten; in einer Form, die dem Gedächtnisse selbst zu Hülfe kam durch logische Aufeinanderfolge, wie durch Symmetrie der Darstellung; kurz in einer Form, die wirklich dem Geiste auch des Knaben eingeprägt und von ihm behalten werden kann. Und welche Form der Mathematik entspricht diesen Anforderungen so sehr wie die der sogenannten Elemente? Wenn also schon diese mehr äusseren Gründe uns dazu führen, eine den euclidischen Elementen nicht unähnliche Geometrie des Pythagoras und seiner Schule anzunehmen, so ist die aus dem Inhalte derselben sich ergebende Wahrscheinlichkeit nicht geringer. Arimnestos, der Sohn selbst des Pythagoras, war Lehrer des Demokrit[154]) und brachte denselben so weit, dass er sich rühmen konnte, dass ihn im Construiren von Figuren sowie in der Beweisführung Niemand übertroffen habe, nicht einmal jene egyptischen Priester, die man Harpedonapten[155]) nenne. Das zeigt doch wohl klar und deutlich, dass die Egypter grade die Constructionen und Beweisführungen besonders pflegten, und dass dasselbe den Hauptinhalt der Elemente des Euclid bildet, ist bekannt genug. Endlich ist es schon an sich naturgemässer, wie Röth sehr richtig bemerkt hat,[156]) dass eine solche ausgebildete, künstliche Form, wie die demonstrative Methode des Euclid sie bietet, das allmälige Ergebniss einer durch Generationen hindurch fortgepflanzten Wissenschaft, nicht aber die persönliche Schöpfung eines Einzelnen ist. Und wie die euclidische Methode sich bis auf unsere Tage vererbt hat, wie Niemand ansteht, die Lehrbücher der elementaren synthetischen Geometrie bis zum Anfange unseres

Jahrhunderts als abhängig von jenen vor mehr als 2000 Jahren niedergeschriebenen Elementen zuzugestehen, so dürfen wir gewiss ohne zu grosse Kühnheit noch weitere zwei Jahrhunderte hinaufgreifen und die euclidische Methode ihrem Vaterlande Egypten zurückgeben. Steht doch auch damit die mehrerwähnte Stelle aus der Astronomie des Theon von Smyrna [23]) im Einklang.

Ich benutze diese Gelegenheit, um über Theon von Smyrna selbst und seine Schriften einige auch später noch zu benutzende Notizen znsammenzustellen. Er lebte wohl am Anfange des 2. Jahrhunderts n. Ch. Geb. als älterer Zeitgenosse des bekannten Astronomen Ptolemäus. Die Schriften Theons bildeten ein einziges Werk, welches aber in fünf Bücher zerfiel. Seinen ausgesprochenen Zweck hatte es darin, die zur Verständniss Platos und der Platoniker nöthigen Vorkenntnisse mitzutheilen. Schon in dieser Beziehung ist es also von überaus grosser geschichtlicher Bedeutung, indem es gewissermaassen in die damals moderne Sprache übersetzt, was dem Plato schon bekannt gewesen sein muss. Die fünf Bücher behandeln der Reihe nach: die Arithmetik mit Inbegriff der musikalischen Zahlenverhältnisse, die Geometrie, die Stereometrie, die Astronomie und die Musik der Welten. [157]) Leider ging der grössere Theil dieses reichen Inhaltes uns verloren und nur das erste und vierte Buch blieb erhalten. Jenes, die Arithmetik nebst der Intervallenlehre, gab Boulliau bereits 1644 mit lateinischer Uebersetzung heraus, dann später nochmals, aber was die neuen Anmerkungen und besonders die Weglassungen betrifft jedenfalls sehr überflüssiger Weise, ein Holländer De Gelder 1827. Für die Veröffentlichung der Astronomie ist die Wissenschaft Th. H. Martin (von Rennes) zu Dank verpflichtet, der 1849 eine ausgezeichnete Bearbeitung derselben lieferte und zugleich die überraschende Nachricht mittheilte, dass diese Schrift schon früher unbewusstermassen bekannt war. Chalcidius, ein Philosoph der platonischen Schule aus dem 4. oder 6. Jahrhundert, beging nämlich die Frechheit, das ganze Buch der Astronomie des Theon von Smyrna mit wenigen entstellenden Veränderungen seinem Commentare zum Timäus des Plato einzuverleiben, und da er zugleich die Klugheit so weit trieb nirgends auch nur den Namen des Theon zu nennen, so blieb der Betrug unenthüllt, bis Martin ihn entdeckte.

In dieser Astronomie sagt also Theon, [23]) wie ich nochmals in Erinnerung bringen will, dass Chaldäer und Egypter Methoden

besassen, um die Bewegung der Planeten vorher zu bestimmen. Die Ersteren hätten sich dazu der Rechnung, die Zweiten der Zeichnung bedient, Beide aber hätten darin gefehlt, dass sie keine physikalischen Betrachtungsweisen damit verbanden. Diesen Gesichtspunkt hätten dann die griechischen Astronomen hervorgehoben, indem sie von den Anderen die Principien und die Beobachtungskunst erhielten. Also auch hier werden, und das ist es, worin ich die Uebereinstimmung mit dem Früheren sehe, die Egypter als mit geometrischen Constructionen besonders vertraut geschildert. Wenn ich nun endlich noch auf eine Stelle des Proclus [158]) verweise, in der gesagt ist, dass bei den Egyptern die Geometrie erfunden worden sei, weil die Nilüberschwemmungen häufig neue Grenzbestimmungen nöthig machten, so wird dieselbe jetzt um so leichter dahin zu erklären sein, dass Proclus, wenn er die Erfindung der Geometrie an einen bestimmten Ort und zwar nach Egypten verlegt, damit die damals gebräuchliche Methode der Geometrie gemeint haben muss.

Die Methode wissenschaftlicher Behandlung gleicht aber in mancher Beziehung einer Sprache. Es ist nicht gut denkbar, dass dieselbe erhalten bleiben soll, und Alles untergeht, was in ihr geschrieben war. Die Sprache haftet nur an schriftstellerischen Producten in derselben, die mathematische Methode nur an einzelnen Sätzen. Es wird daher im höchsten Grade wahrscheinlich, dass unter den Sätzen, welche Euclid uns aufbewahrt hat, solche waren, an denen er nicht bloss die nach ihm benannte Methode fortpflanzte, sondern selbst kennen lernte; mit anderen Worten Sätze, die schon durch Pythagoras und seinen griechischen Vorgänger Thales gelehrt wurden, Sätze, die noch früher in derselben Form in Egypten bekannt waren. Den ersten Theil dieser Hypothese können wir zur Wahrheit erheben. Wir sind namentlich durch Proclus, aber auch durch Diogenes Laertius und schon durch Plato in den Stand gesetzt, einzelne Theoreme der Geometrie als thaletisch und pythagorisch nachzuweisen. Für den zweiten Theil meiner Hypothese kann ich allerdings keinen weiteren Grund mittheilen, als den schon angeführten aus der Geschichte der Entwicklung aller Wissenschaften mit innerer Nothwendigkeit sich ergebenden. Nur möchte ich, um nicht missverstanden zu werden, eine Bemerkung hinzufügen. Ich bin nämlich weit entfernt, mit dem eben Gesagten behaupten zu wollen, Thales und Pythagoras hätten nur die

Sätze gelehrt, welche ihnen zugeschrieben werden. Im Gegentheil glaube ich darin nur einige der neuen Erfindungen zu sehen, mit welchen beide offenbar die Wissenschaft bereichert haben. Das Grosse und Ganze ihrer Lehren ist vielmehr unter jenen weitaus zahlreicheren Sätzen zu suchen, die von einem Elementarschriftsteller zum andern sich vererbten, ohne dass man deren Erfinder angegeben sieht, einfach aus dem Grunde weil man ihn nicht anzugeben weiss, ebensowenig wie man den Erfinder der Addition, der Multiplication zu nennen vermag. Und unter diesen anonymen Sätzen sind sicher auch uregyptische enthalten, deren nähere Bezeichnung vorläufig freilich zu den Unmöglichkeiten gehört, sofern man sich nicht mit Wahrscheinlichkeitsschlüssen begnügen will.

Proclus meldet uns also von Thales,[159]) wie zum Theil schon im vorigen Kapitel berichtet wurde, er habe zuerst den Beweis geliefert, dass der Kreis durch jeden Durchmesser in zwei gleiche Theile getheilt wird, dass die beiden Winkel an der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks einander gleich sind, dass Scheitelwinkel einander gleich sind und dass Congruenz zweier Dreiecke stattfindet, wenn eine Seite und zwei Winkel des einen den ähnlichliegenden Stücken des andern einzeln gleich sind. Bei Erwähnung des zweiten dieser Sätze bemerkt aber Proclus ausdrücklich, der Satz sei nur einer von den vielen, welche der Erfindungsgabe des Thales zu verdanken seien. Diogenes Laertius geht noch etwas mehr auf die Quelle zurück. An einem Orte theilt er uns mit, dass Thales in Egypten die Höhe der Pyramiden aus ihrem Schatten gemessen habe.[160]) Er setzt zwar hinzu, die Messung sei so erfolgt, dass Thales den Moment erfasst habe, in welchem die Höhe der Pyramide der Schattenlänge gleich war, doch ist damit die Methode keineswegs gesichert. Möglicherweise war neben der Pyramide ein Stab von vorher gemessener, also bekannter Höhe befestigt, an dessen Schatten man den erwünschten Moment gewissermassen ablesen konnte, wenn nämlich Schattenlänge und Stablänge identisch waren. Dann musste vermöge der Aehnlichkeit der Dreiecke auch die Schattenlänge der Pyramide als Maass ihrer Höhe gelten können. An einem anderen Orte meldet uns dann Diogenes Laertius von einem Satze egyptischen Ursprunges, welchen Thales nur mitgebracht habe,[161]) von dem Satze, dass der Peripheriewinkel, der auf einem Halbkreise aufstehe, ein rechter sei.

Von Pythagoras selbst giebt Proclus nur zwei Sätze

an,[162]) beide freilich des Mannes würdig. Der Eine umfasst eigentlich eine ganze Theorie, indem, nach Eudemus, Pythagoras es gewesen sei, der die Anlegung von gegebenen Flächenräumen erfand, der also, um den bestimmten Fall anzugeben, bei welchem diese Mittheilung erfolgt, zuerst über einer gegebenen Linie mit gegebenem Winkel ein Parallelogramm beschrieb, welches einem gleichfalls gegebenen Dreiecke gleich war. Der andere Lehrsatz ist die speciell als Satz des Pythagoras bekannte Grundwahrheit, dass das Quadrat der Hypotenuse in einem rechtwinkligen Dreiecke der Summe der Quadrate der beiden Katheten gleich ist. Mit diesem Theoreme, welches einer ganz anderen mathematischen Richtung angehört, habe ich mich im folgenden Kapitel noch ausführlich zu beschäftigen.

Es sei hier noch hinzugefügt, was Proclus als Eigenthum der nächsten Schüler des Pythagoras anführt. Den Oenopides von Chios, welcher um 470 v. Ch. Geb., also unmittelbar nach dem Tode des Pythagoras, dessen Lehren studirte und nachbildete,[163]) nennt Proclus als den Erfinder der Aufgaben, von einem gegebenen Punkte ausserhalb einer graden Linie eine Senkrechte auf dieselbe zu fällen, und an eine grade Linie in einem gegebenen Punkte eine Linie unter gegebenem Winkel anzulegen. Der Schule des Pythagoras im Allgemeinen[164]) schreibt Eudemus den Satz zu, dass die drei Winkel eines jeden Dreiecks zwei Rechte betragen, und fügt bei, die Erfinder hätten sich jenes Beweises bedient, bei welchem durch die Spitze des Dreiecks eine Hülfslinie der Grundlinie parallel gezogen wird, die beiden Winkel an der Grundlinie also durch ihre Wechselwinkel ersetzt werden. Endlich an verschiedenen Stellen[165]) erwähnt Proclus des Satzes als pythagorisch, dass die Winkel um einen Punkt vier Rechte bilden, und dass die Ebene durch Dreiecke gewisser Art erfüllt gedacht werden kann.

Proclus weist damit auf dieselbe Theorie hin, welche Plato in seinem Timäus angedeutet hat, und welche erst durch Martin's Erklärung[166]) zu einer vollständig verständlichen geworden ist. Es würde mich zu weit von meinem eigentlichen Zwecke seitab führen, wollte ich die ganze Stelle hier einer erneuten Erörterung unterziehen, welche zudem kaum ein anderes Resultat liefern würde als das von Martin gefundene. Ich begnüge mich daher mit einem kurzen Berichte. Plato, dessen Lebenszeit (430—347) bekanntlich kaum näher zu der des Pythagoras liegt, als es mit den beidersei-

tigen Lehren in vielen Beziehungen sich verhält,[167]) lässt in dem Timäus überschriebenen Dialoge den Timäus von Locri, einen eifrigen Pythagoräer, auffordern, Auseinandersetzungen zum Besten zu geben über die Entstehung der Welt, über Gott und über die Natur des Menschen. Timäus erfüllt diesen Wunsch, und liefert uns somit in zusammenhängender Rede die Ansichten seiner Schule über den angeregten Gegenstand. So kommt er denn auch zu den vier Elementen: Feuer, Wasser, Luft, Erde, deren Gestalt er auseinandersetzt und damit in ähnlich gewagten Hypothesen sich bewegt, wie es mitunter auch noch anderen Atomistikern zu ergehen pflegt, wenn sie die Aneinanderlagerungen der chemischen Elemente versinnlichen wollen. So wenig Interesse diese Hypothesen an sich für den Mathematiker haben, so wichtig sind sie durch einen weiteren Schluss, den man aus ihnen ziehen kann. Die gewählten Gestalten beweisen uns nämlich, dass die Schule des Pythagoras sich mit den fünf regulären Körpern beschäftigt hat. Denn die Gestalt, in welcher Timäus das Feuer auftreten lässt, ist der Tetraeder, die Luft besteht aus Octaedern, das Wasser aus Icosaedern, die Erde aus Würfeln, und da noch eine fünfte Zusammensetzung möglich war, so benutzte Gott diese, also das Pentagondodekaeder zum Umriss des Weltganzen. Andere regelmässige Körper als diese fünf giebt es aber in der That nicht, und dass Timäus, das heisst also Plato, der ihm die Worte in den Mund legt, von dieser Unmöglichkeit überzeugt ist, das ist grade das Bedeutsame für uns; das beweist, dass auch die Lehre von der Kugel bis zu einem ziemlich hohen Grade ausgebildet gewesen sein muss, in welche ja die regelmässigen Körper beschrieben gedacht werden können. Es dürfte sogar wahrscheinlich sein, dass die Sphärik, die Lehre von der Kugel, vorausging, welche selbst von den egyptischen astronomischen Methoden untrennbar ist, und dass erst aus der Sphärik jener eben besprochene Theil der Lehre von durch Ebenen begrenzten Körpern sich entwickelte, und einen Grad der Vollkommenheit in der Schule erreichte, für welchen Röth noch weitere gewichtige Gründe gesammelt hat,[168]) Gewährsstellen aus einer ganzen Anzahl der Schule nahe stehender Schriftsteller.

Bevor indessen Timäus die fünf regulären Körper in der angegebenen Weise physikalisch verwerthet, verfolgt er sie erst in ihrer Entstehung, und hier treten uns wieder Sätze entgegen, die mathematisch geschichtlichen Werth für uns besitzen, dieselben Sätze,

von denen Proclus als pythagorisches Eigenthum uns erzählt. Die fünf Körper, bemerkt Timäus, besässen als Körper sämmtlich Tiefe und seien von allen Seiten von ebenen Flächen eingeschlossen. Diese Flächen selbst setzten sich immer aus Dreiecken zusammen, und zwar gebe es zwei Gattungen rechtwinkliger Dreiecke, aus welchen alle hier nöthigen Figuren hervorgehen. Das eine sei das gleichschenklige rechtwinklige Dreieck. Daraus bildet sich das Quadrat, sei es nun, dass man zwei derselben mit der dem rechten Winkel gegenüberliegenden Seite aneinander setzt, sei es nun, dass man vier derselben benutzt, die man so legt, dass die vier rechten Winkel einen gemeinsamen Scheitelpunkt haben. Keine der anderen Figuren hingegen geht aus dem gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecke hervor. Zu ihrer Bildung ist vielmehr das zweite noch näher zu beschreibende rechtwinklige Dreieck erforderlich, aus welchem umgekehrt wieder das Quadrat nicht entstanden gedacht werden kann. Dieses zweite rechtwinklige Dreieck ist dasjenige, dessen beide spitze Winkel $\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{3}$ des rechten Winkels betragen, bei welchem also die Hypotenuse doppelt so gross ist, wie die kleinste Kathete, und das Quadrat der grösseren Kathete dreimal so gross, wie das der kleineren. Zwei solche Dreiecke mit der grösseren Kathete aneinandergelegt, so dass die kleineren Katheten eine grade Linie bilden, geben das gleichseitige Dreieck. Auch aus 6 solchen Elementardreiecken lässt sich ein gleichseitiges Dreieck bilden, wenn man sie alle so zusammenfügt, dass sämmtliche Winkel von der Grösse von $\frac{2}{3}$ Rechten in einem gemeinsamen Scheitelpunkte zusammenstossen, der alsdann der Mittelpunkt der Figur ist. Das Interesse dieser Theorie, welche offenbar pythagorisch ist, wie neben den ausdrücklichen Verweisungen schon der vielfache Gebrauch des rechtwinkligen Dreiecks beweisen würde, besteht nun weniger in den angegebenen Sätzen selbst, als vielmehr darin, dass wir sehen, wie die pythagorische Schule das mathematische Experiment liebte. Ganz klar wird diese meine Bemerkung dem Leser erst im folgenden Kapitel werden können, aber hier schon wird er darauf aufmerksam gemacht werden können, dass offenbar die Flächenzusammensetzung aus solchen Elementarfiguren versucht wurde, und dass man die Fälle, in welchen eine Zusammensetzung gelang, besonders notirte. Fast noch interessanter für die Geschichte der Mathematik ist ein missglückter Versuch in derselben Richtung geworden, dem ich wohl zuerst hier seinen rich-

tigen Platz im Zusammenhange der pythagorischen Lehren anweise. Die Zusammensetzung der Seitenfläche des fünften Körpers, also des Fünfeckes, lehrt Plato nämlich nicht. Mit gutem Grunde, es liess sich eben aus den beiden angewandten Elementardreiecken nicht bilden. Aber versucht hat man seine Darstellung aus Dreiecken in der pythagorischen Schule. Man hat Hülfslinien aller Art gezogen, und kam so zum Sternfüneck. Diese Figur, welche bekanntlich aus den Eckpunkten des regelmässigen Fünfecks sich ableitet, wenn man je mit Ueberspringung einer Ecke sämmtliche Punkte in fortlaufendem Zuge mit einander verbindet, dieselbe Figur, welche auch unter dem Namen fünfspitziger Stern, Pentalpha, Drudenfuss bekannt ist, spielte unter den Pythagoräern eine hervorragende Rolle. Sie galt als Erkennungszeichen [169]) und wurde als solches den Briefen als Ueberschrift beigegeben, vielleicht nach Kircher's Behauptung [170]) mit Bezeichnung der einzelnen Spitzen durch Buchstaben. Jedenfalls wurde das Zeichen später so ausgesprochen, dass es die Bedeutung eines Gesundheitswunsches hatte. Dass dazu der bei den Römern gebräuchliche Anfang der Briefe „Wenn Du wohl bist, freut es mich, ich bin wohl“ ein interessantes Analogon darbietet, darf hier wohl hervorgehoben werden. Aber eine noch viel neuere Anwendung erzählt Kästner [171]): „in den 80er Jahren des letzten Jahrhunderts hätten nämlich bei einem Geburtsfeste der russischen Kaiserin die dasigen Aerzte an einer fünfeckigen Tafel, als einem Symbole der Gesundheit gespeist.“

Bei der schon hervorgehobenen Ausnahmestellung dieses und des nächsten Kapitels darf ich mir wohl auch eine von dem übrigen Buche etwas abweichende Form gestatten, und so möchte ich zum Schlusse das bisher über die Geometrie des Pythagoras, mit Ausschluss des nach ihm benannten Satzes, und deren Ursprung Gesagte nochmals kurz zusammenfassen. Die folgenden Thesen liefern etwa ein übersichtliches Bild davon.

1) Die geometrische Methode überhaupt ist egyptischen Ursprunges.

2) Die Egypter benutzten die Geometrie praktisch theils zur Geodäsie, theils zur Astronomie.

3) Die erstere Anwendung machte es nothwendig, besonders solche Sätze zu erfinden, welche die Gestalt der Figuren von deren Flächeninhalt abhängig machten, also hier abzunehmen, dort

zuzusetzen lehrten, mit einem Worte Sätze über die Verwandlung der Figuren.

4) Damit eng verbunden als theoretisch vorhergehend waren Winkelsätze über Parallellinien, war die Lehre von der Aehnlichkeit der Dreiecke, war endlich die ganze geometrische Proportionenlehre.

5) Von der astronomischen Anwendung der Geometrie aus erklärt sich die Kenntniss der Sphärik.

6) Von ihr aus kam man zu den fünf regelmässigen Körpern.

7) Die regelmässigen Körper führten rückwärts wieder zum Gebiete der ebenen Geometrie zurück, und zwar zu den regelmässigen Vielecken.

8) Die jetzt damit in Verbindung gesetzte Lehre von der Verwandlung der Figuren führte zu dem geometrischen Experimente, die regelmässigen Vielecke aus gewissen gleichen Elementen zusammenzusetzen, und dieselben Experimente gaben den Anlass zur Entdeckung der Sternvielecke.

VII. Die Arithmetik des Pythagoras.

Ich komme nun zum zweiten Haupttheil der Mathematik, zur Arithmetik im weitesten Sinne des Wortes, in welchem sie sowohl das eigentliche Rechnen als die Zahlentheorie umfasst. Die Griechen zwar bezeichneten nur den letzteren Theil als Arithmetik, für die ersteren Methoden besassen sie den Namen der Logistik. Ich habe schon früher die Wiege dieser Kenntnisse nach Babylon verlegt. Ich will die Hauptstellen, die dafür sprechen, hier nochmals anführen. Porphyrius [172]) giebt freilich Phönikien als Heimathland der Rechenkunst an. Allein einmal ist es wohl möglich, ja sogar wahrscheinlich, dass auch bei diesem Handelsvolke die Rechenkunst eine weit vorgeschrittene war, und dass Pythagoras bei seinem Aufenthalte in Sidon schon die ersten Anfänge derselben kennen lernte. Dann aber war der phönikisch-babylonische Verkehr ein so reger, dass Uebertragung von dem einen Lande nach dem anderen fast nothwendig war. Auch Proclus schreibt vielleicht mit Beziehung auf die Stelle des Porphyr den Phönikern dieselbe Erfindung zu. [158]) Theon hingegen verlegt den Ursprung der vorhandenen Methoden der Astronomie nach Babylon, [23]) und ebendahin verweisen die Quellen für bestimmte Sätze. Allerdings sind deren weniger angegeben als Sätze der Geometrie. Diese mutheten den plastischen Sinn der Griechen mehr an und fanden schon desshalb weitere Ausbildung, wiewohl auch noch weitere Gründe dazu mitwirkten, von denen nachher die Rede sein soll.

Ich habe früher darauf hingewiesen, wie das Rechnen eine kaufmännisch-praktische Erfindung sei, welche erst in zweiter Linie zur Theorie sich erhob. Dasselbe berichtet Aristoxenus. [173]) „Die Zahlenlehre, sagt er, scheint Pythagoras am

meisten werth gehalten und hauptsächlich dadurch weiter gefördert zu haben, dass er sie aus dem kaufmännischen Geschäftsbedürfnisse herauszog, und alle Dinge unter der Form der Zahl betrachtete." So kam man, wie ich gleichfalls schon andeutete, von der arithmetischen und geometrischen Proportion, welche das tägliche Bedürfniss sicherlich schon frühe bekannt gemacht hatte, auch zur harmonischen Proportion, deren Interesse ein rein theoretisches ist. Pythagoras lernte sie bei den Babyloniern kennen, [57]) und brachte sie von dort mit nach Hause. Wir können aber wohl mit Bestimmtheit annehmen, dass dieses Kennenlernen nur von der für Pythagoras neuen Form gilt, in welche die wissenschaftliche Proportionenlehre der Babylonier gekleidet war. Den Gegenstand kannte er zum grossen Theil schon aus Egypten her, wie ich im vorigen Kapitel zu zeigen suchte. Was lag da näher, als dass er nun auch das dem Inhalte nach Neue in die gewohnte geometrische Betrachtungsweise übersetzte? Bei der Proportionenlehre war eine solche Uebersetzung verhältnissmässig am leichtesten, wie denn auch Theon von Smyrna uns ein Beispiel [174]) in der Aufsuchung des geometrischen Mittels aufbewahrt hat. Aber auch die sonstigen arithmetischen Sätze liessen sich in gleicher Weise versinnlichen, und so bildete sich zum didaktischen Gebrauche jene überaus eigenthümliche geometrisch aufgefasste Arithmetik, wie sie in den Elementen des Euclid, also auch wohl in den ihm vorhergehenden Elementenbüchern vorhanden ist. Hierin liegt der zweite Grund, warum bei den Griechen die Geometrie weiter entwickelt war als die Arithmetik. Sie enthielt diese letztere mit. Man erkannte als bewiesen in der Regel nur das an, was sich auch zeichnen liess, dessen Construction bereits dem Auge die Wahrheit des zu Bestätigenden klar machte. Das war freilich viel bequemer und zugleich viel fasslicher. Das erforderte nicht einen solchen Grad von Abstraction, wie wenn man die Zahlen ohne sinnliche Grundlage mit einander in Verbindung bringen wollte. Zu dieser letzteren Höhe vermochten sich denn auch nur wenige ausnahmsweise befähigte Geister zu erheben, und deren Werke sind es, welche in den arithmetischen Schriften der beiden Zeitgenossen Nicomachus und Theon von Smyrna, und vor Allen des letzten und grössten Analytikers Diophant aus der Mitte des 4. Jahrhunderts uns erhalten sind. Nicomachus muss sogar, und auch das wurde schon erwähnt, als Quelle statt des Pythagoras dienen, [58]) weil er die Zahlenlehre, wie

sie Pythagoras zuerst darstellte, später nur weiter ausführte. Manche arithmetischen Schriften mögen verloren gegangen sein, so besonders eine Schrift des Archimed, im Ganzen haben aber wohl nur wenige Schriftsteller dieser Richtung existirt, wie ich soeben erläuterte. Ich weiss nicht, ob ich als Unterstützung dieser Ansicht anführen darf, dass, wie am Anfange des vorigen Kapitels angegeben wurde, Theophrastus von Lesbos der Geschichte der Geometrie 4 Bücher widmete, während er die Geschichte der Arithmetik in nur einem Buche behandelte.

Ich befürchte kaum, dass man meinen Ausführungen über Ursprung und Inhalt der Arithmetik entgegenhalten werde, dass auch die Egypter rechneten, wie Plato [174]) und Herodot [21]) beurkunden, und zwar wenn wir dem Ersteren glauben seit undenklicher Zeit. Denn der Gott Theuth habe zuerst die Zahl und das Rechnen erfunden sowie die Mess- und Sternkunde, das Brett- und Würfelspiel, ja auch die Buchstaben. Das blosse Rechnen ist noch lange keine wissenschaftliche Arithmetik und nur dieser möchte ich die innerasiatische Herkunft wahren.

In ihr selbst sind zwei Richtungen nicht zu verkennen, eine algebraische, wenn ich mich so ausdrücken darf, und eine zahlentheoretische. Jene ging darauf hinaus, unbekannte Grössen zu berechnen. Sie war der zunächst aus der Praxis hervorgegangene Zweig, und ihre schönste Blüthe sehen wir sie bei einem unmittelbaren Schüler des Pythagoras, bei Thymaridas [175]) treiben. Durch eigenthümlichen, nicht recht deutlichen Zufall nennt auch Jamblichus diese Methode eine Blüthe, ein Epanthem. Der Wortlaut der Auseinandersetzung ist folgender: „Wenn gegebene und unbekannte Grössen sich in eine gegebene theilen (d. h. zusammengenommen dieser gleich sind) und eine von ihnen mit jeder andern zu einer Summe verbunden wird, so wird die Summe aller dieser Paare nach Subtraction der ursprünglichen Summe bei drei Zahlen der zu den übrigen addirten ganz zuerkannt (gleich gesetzt), bei vieren deren Hälfte, bei fünfen deren Drittel, bei sechsen deren Viertel u. s. f.“ In moderner Sprache und den Zeichen der Algebra besteht also das Epanthem des Thymaridas in folgender Regel: Kennt man die Summe S von n Grössen $x + y_1 + y_2 + \cdots y_{n-1}$ so wie die Summen der ersten Grösse x mit jeder einzelnen folgenden $x + y_1 = s_1$, $x + y_2 = s_2, \ldots x + y_{n-1} = s_{n-1}$, so wird die Vereinigung aller dieser Partialsummen, wenn die Hauptsumme

Bayerische Staatsbibliothek München

davon abgezogen wird, zur Auffindung von x dienen: nämlich $s_1 + s_2 + .. + s_{n-1} — S = (n—2)x$. Nesselmann, dem ich diese ganze Stelle entnehme, beweist die Richtigkeit seiner Auffassung noch dadurch, dass sie an den beiden von Jamblich mitgetheilten Beispielen die Probe besteht. Er führt ferner noch die bedeutungsvolle Thatsache an, dass die Benennung der gegebenen und der unbekannten Grösse[176]) genau dieselben sind, welche bei Diophant sich wiederfinden.

Eine zweite Richtung, welche in der pythagorischen und also auch wohl in der babylonischen Arithmetik zu Tage tritt, ist die zahlentheoretische, welche die Eigenschaften der Zahlen an und für sich ins Auge fasst, wie Proclus[177]) sich ausdrückt, d. h. also, um mit einem modernen Schriftsteller[178]) zu reden, Eigenschaften welche von dem Zahlensysteme unabhängig sind. Beweisend dafür, dass diese Richtung nicht nur schon vorhanden, sondern zu einer Vollkommenheit ausgebildet war, welche den gewöhnlichen Ansichten auch von Mathematikern sehr widerspricht, ist zumeist die Arithmetik des Nicomachus in dem derselben oben beigelegten Sinne und die von ihr nur sehr wenig verschiedene Arithmetik des Theon von Smyrna. Summirung von arithmetischen Reihen, sogenannte figurirte Zahlen finden sich weitläufig und, was mehr sagen will, mit richtigen Resultaten abgehandelt. Ausserdem sind die recht eigentlich zahlentheoretischen Begriffe der graden und ungraden Zahlen, der Primzahlen und zusammengesetzten Zahlen, ja sogar der vollkommenen Zahlen auf's Deutlichste auseinandergesetzt. Mag auch, wie ich früher zugab, Vieles davon dem Nicomachus angehören, für dessen Bedeutsamkeit ja gerade schon die Form seiner Schrift angeführt werden konnte, seine Unterscheidungen sind echt pythagorisch. Wenigstens sagt Aristoteles[179]) in der sogenannten pythagorischen Kategorientafel, diese Schule besitze zehn Paar Elementarbegriffe: das Endliche und Unendliche, das Ungrade und Grade, das Eine und Viele, das Rechte und Linke, das Männliche und Weibliche, das Ruhende und Bewegte, das Grade und Krumme, das Lichte und Dunkle, das Gute und Böse, das Quadrat und die Heteromekie. Die beiden letzten Ausdrücke, welche sich als die wichtigsten ergeben, bleiben noch näherer Erklärung vorbehalten, aber auch unter den früheren Gegensätzen erscheinen solche, wie sie vorausgesetzt werden müssen. Noch sicherer wird die altpythagorische Kenntniss jener ziemlich abstracten Dinge durch Vergleichung einer Stelle des Thymaridas, welche behauptet,[180])

Bayerische Staatsbibliothek München

dass Primzahlen immer gradlinig seien, weil sie allein sich nicht als Flächen, d. h. als Producte darstellen lassen, und eine weitere Stelle des Timäus, welche nur verstanden werden kann, wenn man zu deren Erklärung einestheils die geometrische Proportion, anderntheils den Begriff der Primzahl und zusammengesetzten Zahl geometrisch nachgebildet in Anwendung bringt. Die betreffende Stelle hat nämlich ihrem Wortlaute nach etwa den Sinn: [181]) um mit zwei Flächen eine geometrische Proportion anzusetzen, deren äussere Glieder sie sein sollen, genüge es eine dritte Fläche als geometrisches Mittel anzuwenden; sollen aber zwei Körper die äusseren Glieder einer geometrischen Proportion sein, so müsse man zwei von einander verschiedene innere Glieder annehmen, weil ein geometrisches Mittel nicht existire. Dem ersten Anscheine nach ist dieser Ausspruch widersinnig, da man keinen Grund sieht, warum die Proportion $a : b = b : c$, welche richtig wäre, wenn a und c Flächen bedeuten, plötzlich falsch werden soll, wenn dieselben Zahlen die Bedeutung von Körpern annehmen. Da uns nun Timäus nicht daran gewöhnt hat, an sich Verkehrtes in seinen Sätzen zu finden, wenn auch Manches unseren heutigen Anschauungen widerspricht, so muss wohl den gebrauchten Wörtern noch ein anderer tiefer liegender Sinn zukommen, der zu ermitteln gesucht werden muss. In der That ergiebt sich derselbe, wenn wir statt Flächen Flächenzahlen, statt Körper Körperzahlen lesen, und uns Folgendes in's Gedächtniss einprägen. Die Primzahlen heissen bei den Mathematikern, von denen hier gesprochen wird, linear, weil sie in keine Factoren weiter zerlegbar für sich allein betrachtet werden müssen, wie die grade Linie nur nach einer Richtung hin sich erstreckt. [182]) Solche Zahlen, welche in zwei Factoren zerlegt werden können, heissen dagegen Flächenzahlen, weil man sie als Product einer Länge und einer Breite betrachten kann. [183]) Sind beide Factoren lineare Zahlen, so hat man es mit Flächenzahlen im engeren Sinne zu thun, welche nur in einer Weise in Factoren zerlegbar sind, und selbstverständlich ist dabei kein wesentlicher Unterschied, ob die beiden Factoren identisch sind oder nicht; nur werden dem Namen nach die Quadratzahlen von den Rechteckszahlen getrennt. Das Product dreier Factoren wird alsdann Körperzahl genannt, weil bei der Ausmessung der Körper solche dreifache Multiplication auftritt, und wieder hat man hier andere Namen, je nachdem die Factoren alle identisch sind oder nicht; im ersteren Falle sind die

Zahlen Kubikzahlen.[184]) Ferner unterscheiden wir wieder Körperzahlen im engeren Sinne, wenn sämmtliche Factoren Primzahlen sind, die Zerlegung also nur in einer Weise erfolgen kann. Denken wir uns nun mit Martin, dessen Erklärung sicherlich auch hier das Wahre getroffen hat, die Flächenzahlen uud Primzahlen, von denen Timäus spricht, seien solche im engeren Sinne des Wortes, und zwar sollen die zwei gegebenen unter sich theilerfremd sein, was mit der Natur der Dinge, die sie darstellen (Erde und Feuer) weit mehr übereinstimmt, als wenn diese Bedingung nicht stattfände. Jetzt wird der Sinn leicht verständlich. Sind nämlich a, b, c, d, e, f lauter Primzahlen, und zwar die drei ersten von den drei letzten verschieden, so kann man zwischen den beiden Flächenzahlen $a.b$ und $d.e$ das geometrische Mittel $\sqrt{a.b.d.e}$ wirklich darstellen, so oft $a = b$ und $d = e$. Dann heisst es nämlich $\sqrt{a^2.d^2} = ad$ und die verlangte Proportion ist $a^2 : a.d = a.d : d^2$. Nehmen wir dagegen die beiden Körperzahlen $a.b.c$ und $d.e.f$, so lässt deren geometrisches Mittel $\sqrt{a.b.c.d.e.f}$ sich nicht rational darstellen, sich also auch nicht genau angeben, mag man nun a, b, c und d, e, f je unter sich als identische Factoren annehmen oder nicht. Desshalb sagt Timäus, ein geometrisches Mittel existire hier nicht. Wohl aber lassen zwei mittlere Glieder sich darstellen, um die Proportion zu ergänzen, wie z. B. $a.b.c : a.b.d = c.e.f : d.e.f$ und auch dieses stimmt sonach mit der Rede des Timäus überein. Damit scheint nun aber unwiderleglich festgestellt, dass die Schule des Pythagoras die hier auseinandergesetzten Kenntnisse ihr Eigenthum nennen darf.

Und nun bleibt bei dieser Voraussetzung, und bei der weiteren Thatsache, dass von einer griechischen Arithmetik vor Pythagoras nirgends die Rede ist, nur die eine Wahl offen: Entweder hat Pythagoras die ersten Ringe zu dieser ganzen Kette von Sätzen selbst gebildet, oder aber er hat sie von einem anderen Orte mitgebracht, und das könnte nur von Babylon her sein. Fast zu hoch müsste man aber die Intelligenz eines einzelnen Mannes stellen, welcher neben so vielem Anderen, das authentisch auf ihn sich zurückführt, und wovon ich hier nur noch die mathematische Musik[185]) nennen will, von der zu reden sich doch keine passendere Gelegenheit finden dürfte, auch Erfindungskraft und möchte ich sogar sagen Zeit genug gehabt hätte, den Grundstein zu einem so künstlichen Aufbau zu legen, wie die Zahlentheorie ihn zeigt. Ne-

ben diesem inneren Grunde, der gegen die Urheberschaft des Pythagoras spricht, fällt noch Mancherlei für Babylon in die Wagschale. Nicht als ob ich grosses Gewicht legte auf den hohen Grad der Entwicklung, welchen die Zahlentheorie in dem benachbarten Indien erreichte. Die uns dort zu Gebote stehenden Werke sind viel zu neu, um sichere Rückschlüsse auf jene Zeit zuzulassen, welche allein uns interessiren könnte. Ich will auch jene chinesische Methode der Auflösung unbestimmter Aufgaben nur beiläufig erwähnen, welche den Namen ta-yen, die grosse Erweiterung, führt, und welche wohl im dritten Jahrhundert n. Ch. Geb., vielleicht aber auch schon 220 v. Ch. Geb. entstand. Ich habe an einem anderen Orte gezeigt,[186]) dass diese Methode grade nicht berechtigt, an eine sehr ausgebildete Zahlentheorie bei den Chinesen zu glauben. Aber abgesehen von der bis zum Ueberdrusse oft erwähnten harmonischen Medietät, die sicher in Babylon zu Hause ist, muss Pythagoras noch Einiges dort kennen gelernt haben, welches gleichmässig in China und in Griechenland auftritt, welches also nur zwischen beiden Ländern entstanden sein kann, oder doch durch diesen Mittelpunkt hindurch seine Wanderung von Osten nach Westen machen musste. Es sind dieselben mathematischen Lehren, durch welche ich früher den Nachweis des alten chinesisch-babylonischen Verkehrs zu liefern versprach, und was uns gegenwärtig von Wichtigkeit ist, es sind Lehren, die an ganz bestimmte Zahlen sich knüpfen, die also der Vermuthung Raum geben, dass man dort, wo sie sich herschreiben, überhaupt mit Eigenschaften der Zahlen sich beschäftigte.

Das Erste, das ich erwähne, schöpfe ich aus einer Bemerkung von Montucla,[187]) dem gelehrten Verfasser der für seine Zeit nicht hoch genug zu schätzenden ersten eigentlichen und man kann wohl sagen einzigen Geschichte der Mathematik, welche diesen Namen verdient. Zudem setzt er uns meistens durch ziemlich genaue Citate in die Gelegenheit, eine freilich oft nothwendige Controle auszuüben, und ich muss es daher um so mehr bedauern, dass er grade hier versäumte, seine Quellen zu nennen. Es ist mir nicht gelungen, dieselben anderweitig ausfindig zu machen,[188]) und so begnüge ich mich damit, zunächst die ganze Stelle wörtlich zu übersetzen, und dann noch eine Bemerkung daran zu knüpfen. „Ich kann nicht umhin, heist es, eine von den Träumereien der Pythagoräer über die Zahl und deren Tugenden hier anzuführen. Nach

einem sicherlich den Egyptern entliehenen Traumgebilde setzen sie nämlich das Weltall aus den vier ersten graden und den vier ersten ungraden Zahlen zusammen, und dasselbe findet sich durch eigenthümlichen Zufall bei den Chinesen wieder, welche die Erfindung ihrem ersten Kaiser Fo-hi zuschreiben. Die vier ersten ungraden Zahlen stellen dabei die reinen und himmlischen Elemente dar, die graden Zahlen, deren Stellung keine so würdevolle ist, entsprechen denselben Elementen mit irdischer Unreinheit verbunden. Die Summe aller dieser Zahlen ist 36. Das Weltall, die Verbindung aller himmlischen und irdischen Elemente, wurde also durch die Zahl 36 dargestellt, welche grosse Eigenschaften besitzen musste. Das war nach Plutarch, der uns diese Fetzen pythagorischer oder vielmehr egyptischer Philosophie aufbewahrt hat, die berühmte Vierzahl des Pythagoras, bei welcher man schwur, wenn man dem Eide die heiligste Form geben wollte. Plato soll nun, gleichfalls nach Plutarch, diese Vierzahl noch vervollkommnet haben, indem er ihren Werth auf 40 erhöhte. Denn er setzte die vier himmlischen Elemente den ungraden Zahlen 1, 3, 7, 9 gleich. Die mittlere Zahl 5 stellt das Urprincip, den Nous, die höchste Vernunft, die Gottheit dar und musste desshalb wegbleiben. Die vier graden Zahlen 2, 4, 6, 8 stellen die vier irdischen Elemente dar. Und aus diesen acht Zahlen entsteht die Zahl 40, welche also dem Weltall zukommt. Es ist gewiss eigenthümlich, dass während bei den Chinesen Fo-hi als Erfinder der erhabenen Gedanken des ersten Systems gilt, Vou-vang, Vater des Kaisers Vou-vang, der gegen 1120 v. Ch. Geb. in China regierte, das zweite System dort erfunden haben soll. Welch eigenthümlicher Zufall ist nothwendig, um eine so vollständige Uebereinstimmung bei zwei so entfernten Völkern wie Egypter und Chinesen hervorzubringen! Dass zwei Völker dieselbe Wahrheit auffinden, das hat nichts Ueberraschendes, denn die Wahrheit ist nur eine. Aber dass sie in so bizarren Träumereien zusammentreffen, darüber hat man das Recht sich zu erstaunen, wenn man nicht das eine Volk gewissermassen den Vater des anderen nennen will, oder annimmt, dass beide eines gemeinsamen Ursprunges sind. Mir scheint Letzteres schon durch diesen einzigen Umstand fast erwiesen.“ So weit Montucla, den ich wie gesagt leider hier nicht controliren kann. Nur so viel steht fest nach den Untersuchungen Röth's über die Zahlensymbolik,[189]) welche zu den scharfsinnigsten Theilen seines Werkes gehören, aber hier nicht, wenig-

stens in diesem Kapitel nicht weitläufiger auseinandergesetzt werden können, dass Montucla im Irrthume ist, wenn er einen egyptischen Ursprung von Platos Spekulationen so sicher hinstellt, dass vielmehr „dieser ganze spekulative Ideenkreis mit seinen Urzahlen und Urbildern, sowie die mit ihm verbundene auf die Zahlenlehre gegründete spekulative Methode, beide in letzter Abstammung auf dem Boden der zoroastrischen Glaubenslehre wurzeln.“ Somit ist in Montucla's Auseinandersetzung durchweg das Wort Egypten durch Babylon zu ersetzen, und die zu lösende Schwierigkeit des Zusammenhangs dadurch gehoben.

Das Zweite und ungleich Wichtigere, welches hier zu erwähnen ist, als in identischer Weise in Griechenland und China erscheinend, ist der pythagoräische Lehrsatz geknüpft an die Zahlen 3, 4, 5. Ich habe schon früher,[190]) und wohl zuerst, die Entdeckung dieses Satzes in Zusammenhang mit den übrigen pythagorischen Lehren gebracht. Ich will jetzt in aller Ausführlichkeit beweisen, was ich damals nur andeutete. Die chinesische Quelle war mir dabei durch einen Auszug zugänglich, den Biernatzki in seiner früher schon citirten Abhandlung[63]) über die Arithmetik der Chinesen veröffentlicht hat. Kaiser Tschaou-kong, welcher um 1100 v. Ch. Geb. regierte, war ein ganz besonderer Freund der Mathematik. Er scheint so sehr in derselben bewandert gewesen zu sein, dass er selbst ein mathematisches Werk schrieb, oder doch wenigstens bei dessen Verfassung mitwirkte. Die Schrift ist aber noch vorhanden und enthält die Grundwahrheiten der Mathematik in Gestalt eines kurzen Dialoges zwischen Tschaou-kong und einem Gelehrten Namens Schang-kaou. Der Titel der Schrift lautet Tschaou pi d. h. Schenkelbein des Tschaou, indem die einen Winkel bildenden Linien in ähnlicher Weise als Schenkel bezeichnet werden, wie dieses in allerdings späterer Zeit im Griechischen, im Lateinischen und auch noch im Deutschen stattfindet.[191]) Sie besteht aus mehreren Kapiteln, deren erstes eine Art von Uebersicht über das ganze Werk bildet. Dieses ganze Kapitel hat Biernatzki in 22 Paragraphe abgetheilt und vollständig in seine Abhandlung aufgenommen. Ich will nur einige dieser Paragraphen entlehnen, welche mit der Schreibart bekannt machen sollen, und besonders einen Paragraphen, welcher von unmittelbarer Wichtigkeit für meinen Gegenstand ist.

§. 1. Tschaou-kong sagte einmal zu Schang-kaou: Ich habe

vernommen, Herr, Du seiest in den Zahlen sehr bewandert; daher möchte ich Dich fragen, wie der alte Fo-hi die Grade an der Himmelskugel festgestellt hat. Es sind ja doch keine Stufen vorhanden, auf welchen man den Himmel ersteigen kann; und Richtschnur und Maass von der Grösse der Erde lassen sich auf den Himmel nicht anwenden. Desshalb wünschte ich zu erfahren, wie er diese Zahlen feststellte.

§. 2. Schang-kaou erwiderte: Die Kunst zu zählen ist auf den Kreis und auf das Viereck zurückzuführen.

§. 6. Zerlegt man daher einen rechten Winkel in seine Bestandtheile, so ist eine die Endpunkte seiner Schenkel verbindende Linie, wenn die Basis gleich 3 und die Höhe gleich 4 ist, gleich 5.

§. 22. Tschaou-kong rief aus: In der That, das ist vortrefflich.

Es würde mich von meinem jetzigen Gegenstande zu weit seitab führen, wenn ich noch weitere Paragraphe hier nachfolgen liesse, aus welchen z. B. hervorgeht, dass die Chinesen in so früher Zeit, wie während der Regierung des Tschaou-kong schon Messungen veranstalteten, welche der Trigonometrie zum Verwechseln ähnlich sehen, indem man sich des rechten Winkels dazu bediente, der aufgerichtet, umgekehrt oder horizontalliegend angewendet wurde, je nachdem es sich darum handelte Höhen, Tiefen oder Entfernungen zu messen. Hier genügt uns die Betrachtung des §. 6, welcher zeigt, dass die Chinesen mit dem rechtwinkligen Dreiecke aus den Seiten 3, 4, 5 bekannt waren, dass sie es einer besonderen Erwähnung werth hielten. Dasselbe Dreieck spielt nun in der Mathematik des Pythagoras eine so wichtige Rolle, dass es noch heute vor allen anderen durch den Namen des pythagoräischen Dreiecks ausgezeichnet wird. Auch das Alterthum schrieb schon ebendasselbe Dreieck dem Pythagoras zu. Eine Anzahl von Stellen, welche von dem hohen Ansehen zeugen, in welchem unser Dreieck bei den Alten stand, hat Röth gesammelt.[192]) Eine fernere Stelle des Nicomachus nennt das pythagoräische Dreieck beim Namen.[193]) Endlich der römische Architekt Vitruvius bemerkt,[194]) Pythagoras habe ein überaus bequemes Mittel angegeben, einen rechten Winkel genau zu construiren, indem man drei Stangen von der Länge von 3, 4 und 5 Fussen zu einem Dreiecke verbinde.

Die zu lösende Frage besteht nun darin: Wie hängt das pythagoräische Dreieck, welches doch nur ein ganz be-

sonderes rechtwinkliges Dreieck ist, mit dem pythagoräischen Lehrsatze zusammen? Wurde es aus dem allgemeinen Satze nachträglich abgeleitet, warum gab man ihm dann den hervorragenden Titel? War es, wie eben aus diesem Titel vermuthet werden kann, und wie es überhaupt dem Erfindungsgange der mathematischen Wissenschaften entspricht, zuerst bekannt, wie leitete Pythagoras dann den eigentlichen Lehrsatz vom rechtwinkligen Dreiecke daraus ab? Ich denke mir die Sache so. Ich habe gezeigt, dass Pythagoras und seine Schule mit Summationen von Reihen sich beschäftigten, und die letzte Bemerkung über Montuclas Angaben macht es wahrscheinlich, dass solche Summationen in Babylon an der Tagesordnung waren. Ich habe ferner angeführt, dass man nicht bei den arithmetischen Reihen erster Ordnung stehen blieb, sondern auch die figurirten Zahlen betrachtete. Das heisst etwas anders ausgedrückt, man bildete eine arithmetische Reihe und nahm die Summe des ersten, der beiden ersten, der drei ersten Glieder u. s. w. So fand sich z. B. dass die Reihe der ungraden Zahlen in der angegebenen Weise die Quadratzahlen erzeugen,[195]) ja diese Eigenschaft wurde sogar von Theon von Smyrna als Definition der Quadratzahlen benutzt.[196]) Was war natürlicher, als dass man die Glieder der neu gebildeten Reihe, welche wir heute zu Tage eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung nennen, einem analogen Additionsverfahren unterwarf, um zu den Pyramidalzahlen zu gelangen, und in der That kannten die *Alten*[197]) diese Zahlen. Da musste sich bemerklich machen, dass in dieser zweiten Reihe einige Zahlen der Art waren, dass wenn nicht sämmtliche, sondern nur zwei neben einander stehende addirt wurden, als eigenthümliches Resultat die nächstfolgende Zahl auftrat, dass nämlich 9 und 16 zusammen 25 gaben.

Ich fragte, was natürlicher als dieses Verfahren sei, und der geneigte Leser (um wie viel mehr der ungeneigte) wird mir die Frage zurückgeben, was unnatürlicher sei? Gewiss, die Annahme erscheint für den ersten Augenblick gekünstelt, aber auch nur für den ersten Augenblick. Zunächst will ich jetzt an das erinnern, was ich im vorigen Kapitel bei Gelegenheit der Zusammensetzung der Flächen aus Elementardreiecken aussprach. Die Schule des Pythagoras, also auch wohl der Lehrer selbst, liebte das mathematische Experiment. Und wie man geometrisch experimentirte, ganz ähnlich verfuhr man in der Arithmetik. Ich habe schon ge-

sagt, dass man die Quadratzahlen erhielt, indem man die Reihe der ungraden Zahlen addirte. Aber wir wissen ferner, dass man auch die Reihe der graden Zahlen addirte, dass man die Bemerkung machte, die so entstehenden Zahlen können immer als Product von zwei aufeinanderfolgenden Zahlen der natürlichen Zahlenreihe angesehen werden,[198]) und dass man desshalb diese Zahlen als heteromeke Zahlen bezeichnete,[199]) d. h. als Zahlen, deren einer Factor um die Einheit grösser ist, als der andere. Nun ist aber zur Gewissheit erhoben, dass diese Methoden altpythagorisch sind, nicht etwa dem Theon oder dem Nicomachus angehören; denn durch die angegebene Betrachtungsweise allein ergiebt sich ein wahrer Gegensatz zwischen dem Quadrate, als der Summirung von Ungraden, und der Heteromekie, als der Summirung von Graden, wie Aristoteles ihn als eine der pythagorischen Kategorien aufzählt.[179]) Ein weiteres Beispiel bestand darin, dass man die gewöhnliche Zahlenreihe ebenso behandelte, wie vorher die ungraden und die graden Zahlen für sich, und so die Dreieckszahlen erhielt,[200]) das sind Zahlen, welche durch einzelne Punkte dargestellt in die Figur eines gleichseitigen Dreiecks gezeichnet werden können. Ja man war mit einer Entstehungsweise solcher Zahlen nicht zufrieden. Man stellte die Reihe der Quadratzahlen 1, 4, 9, 16 u. s. w. und die von 3 anfangende Reihe der ungraden Zahlen 3, 5, 7, 9 u. s. w., wo also bei dieser zweiten Reihe das Anfangsglied 1 weggelassen worden war, unter einander, und addirte beide Reihen, also immer nur zwei Zahlen auf einmal. Da erhielt man[201]) wieder die Quadratzahlen und zwar von der 4 anfangend. Das war dem Sinne nach dieselbe Methode, welche zuerst zur Bildung der Quadratzahlen führte, aber anders ausgesprochen; und Theon hielt es nicht für überflüssig diesen anderen Ausspruch wirklich zu thun. Scheint da nicht auf der Hand zu liegen, dass man ein Untereinanderstellen zweier Reihen, wie es mit den Quadratzahlen und den ungraden Zahlen geschehen war und zu Interessantem geführt hatte, auch mit Reihen einer und derselben Natur vornahm? Nicomachus[202]) bestätigt diese Vermuthung auf's Vollständigste in Bezug auf Dreieckszahlen. Er zeigt wie die Dreieckszahlen 1, 3, 6, 10 u. s. w. wenn wieder die Dreieckszahlen, ohne die 1, nämlich 3, 6, 10, 15 u. s. w. daruntergesetzt und hinzugefügt wurden, die Quadratzahlen liefern. Wenn man nun dasselbe auch mit Quadratzahlen und Quadratzahlen vornahm, und auch bei den in zweiter Reihe befindlichen Quadrat-

zahlen die 1 wegliess, war das nicht eine ganz natürliche Consequenz der bisherigen Versuche? Und was war dieses anderes als das Verfahren, von dem ich vorhin sagte, dass man es eingeschlagen habe und durch dasselbe zu dem Resultate $9 + 16 = 25$ kam, zu einem Resultate, welches einzig dastand[203]) und desshalb um so mehr überraschen musste?

So waren denn die Zahlen 3, 4, 5 und die Eigenschaft der Producte dieser Zahlen in sich selbst dem Augenmerke des Pythagoras vor allen anderen Zahlen gekennzeichnet. Wenn er nun erfuhr, und bei dem babylonisch-chinesischen Verkehre konnte er es in Babylon erfahren, dass dieselben Zahlen auch die Längen der drei Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks darstellen, was musste grade für Pythagoras die Folge sein? Er musste auch hier den Versuch machen, den ich schon früher, als in dem Charakter seines Studienganges begründet, nachwies, den Versuch jetzt, wo die Zahlen 3, 4, 5 geometrische Bedeutung annahmen, den Satz $3^2 + 4^2 = 5^2$ auch geometrisch zu beweisen. Und was er wohl sicher nicht erwartet hatte, ereignete sich. Er fand dass der Satz von der Gleichheit des Quadrates der Hypotenuse mit der Summe der Quadrate der beiden Katheten nicht bloss bei dem einen Dreiecke von den Seiten 3, 4, 5 stattfand, sondern dass er eine gemeinschaftliche Eigenschaft aller rechtwinkligen Dreiecke entdeckt hatte. Ich sage, er hatte sie entdeckt, denn darüber hat den übereinstimmenden Zeugnissen aller Schriftsteller gegenüber noch nie ein Zweifel statt gefunden, dass Pythagoras wirklich den nach ihm benannten Satz zuerst bewies. Wie er den Beweis führte, wissen wir allerdings nicht mehr, denn der namentlich in früheren Zeiten am Meisten bekannte sogenannte euclidische Beweis ist, wie Proclus uns mittheilt, das Eigenthum dieses Mathematikers.

Prüfen wir meine Hypothese, welche hoffentlich schon einigen Grad der Wahrscheinlichkeit gewonnen hat, noch weiter. Wenn es sich so verhielt, wie ich auseinandersetzte, welchen Ideengang musste Pythagoras von nun an weiter verfolgen, den geometrischen oder den arithmetischen? Sicherlich wohl einen aus beiden gemischten, einen dem Inhalte nach vorwiegend arithmetischen in geometrischem Gewande. Er musste andere Zahlen prüfen und dabei entdecken, dass es gewisse Zahlen giebt, welche zwar das Maass eines Quadrates genau bestimmen, aber unter deren Annahme die Seite des

Quadrates nicht näher angebbar war, mit anderen Worten Zahlen, deren Quadratwurzeln irrational sind. Solche Zahlen erscheinen z. B. bei den beiden Elementardreiecken des vorigen Kapitels. Das eine derselben scheint absichtlich gewählt, um zu zeigen, dass die Hypotenuse ($= 2$) und die kleinere Kathete ($= 1$) angebbar sein können, während die grössere Kathete ($= \sqrt{3}$) unangebbar ist. Das andere, also das gleichschenklig rechtwinklige Dreieck, führt Aristoteles ganz besonders an[204]) mit der Bemerkung, bei ihm seien Hypotenuse und Katheten nicht in Theilen derselben Einheit angebbar. Genau damit übereinstimmend giebt Proclus[152]) uns an, dass Pythagoras es gewesen, der die Theorie der Irrationalgrössen entdeckte.

Waren diese einmal bekannt, so ergab sich als nächste Frage: Welche ganze rationale Zahlen sind es, mit deren Hülfe rechtwinklige Dreiecke construirt werden können? Giebt es Methoden, solche Zahlen zu finden, oder in die Sprache moderner Algebra übersetzt, giebt es ganze rationale Auflösungen der unbestimmten Gleichung zweiten Grades $x^2 + y^2 = z^2$, und wie findet man sie? Dass Pythagoras auch diese Frage stellte, ist gleichfalls bekannt. Wir kennen aus dem Zeugnisse des Proclus,[205]) sogar zwei Methoden der Auflösung, deren eine dem Pythagoras selbst, die andere dem Plato oder nach einer davon verschiedenen Angabe[206]) einem gewissen Archytas zugeschrieben wird. Ich sollte lieber sagen, einem ungewissen Archytas, da über dessen Persönlichkeit das tiefste Dunkel herrscht. Ich will nun nach Röth, mit welchem ich hier wieder zusammentreffe, nachdem ich eine ganze Weile den von ihm eingeschlagenen Pfad als unwegsam und irreleitend verliess, noch in Kürze versuchen, jene Methoden selbst darzustellen und zu zeigen, wie man etwa zu denselben gelangen konnte. Denkt man sich die Gleichung $x^2 + y^2 = z^2$ so verändert, dass das Quadrat der einen Kathete auf die andere Seite gebracht wird, so ergiebt sich $x^2 = (z + y)(z - y)$ d. h. es ergiebt sich eine wenigstens rationale Auflösung, so oft $z + y$ und $z - y$ ähnliche Flächenzahlen sind, wie die Alten sich ausdrücken,[207]) d. h. solche Zahlen, welche mit einander vervielfacht ein Quadrat bilden, und deren allgemeinste Form demnach $\frac{\alpha^2}{\gamma}$, $\frac{\beta^2}{\gamma}$ ist. Ein Name, der beiläufig bemerkt bis weit in die Neuzeit hinüberreicht und z. B. noch bei dem berühmtesten Zahlentheoretiker des 16. Jahrhunderts, bei Hieronymus

Cardanus vorkommt. Dass die angegebene Bedingung genügt, ebenso wie sie unzweifelhaft nothwendig ist, zeigt sich alsbald, wenn man die weiteren Folgerungen zieht, die daraus hervorgehen. Ist $z + y = \frac{\alpha^2}{\gamma}$, $z - y = \frac{\beta^2}{\gamma}$ so wird selbstverständlich $x = \frac{\alpha . \beta}{\gamma}$, $y = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2\gamma}$, $z = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2\gamma}$ und somit die Aufgabe gelöst, indem $\left(\frac{\alpha^2 + \beta^2}{2\gamma}\right)^2 = \left(\frac{\alpha^2 - \beta^2}{2\gamma}\right)^2 + \left(\frac{\alpha\beta}{\gamma}\right)^2$.

Wenn nun auch natürlicher Weise die Alten diese Bezeichnungen nicht besassen, also die in der letzten Gleichung enthaltene allgemeinste Auflösung der Aufgabe sicherlich nicht kannten, so ist doch keiner der hier gezogenen Schlüsse von der Art, dass er in einer etwas specielleren Form den Mathematikern, die ich im Auge habe, nicht zugetraut werden dürfte. Das Einzige, was fraglich erscheinen könnte, wäre, ob die Griechen im Stande waren, aus der Summe und der Differenz zweier Zahlen (oben $z + y$ und $z - y$) die Zahlen selbst zu finden? Doch auch diese Möglichkeit muss bejaht werden in Erinnerung an das Epanthem des Thymaridas, welches eine ganz ähnliche Methode ist wie die, welche zur Auflösung jener Aufgabe dient. Man könnte vielleicht noch weiter gehen, und das Epanthem eine Verallgemeinerung jener Aufgabe nennen, insofern es sich bei ihm um mehr als zwei Unbekannte handelt.

Die beiden Methoden des Pythagoras und des Plato liegen nun in der vorhin gefundenen Formel wirklich als Specialfälle verborgen, und gehen aus ihr hervor, die erstere wenn $\beta = \gamma = 1$, die zweite wenn $\beta = \gamma = 2$ gesetzt wird. Darin liegt indessen keineswegs ein Widerspruch gegen deren Auftreten zu verschiedener Zeit, wie Röth[208]) wohl irrig annimmt. Grade weil, wie ich schon sagte, die Griechen solche allgemeine Formeln nicht hatten, mussten sie Specialfälle oft in übergrosser Anzahl unterscheiden, konnte es also sehr wohl eintreffen, dass der eine Fall schon bekannt war, der andere erst später aufgefunden wurde. Die Methode des Pythagoras ist nach unserer Schreibweise: $\left(\frac{\alpha^2 + 1}{2}\right)^2 = \left(\frac{\alpha^2 - 1}{2}\right)^2 + (\alpha)^2$, die des Plato: $\left(\frac{\alpha^2}{4} + 1\right)^2 = \left(\frac{\alpha^2}{4} - 1\right)^2 + (\alpha)^2$. Darin zeigt sich denn auch der Unterschied, der von Proclus[205]) gemacht

wurde, und gemacht werden musste, dass Pythagoras seinen Ausgangspunkt von den ungraden Zahlen nahm, Plato dagegen den seinen von den graden Zahlen. Denn nur unter dieser Voraussetzung werden die drei Seiten nicht nur rationale, sondern auch ganze Zahlen. Somit wäre auch diese Untersuchung zu einigem Abschlusse gebracht, und so mögen denn wieder einige Thesen den Hauptinhalt zusammenfassen.

1) Die wissenschaftliche Rechenkunst ist phönikischen oder wahrscheinlicher babylonischen Ursprunges.

2) Aus ihr zweigte sich in Babylon auch eine Zahlentheorie ab.

3) Beide Richtungen lernte Pythagoras dort kennen, die eine führte zum Epanthem des Thymaridas und zur Lehre von den Proportionen und Progressionen, die andere zur Unterscheidung von Primzahlen, zusammengesetzten Zahlen und ähnlichen Kategorien.

4) In arithmetischen Experimenten summirte man Reihen in den verschiedensten Combinationen. Mittelst dieser Untersuchungsmethode wurde erkannt, dass $3^2 + 4^2 = 5^2$.

5) Chinesischen Ursprungs ist die Kenntniss, dass die 3, 4, 5 Elemente eines rechtwinkligen Dreiecks sind.

6) Eben daher stammt vielleicht der Name Schenkel in seiner geometrischen Bedeutung.

7) Ebendort finden sich zahlensymbolische Spekulationen wieder, welche ursprünglich babylonisch sich auch nach Griechenland verbreiteten.

8) Der pythagoräische Lehrsatz entstand aus dem Bemühen, den zahlentheoretischen Satz $3^2 + 4^2 = 5^2$ mit Hülfe des rechtwinkligen Dreiecks zu beweisen.

9) In Folge dieses Satzes entdeckte Pythagoras die Irrationalzahlen.

10) Weitere Folge war die Erfindung von Methoden zur Auflösung der unbestimmten Gleichung zweiten Grades mit drei Unbekannten durch ganze rationale Werthe.

11) Unter den Nachfolgern des Pythagoras blieben die Schriftsteller von eigentlichen Lehrbüchern bei der geometrisch-arithmetischen Methode; nur Wenige verfuhren rein arithmetisch, wie es in Babylon Sitte war.

VIII. Die Zahlzeichen der Griechen.

In den beiden letzten Kapiteln habe ich mich bestrebt, den Beweis zu liefern, dass Pythagoras auf seinen freiwilligen und unfreiwilligen Reisen, weder in Egypten noch in Babylon, seine Zeit unnütz verlor, sondern auch in mathematischer Beziehung reichhaltiges Material von dort mitbrachte. Dazu gehörte, wie freilich bisher noch nicht hervorgehoben wurde, wahrscheinlich auch das Rechenbrett, welches an allen jenen Orten existirte, wo Pythagoras verweilte, und welches er daher kennen lernen musste. Die Möglichkeit bleibt zwar nicht ausgeschlossen, dass das Rechenbrett auch vorher schon in Griechenland sich eingebürgert hatte; dann ist aber doch aller Vermuthung nach Pythagoras der Urheber einer Verbesserung, die ich gehörigen Ortes näher beleuchten werde. Welcherlei Kunde von Zahlensystem und Zahlzeichen Pythagoras in den genannten Ländern antraf, habe ich gleichfalls auseinandergesetzt, und auf diesem Boden werde ich nun weiter bauen. Ich fürchte dabei kaum, dass viele meiner Leser der Ansicht von Lewis sein werden, dem durch seine früheren Veröffentlichungen mit Recht auch als Gelehrter gerühmten englischen Kriegsminister, der aber jetzt [209]) plötzlich mit einer Energie, die ihn jedenfalls als seinem Amte vollständig gewachsen erscheinen lässt, einen Vernichtungskrieg gegen altegyptische und altassyrische Kunst und Wissenschaft begonnen hat. Ich werde also in Fortführung des früheren Themas jetzt die Zahlzeichen und Rechenmethoden zu besprechen haben, welche in Griechenland zu verschiedenen Zeiten auftraten, und welche eine ziemliche Abwechslung zeigen.

Wenn auch kaum unter die Zahlzeichen zu rechnen muss doch angegeben werden, dass die Griechen die Zahlwörter mitunter

ausschrieben,[210]) und dass diese Sitte sogar noch bis etwa ein Jahrhundert v. Ch. Geb. auf Inschriften nicht ganz verschwunden war. So ist namentlich noch eine Inschrift aus Taormina in Sicilien aus dieser Zeit vorhanden, welche ziemlich viele Zahlen enthält, die alle ausgeschrieben sind, und zwar nach sicilischem Sprachgebrauche in der Reihenfolge, dass man von der niedersten Unterabtheilung und der niedrigsten Ordnung der Einheiten zu dem Höheren aufsteigt.[211]) Statt 50 Talente und 106 Litren, wie wir heute sagen würden, steht: sechs und hundert Litren und funfzig Talente.

Gleichfalls kaum als Zahlzeichen erwähne ich jener ältesten Methode der Griechen, welche Jamblich uns nennt,[212]) und welche darin bestand, dass man die Zahl in lauter einzelne, neben einander stehende Striche auflöste. Jamblich ist freilich der einzige Gewährsmann dafür. Nicomachus, zu dessen Werk Jamblichus einen Commentar schrieb, in welchem jene Angabe sich findet, sagt nur, jene Bezeichnungsweise wäre die einfachste, ungekünstelste. Wenn daher Jamblich einen Schritt weiter geht und behauptet, man habe früher in dieser naturwüchsigen Weise geschrieben, so meint Nesselmann, dem ich diese Stelle entnehme, diese Nachricht könne auf blosser Conjectur, oder auf Missverständniss der Stelle bei Nicomachus, oder auf Kenntniss von Thatsachen beruhen. Das Letztere sei bei einem so spät lebenden Autor, wie Jamblichus, kaum denkbar. Ich wüsste indessen nicht, warum man grade in diesem Falle Anstand nehmen sollte einer ganz bestimmt ausgesprochenen Behauptung des Jamblichus Glauben zu schenken. Enthält sie doch Nichts, was in einem Anfangsstadium so sehr überraschen könnte. Wird doch das Anmerken von Zahlen mit Hülfe einzelner Striche bis in unser Jahrhundert fast aller Orten geübt, wo es sich darum handelt, die Zahlen allmälig entstehen zu lassen. Beruht doch, wie Krist scharfsinnig bemerkt,[213]) die Art, nach welcher die Schlagwerke unserer Uhren die Zeit angeben, auf demselben Gedanken. Ist doch endlich sogar die Uebersicht der sogenannten Kerbhölzer nicht einmal schwierig, wenn man sich gewöhnt, die Striche gruppenweise zu ordnen, wozu man so leicht gelangte, und wie wir es z. B. von Egypten her kennen.

Ich komme bei dieser Gelegenheit nochmals auf die von Müller und anfänglich von Piccard angenommene Entstehung der Ziffern zurück, um etwaigen Vorwürfen, die man mir machen könnte

zu begegnen. Man könnte mir nämlich einwerfen: wie hast Du das Recht, die Hypothese dieser beiden vorher zurückzuweisen, wenn Du selbst alsdann zugiebst, dass ein Schreiben der Zahlen durch so viele Striche, als das Zahlwort angiebt, ein naturgemässes, und eine Gruppirung derselben etwas nicht gar schwer zu ersinnendes sei? Darauf erwidre ich auf's Neue, dass eben nicht das Princip von mir angefochten wurde, sondern die ganz bestimmte Gruppirung, die ganz bestimmten Zeichen, welche Jene zu Grunde legten. Wollte man unsere Zahlzeichen aus Strichen abstammen lassen, so musste deren älteste Form herzustellen versucht werden, und zwar in einer Weise, welche ich die der allmäligen Entstehung genannt habe, d. h. so dass jedes folgende Zeichen aus dem unveränderten vorhergehenden Zeichen durch Hinzufügen eines neuen Striches gebildet wird. Würden aus einer solchen Gruppirung von Strichen, wie ich sie hier erläutert habe (**Figur 20**) die ältesten Zahlzeichen sich ableiten lassen, ehe sie in langen Jahrhunderten diese und jene Veränderung durchmachten, dann wäre ich der Erste, der die Behauptung unterschriebe: so und nur so könnten die Zahlzeichen überhaupt entstanden sein. Aber dies trifft eben nicht zu. Die Thatsachen sind dagegen in Widerspruch. Und desshalb muss von der dem Gedanken nach einfachen und natürlichen Ableitung der Zahlzeichen aus Strichen Umgang genommen werden.

Von der altgriechischen Strichnotation sind nur wenige Ueberreste nachweisbar. Vielleicht ist ein Beispiel von sieben neben einander befindlichen Strichen hierher zu rechnen, welches auf einem dem Dionysos geweihten Steine wahrscheinlich aus dem Jahre 351 v. Ch. Geb. vorkommt.[214]) Vielleicht ist aber auch dieses Beispiel unter die Bezeichnungsmethode zu rechnen, welche als nächster Fortschritt erwähnt wird, und welche darin bestand, dass man die Anfangsbuchstaben einiger Zahlwörter als Repräsentanten derselben wählte. In der That kann hier ein Zweifel obwalten, welche Bezeichnungsmethode vorliegt, indem der Vertikalstrich ebensowohl ein blosser Strich wie ein grosses Jota sein kann.

Die Bezeichnung durch Anfangsbuchstaben war nämlich folgende. Herodianus,[215]) ein byzantinischer Grammatiker, der etwa 200 n. Ch. Geb. lebte, giebt als Zeichen der Einheit ein grosses Jota an und will dieses in Inschriften aus den Zeiten Solons, also etwa 30 Jahre vor der Geburt des Pythagoras gesehen haben. Priscianus,[216]) Fachgenosse, Landsmann und eifriger Uebersetzer

des Herodianus in die lateinische Sprache entweder im 5., oder wie Andere wohl mit mehr Recht glauben im 6. Jahrhunderte sagt gleichfalls ausdrücklich, jener Einheitsstrich der Griechen sei ein Jota, indem wenigstens das Femininum des Wortes eins bei den epischen Dichtern mit Jota anfängt und vielleicht auf eine Grundform des Wortes schliessen lässt, die ähnlich klang. Für fünf wurde ein Pi geschrieben, wegen des Wortes pente. Zehn, deka, war durch Delta bezeichnet; hundert, hekaton durch Eta, welches wie Priscian ganz richtig bemerkt ursprünglich kein E-laut, sondern wie später bei den Römern Aspirationszeichen war. Die Zahl tausend, chilia, schrieb man Chi, endlich zehntausend, myria, durch ein Mi. Ausserdem waren diese Buchstaben in und aneinander geschrieben als Zusammensetzungen in Gebrauch um die Producte der Fünf in Einheiten verschiedener Ordnung zu bezeichnen, und auch ein nach demselben Principe zusammengesetztes Zehntausend als zehn mal tausend wird von Priscian noch mitgetheilt. Die Anschauung (**Figur 24**) belehrt am besten, wie diese Zusammensetzungen gebildet wurden, wobei ich besonders den Angaben von Franz folgte, [210]) welcher seine Zeichen wirklichen Inschriften nachgebildet hat. Die Schreibweise ist dabei ganz allgemein die, dass der Haupttheil der Zahl am weitesten links steht, also der in Babylon und auf egyptischen Hieroglyphen gewöhnlichen Art entsprechend. Die obere Zeitgrenze dieser besonders in Attika häufigen Gattung von Bezeichnung wurde bereits angegeben. Als untere Zeitgrenze dürfte das perikleische und nachperikleische Jahrhundert, also die unmittelbar auf den Tod des Pythagoras folgende Zeit bis gegen die Mitte des 4. Jahrhunderts einige Berechtigung haben. [217]) In anderen Gegenden als Attika lässt sich die Bezeichnung auch noch verfolgen, und namentlich die Varianten bötischen Ursprunges sind von einigem Interesse (**Figur 25**), welche die betreffenden Anfangsbuchstaben in der dort landesüblichen Gestalt verwenden. Dass das Zeichen für hundert in dieser Schreibart ein zusammengesetztes aus den beiden ersten Lauten von hekaton, nämlich aus der Aspiration und dem e ist, hat seinen Grund darin, dass die blosse Aspiration auf diesen Inschriften schon eine anderweitige Bedeutung hat. Sie wird als hemiobolion, ein halber Obolus gelesen.

Noch innerhalb der Periode, welche ich für die Benutzung dieser Zahlzeichen angab, bildeten sich zwei neue Methoden aus, beide wohl ziemlich gleichzeitig mit der sogenannten ionischen

Schrift, deren älteste bekannte Spuren selbst auf das Jahr 470 etwa zurückverweisen.[218]) Die eine dieser Methoden benutzt die 24 Buchstaben des ionischen Alphabets, um die Zahlen 1 bis 24 dadurch auszudrücken. Nach ihr wurden die 10 Kurien der athenischen Richter numerirt,[219]) wobei die alterthümliche Gestalt des Zeta nicht irre leiten darf (**Figur 26**). Nach ihr haben auch die Alexandriner noch die Gesänge des Homer mit Ordnungszahlen versehen, und auch bei anderen Völkern ist die Bezeichnungsweise nicht durchaus fremdartig. Ich finde wenigstens die Angabe,[220]) der 118. Psalm und die Klagelieder des Jeremiä seien in ähnlicher Weise mit den fortlaufenden Buchstaben des hebräischen Alphabetes versehen worden.

Die zweite Methode bedient sich gleichfalls der Buchstaben, aber in einer Weise, wie sie von keiner der bisher besprochenen Nationen mit Bestimmtheit[16]) geübt ward, wie wir sie dagegen bei den semitischen Völkern wieder finden werden. Die auf einander folgenden Buchstaben bedeuten nämlich 1, 2, 3 bis 9, 10, 20, 30 bis 90 und 100, 200, 300 bis 900. Das sind freilich 27 eines Zeichens bedürftige Zahlen, während das griechische oder vielmehr das ionische Alphabet nur aus 24 Buchstaben bestand. Man sah sich daher genöthigt, auf das ältere Alphabet zurückzugehen, und einige Zeichen desselben, die als Buchstaben abhanden gekommen waren, zum Zwecke der Zahlbezeichnung, den sie früher schon erfüllten, beizubehalten.

Es kann wohl keine grosse Schwierigkeit machen, über diesen Zusammenhang verschiedener Alphabete ins Klare zu kommen. In Egypten sahen wir etwas ganz Aehnliches. Auch dort waren ältere Alphabete, wenn ich mich so ausdrücken darf, die aus einer viel grösseren Anzahl von Zeichen bestanden als die jüngeren, weil dem ursprünglich hieroglyphischen Charakter der Schrift nach derselbe Laut sehr verschiedentlich bezeichnet werden konnte. Ebenso ist die jüngere Keilschrift die bei weitem einfachere an Gestalt und Anzahl der einzelnen Zeichen, wenn man sie mit den älteren Keilschriften vergleicht. Und ein drittes Beispiel zeigt sich jetzt in dem Alphabete, welches man das phönikische zu nennen gewohnt ist, und welches wahrscheinlich selbst hieroglyphischer Entstehung in seinen Urformen der egyptischen Schrift sich nähert. Die älteste bekannte Form desselben ist wohl die aus Münzen der Insel Kypros und vor Allen aus der Erztafel von Idalion, einer Binnenstadt

derselben Insel, entzifferte.[221]) Röth hat aus diesen nur geringen Ueberresten bereits ein Alphabet von 120 Zeichen ermittelt, indem allein das Ch 7fach, das Th eben so oft, das M 9fach vorkommt. Das eigentlich phönikische Alphabet hat nun schon die meisten Zeichen abgestreift. Es besitzt 22 Consonanten,[222]) unter welchen allerdings das Aleph und das Ain mitgerechnet sind, deren consonantische Geltung als Gaumenlaute zwar nicht in Zweifel zu ziehen ist, aber uns darum nicht minder in Erstaunen setzt, als etwa der indische Vokal Lri. Aus Phönikien stammten alsdann weiter sämmtliche semitischen Alphabete, aber auch das altgriechische, welches Kadmos der Gründer von Theben in Böotien eingeführt haben soll. Neuere Forschung ist freilich geneigt dem Kadmos die Existenz als historische Figur abzusprechen, und sieht in ihm bald einen phönikisch-egyptischen Gott,[223]) bald sogar nur das semitische Wort Kedem, der Osten,[224]) so dass der Ausdruck „von Kadmos" nichts Anderes heisst, als von Osten her. Wie dem nun sei, jedenfalls ist der phönikische Ursprung des altgriechischen Alphabetes durch vielfältige Aussage alter Gewährsmänner[225]) gesichert; und die Einführung des sogenannten ionischen Alphabetes, welches einzelne Buchstaben wegliess, anderen ursprünglichen Consonanten eine Vokalbedeutung unterlegte, noch andere neu erfand, ist nun endlich der letzte Schritt, dessen ungefähres Datum vorher schon angegeben wurde.[218])

Von diesem ionischen Alphabete wurde also, ich wiederhole es, auf das altgriechische z u r ü c k g e g r i f f e n, um 3 Zeichen zu den 24 üblichen Buchstaben hinzuzufügen. Man darf zwar sicherlich die Sache nicht so auffassen, als habe man zuerst den Versuch gemacht, mit den 24 vorhandenen Zeichen allein auszukommen, und zwar ähnlich wie es bei den Semiten üblich war, und als dieses nicht ging, habe man den sinnreichen Gedanken gehabt, noch 3 alte Zeichen an beliebigen Stellen einzuschieben. Diese Erklärungsweise, deren man sich übrigens früher bediente,[226]) ist der Wahrheit gradezu entgegengesetzt. Die Verwerthung der 22 Buchstaben des phönikischen Alphabets zur Darstellung von 1 bis 9, 10 bis 90, 100 bis 400 ist nämlich uralt. Ebenso alt ist auch die Schwierigkeit Zeichen für 500 bis 900 zu bilden, welche wir bei Besprechung der arabischen Zeichen wieder auftreten sehen werden. A s nun das ionische Alphabet entstand, waren im Altgriechischen bereits von den 22 phönikischen Buchstaben der Eine, das sogenannte

Zade, gänzlich weggefallen,[227]) zwei Zischlaute, Samek und Sin, hatten ihre Plätze vertauscht und waren in der neuen Stellung zu Sigma und Xi geworden, der vierte Zischlaut Sain war als Zeta dem Werthe und Platze nach erhalten. Die 4 Gaumenlaute Aleph, He, Chet, Ain waren jeder an seiner Stelle in die Vokale Alpha, Epsilon, Eta, Omicron übergegangen. Es waren somit statt 22 Buchstaben nur 21 noch vorhanden, welche von dem 1. bis 17., Alpha bis Pi, ihre alten Stellen behalten hatten, vom 18. bis 21. hingegen die früheren 19. bis 22. ersetzten, weil der frühere 18. Buchstabe ausgefallen war. Dem entsprechend musste der Zahlenwerth der einzelnen Buchstaben von Alpha bis Pi unverändert wie im Phönikischen 1 bis 80 lauten. Der Zahlenwerth der folgenden Buchstaben rückte um einen Platz. Während nämlich ursprünglich Zade = 90, Koph = 100, Tav = 400 war, musste jetzt nach weggefallenem Zade das Koph = 90 und schliesslich Tav unter dem Namen Tau = 300 sein. Das ionische Alphabet behielt nun zwar diese Buchstaben als Zahlzeichen bei, als eigentliche Laute hingegen streifte es wieder zwei derselben, das Vav = 6 und das Koph = 90 ab. Als blosse Zahlzeichen hiessen diese beiden jetzt Bau und Koppa. An die 21 altgriechischen Buchstaben schlossen sich, wann kann uns hier gleichgültig sein, jedenfalls ziemlich bald 5 neu erfundene bei den Griechen an. Es war vor Allen Phi und Chi, welche auf der doppelten Aussprache der alten Pe und Kaph ohne und mit Aspiration beruhen; es war Psi oder der mit Zischlaut verbundene Lippenbuchstabe, welchen schon die analogen Verbindungen der Zahn- und Gaumenbuchstaben, Zeta und Xi, nothwendig machte; es waren endlich die Vokale Ypsilon, Omega, welche jene drei neuen Buchstaben in die Mitte nahmen, und die sich, wie Nesselmann mir etwas dunkel bemerkt, vielleicht auf das zu voreilig vernachlässigte Vav basiren. Diese 5 Buchstaben erhielten also der Reihe nach die Werthe 400 bis 800. Ein letztes Zeichen für 900 scheint nun allerdings conventionell eingeführt worden zu sein. Man wählte dazu den rauhen Zischlaut San, welcher in jener Form geschrieben wurde, die einem verschlungenen Sigma und Pi ähnelt und in grammatischer Spielerei desshalb Sanpi genannt wurde. Ob der ohne weitere Begründung ausgesprochenen Behauptung Heilbronners,[228]) das Sanpi habe auch Tsaddi geheissen, Glauben beizulegen ist, hat schon Nesselmann weislich angezweifelt. Wäre es an dem, so hätten wir damit auch den letzten Zisch-

laut des phönikischen Alphabetes, das verloren geglaubte Zade, im ionischen Alphabete wieder aufgefunden.

Mit diesen Buchstaben wurden nun mancherlei Combinationen vorgenommen, bei welchen zum Theil eine Benutzung des Stellenwerthes in gewisser Beziehung auftrat, zum Theil auch nicht. Wenn die letztere wiewohl seltenere Methode zunächst hervorgehoben werden soll, so bestand sie darin, dass die Buchstaben in irgend einer leicht behaltbaren Verbindung, also etwa in Gestalt eines bekannten Wortes, auftreten und so einzeln addirt werden. Das Wort Neilos (νειλος) z. B. ist alsdann 50 + 5 + 10 + 30 + 70 + 200 = 365 d. i. die Zahl der Tage, welche das Jahr enthält und in der That bezeichneten die Egypter späterer Zeit (vielleicht wohl die Alexandriner?) nach Delambre[229]) das Jahr in dieser Weise. Wie zu mnemonischen Zwecken wurde diese Spielerei auch wohl als eine Art von Geheimschrift benutzt, wie z. B. das Thier der Apocalypse als 666 beschrieben wird, eine Zahl in welcher nach Irenäus das Wort Lateinos (Λατεινος) verborgen liegt,[230]) welche aber auch sonst merkwürdige Eigenschaften besitzt, deren Räthselhaftigkeit es gradezu wahrscheinlich macht, dass der Verfasser der Apocalypse sie kannte. Ich halte es nicht für überflüssig darauf aufmerksam zu machen, dass Geheimthuerei ein Eigenthum derjenigen Schule war, die aus den Anhängern des Pythagoras hervorging, dass aber auch die spätere Kabbala zu symbolisiren liebte,[231]) ja dass noch bis in das 16. Jahrhundert solche Versuche gemacht wurden.[232])

Die eigentlich wissenschaftliche Zahlbezeichnung schrieb die Zahlen von links als der höchsten Stelle nach rechts zur kleinsten, also in derselben Reihenfolge, welche wir bei dem herodianischen Systeme schon fanden.[233]) Die Buchstaben, welche in der Bedeutung von Zahlen auftraten, pflegte man durch einen darüber befindlichen Horizontalstrich auszuzeichnen, um jede Verwechslung mit Wörtern zu vermeiden. Mit den bisher erläuterten Zeichen konnte dabei höchstens 999 geschrieben werden. Die Frage ist daher zu stellen, wie die höheren Zahlen angegeben wurden, und dabei zeigt sich eine Art von Positionswerth. Zunächst war es nothwendig Zeichen für die Tausende ausfindig zu machen. Dazu wählte man denn die 9 Einheitsbuchstaben Alpha bis Theta, denen man zur Linken einen in Kommagestalt geneigten Strich beifügte. Mitunter wurde dann dieser Strich weggelassen, und die

blosse Stellung vor einem Buchstaben mit ursprünglich höherem Werthe deutete alsdann die Nothwendigkeit an das betreffende Zahlzeichen tausendfach zu lesen. Heilbronners Angabe [234]) nach einem Beispiele aus der Astronomie des Geminus eines Zeitgenossen von Cicero, auch höhere Tausende seien in derselben Weise geschrieben worden, also z. B. 10000 durch ein links stehendes Jota, 946000 durch die Buchstaben für 946, welche links von den Hunderten standen, scheint Nesselmann nicht recht glaublich. [235]) Ich möchte mich seinem Zweifel um so mehr anschliessen, als Delambre, nachdem er im ersten Bande seiner Geschichte der Astronomie bei den Alten 22 Seiten der Besprechung des Geminus widmete, dessen Schriften also sicherlich genau kannte, im zweiten Bande ausdrücklich bemerkt: [236]) „Um 10000 zu schreiben hätte die Hinzufügung eines Striches an das Jota genügt, welches für sich schon 10 bedeutet; in der That führen einige Wörterbücher diese Bezeichnung an, ich sehe aber nicht, dass sie von irgend einem Mathematiker gebraucht worden wäre.“ Selbstständig entscheiden kann ich die Frage nicht, da mir die Astronomie des Geminus nicht vorliegt. Jedenfalls ist die bei Weitem häufigere Methode Zehntausende zu bezeichnen die, dass man das Zahlwort Myria dazu benutzt, wobei selbst wieder drei Untermethoden zu unterscheiden sind.

Der Anfangsbuchstabe *M.* oder die beiden Anfangsbuchstaben *Mυ.* nehmen den Coefficienten, mit welchem 10000 behaftet ist, links vor sich, oder rechts nach sich, oder endlich über sich. In den beiden ersten Fällen findet sich das ganze Wort *Mυριαδες* auch wohl ausgeschrieben und als Gegensatz dazu mitunter, wenn nämlich der Coefficient links steht, noch mehr abgekürzt, so dass ein blosser Punkt die Trennung der Zehntausende von den Einheiten niedriger Ordnung zu versinnlichen hat. Ein Beispiel des ganz ausgeschriebenen Wortes findet sich bei Pappus. Dieser bedeutende Mathematiker aus der Mitte des 4. Jahrhunderts n. Ch. Geb. verfasste eine Sammlung von Abhandlungen [237]) ziemlich verschiedenen Inhaltes, welche theils fremdes Material mit Nennung der Quellen verarbeiten, und in dieser Weise als einer der Hauptfundorte für den mathematischen Geschichtsforscher gelten, theils auch Neues und Werthvolles hinzufügen. Vom dritten Buche an ist die Sammlung seit 1589 übersetzt und verschiedentlich gedruckt. Die beiden ersten Bücher hingegen sind nahezu verloren. Ein kurzes

Fragment des zweiten Buches hat der Engländer Wallis aufgefunden und 1688 zugleich mit einer lateinischen Uebersetzung und kurzen Anmerkungen herausgegeben. Dieses Fragment ist zum Unterschiede von den übrigen erhaltenen durchweg geometrischen Büchern wesentlich arithmetischer Natur, und scheint seinen Inhalt fast durchaus dem Apollonius von Perga entnommen zu haben, und in ihm findet sich denn auch die schon von Nesselmann citirte Stelle. Die Abkürzung in Gestalt eines blossen Punktes fand schon Delambre und nach ihm Nesselmann bei Diophant [238]) an verschiedenen Orten. Die Schreibart, welche einem Positionswerth am Nächsten kommt, ist offenbar diejenige, bei welcher der Coefficient der Zehntausende über das Zeichen für die Einheit dieses Ranges gesetzt wird. Der Astronom Ptolemäus [239]) scheint dabei ein eigenthümliches Zeichen für 10000 benutzt zu haben. Ein gewöhnliches grosses *M* ist dagegen in gleicher Weise bei Eutocius von Askalon in Gebrauch, der im fünften Jahrhunderte die Schriften des Archimed commentirte und uns dabei höchst schätzbare Ueberreste von ausgeführten Zahlenrechnungen hinterliess. Ich sehe in dieser Bezeichnung desshalb eine grössere Annäherung zum Stellungswerthe der einzelnen Zeichen als selbst in dem abkürzenden Punkte, weil der Punkt doch immer eine Trennung ausspricht, der Zusammenhang aber nach meiner Ansicht gewahrt werden muss, und das *M* unter seinem Coefficienten die grösste Aehnlichkeit mit dem vorher besprochenen Komma der Tausende besitzt. In späterer Zeit ergab sich noch eine weitere Veränderung dahin, dass das stellenzeigende *M* nicht unter seinen Coefficienten geschrieben wurde, sondern dass über dem Coefficienten eine Art von Stellenzeiger auftrat.

Freilich ist die Bezeichnungsweise, welche ich hier im Auge habe, quellenmässig nur aus sehr später Zeit, und auch da nicht in ganz consequenter Durchführung erwiesen. Joachim Camerarius hat um 1570 eine Schrift über die Zahlzeichen der Römer, Griechen, Saracenen und Inder [240]) drucken lassen, in welcher verschiedene Grenzen, [241]) oder, wie wir uns vielleicht ausdrücken könnten, verschiedene Gruppen von Zahlzeichen erläutert werden. Zuerst nennt er die Einer, die Zehner, die Hunderte, die Tausende, welche er ebenso schreibt wie bisher angegeben wurde. Die fünfte Gruppe der Zehntausende lässt er hingegen sich so bilden, dass über dem betreffenden Buchstaben, welcher den Coefficienten vorstellt, zwei Punkte neben einander auftreten, mit deren Zuziehung

also sämmtliche Zahlen unterhalb 10000 × 10000 geschrieben werden können. Diese ebengenannte Grenzzahl selbst 100000000 erfordert also wieder eine neue Bezeichnung, wofür nach Angabe des Camerarius zwei weitere Punkte zu den schon vorhandenen hinzutreten, und demnach die vier Eckpunkte eines kleinen Quadrates über den betreffenden Einheitsbuchstaben bilden. Ja er geht noch weiter und lässt sechs sowie sogar acht Punkte über einen Buchstaben schreiben. Sechs Punkte repräsentiren wie man leicht einsieht 12 Nullen, acht Punkte alsdann 16 Nullen, welche in moderner Schreibweise angehängt werden müssten. Ausser Camerarius, der keinerlei Quellen für seine Behauptung angiebt, hat auch Montfaucon die Bezeichnungsweise wenigstens bis zum zweipunktigen Theta also bis zu 90000 in einem Manuscripte der pariser Bibliothek freilich erst aus dem Jahre 1183 aufgefunden und des Näheren beschrieben mit Bezugnahme auf Camerarius und eine fernere Schrift von Henischius.[242]) Dann erwähnt ihrer auch Humboldt in seiner Abhandlung über die Zahlzeichen und nennt sie, ich weiss nicht auf welche Veranlassung[243]) hin „eine altgriechische aber seltene Bezeichnung." Diese ganze Methode wäre, wenn Humboldt Recht hätte, eine ausserordentlich wichtige in der Geschichte des Stellenwerthes der Zahlzeichen. Am nächsten steht sie der Gobarschrift, mit welcher wir später bekannt werden, und sie konnte zu einer vollständigen Positionsarithmetik werden, sobald die Null erfunden war. Dann, aber freilich auch nur dann, konnten jene im Totaleindruck ermüdenden Punkte ganz wegbleiben. Ich habe nun früher schon zu zeigen gesucht, dass die Null wohl erst in der Periode nach Ch. Geb., vielleicht sogar mehrere Jahrhunderte später erfunden wurde. Die mehrfach verbreitete Angabe wird daher nicht wenig befremden, dass Nullen sich schon bei den Griechen vorfanden, und die nähere Untersuchung dieser Angaben wird um so nothwendiger, als sie sämmtliche Hypothesen, welche hier gemacht wurden und noch gemacht werden sollen, über den Haufen werfen würden.

Der erste moderne Schriftsteller, welcher den Griechen die Null zuschrieb, war wohl Delambre, welcher dieselbe in dem Almagest des Ptolemäus gefunden haben will, sowie in dem Commentare zu diesem Werke, welchen der jüngere Theon, der auch wohl Theon von Alexandrien genannt wird, gegen Ende des 4. Jahrhunderts verfasste. Delambre hat nämlich im

ersten Bande seiner 1817 gedruckten Geschichte der Astronomie bei den Alten die Bemerkung, dass bei Planudes die Null häufiger Nichts heisse. Dasselbe Wort finde sich auch bei Theon.[244]) Im zweiten Bande sagt er unter Anführung eines Beispiels, dass bei Ptolemäus die Winkel nach Graden gemessen werden, deren 360 auf den ganzen Umkreis gehen, und welche selbst sexagesimal getheilt sind, der Grad in 60 Minuten, die Minute in 60 Secunden u. s. w. Zeichen des Grades ist wie noch heute ein kleiner, oben rechts angebrachter Ring, Zeichen der Minute, Secunde u. s. w. sind 1, 2 und mehr kleine Striche an eben der Stelle. Die Zahlen brauchen dabei nicht überstrichen zu werden, weil schon das beigefügte Zeichen sie als solche documentirt. Wo nun bei Angabe der Grösse eines Winkels eine Abtheilung fehlt, da steht statt dessen der Buchstabe Omikron mit einem ihm deckenden Horizontalstrich. Die Erklärung, welche Delambre dafür giebt, ist eben so geistreich als gekünstelt und unwahrscheinlich. Er sagt nämlich das Omikron *o* sei gewählt worden, weil dessen gewöhnlicher Zahlenwerth 70 bei den Sexagesimalbrüchen nicht vorkommen könne, 70 Minuten oder Secunden haben ja keinen Sinn. Bei den Graden sei eine Verwechslung allerdings möglich, denn 70 Grade und auch 170 und 270 kommen vor; bei allen dreien spielt der Buchstabe *o* in seiner eigentlichen Zahlenbedeutung eine Rolle; soll desshalb die Null auch durch denselben Buchstaben ausgedrückt werden, so muss noch ein unterscheidendes Merkmal hinzutreten, und das ist der Ursprung des speciell in diesem Falle gewählten Horizontalstriches. Soweit Delambre. Seinem Citate begegnete nun dasselbe was bei Irrthümern bedeutender Gelehrten so oft vorkommt. Es wurde ohne Weiteres abgeschrieben, und ich selbst bekenne mich schuldig, es freilich mit einem einschränkenden „soll“ ohne sorgfältigere Prüfung in meine erste Abhandlung über Zahlzeichen aufgenommen zu haben.[245]) Diese Prüfung hätte ich dagegen schon bei Nesselmann[246]) durchgeführt finden können, welcher mit einigem Humor die Frage behandelnd in Bezug auf Theon erklärt, das Wort Nichts werde wohl sicherlich in dessen Werken vorkommen, in der Bedeutung als Null finde es sich jedoch in den gedruckten Schriften nicht. Bei Ptolemäus komme das überstrichene *o* vor, es sei indessen doch wohl einfacher als mit Delambre zu erklären. Es sei sicherlich die Abkürzung von ouden, dem griechischen „Nichts“ und der Horizontalstrich bedeute die Abkürzung. Zugleich

sei er aber geneigt anzunehmen, dass das ganze Zeichen erst spätere Interpolation sei, hinzugefügt nachdem der Almagest aus der arabischen Bearbeitung wieder neu bekannt wurde. Er stützt diese Vermuthung auf den Umstand, dass weder Theon noch Ptolemäus selbst im eigentlichen Texte das Zeichen jemals erläutern, was sie doch wahrscheinlich gethan hätten, wenn sie sich dessen bedienten. Somit ist diese sogenannte griechische Null als nicht vorhanden anzusehen.

Hatte Delambre aus Druckwerken geschöpft, so war es ein ungleich wichtigerer Fund, wenn es sich bestätigte, was Niebuhr über ein Manuscript des Vatikans mittheilt.[247]) Diese Angabe wurde bisher von Mathematikern noch nicht berücksichtigt, und ich selbst verdanke deren Kenntniss der Güte des Herrn Professor Wattenbach. Niebuhr beschreibt nämlich den lateinischen pfälzer Codex Nro. 24 des Vatikans, und will auf dessen 41. und 42. Seite die Zahlen 10, 100, 14 (**Figur 27**) entdeckt haben, ja er ruft den berühmten edinburger Gelehrten Playfair zum Zeugen auf, welcher die Zeichen mit ihm eingesehen und ebenso wie er verstanden habe. Ich war von vorn herein sicher, dass trotz dieses doppelten Zeugnisses ein Irrthum vorliegen müsse. Allein meine persönliche Ueberzeugung aus der Ferne konnte unmöglich zwei Männern gegenüber wie Niebuhr und Playfair in's Gewicht fallen, die den Codex selbst vor Augen hatten. Ich bat daher den Prinzen B. Boncompagni um nähere Aufklärung, und dieser Gelehrte, gern bereit der Wissenschaft zu dienen, und in uneigennützigster Weise zur Klärung mathematisch-historischer Fragen beizutragen, veranlasste Herrn Spezi, Professor der griechischen Sprache an der römischen Universität, das Manuscript nochmals einer Prüfung zu unterziehen. Als Resultat dieser neuen, sorgfältigen Untersuchung geht aber Folgendes hervor:[248]) Das betreffende Manuscript, wenigstens die beiden Seiten, auf die es uns allein ankommt, sind ein griechischer Palimpsest aus dem 7. Jahrhundert. Das im 9. Jahrhundert darüber Geschriebene ist die lateinische Uebersetzung des Buches Judith nach der Vulgata, der ursprüngliche Text ist, wie Niebuhr schon bemerkte, eine in griechischer Sprache verfasste Receptirkunst oder dergleichen. Naturgemäss sind demnach einige Mengen von bestimmten Substanzen wie z. B. Wachs, Harz, Kastoröl und dergleichen genannt, welche zur Zusammensetzung der Arzneimittel genommen werden sollen, und wie

unsere heutigen Aerzte beim Verschreiben besonderer Abkürzungen sich bedienen, so scheinen auch damals schon die griechischen Aerzte einer ganz ähnlichen Gewohnheit gehuldigt zu haben. Allerdings ist es kaum möglich den Sinn dieser Abkürzungen jetzt mit Bestimmtheit zu enträthseln. Zum Mindesten müsste ein in der Geschichte der griechischen Medizin bewanderter Arzt den Versuch unternehmen, wenn eine gegründete Aussicht auf Erfolg vorhanden sein soll. Aber jedenfalls sind solche Abkürzungen in dem genannten Manuscripte vorhanden, und diese haben Niebuhr und Playfair irrthümlich für indische Ziffern gehalten, wie sie sich ausdrücken. Was ihnen eine 1 schien, war ein grosses Gamma, der Anfangsbuchstabe von gignetai, also etwa dasselbe wie das recipe (nimm) bedeutende r der modernen Recepte. Die 0 war als Omikron aufzufassen, und die zweite Null war sogar ein Alpha, ebenso wie das, was Niebuhr als 4 ansah, ein Bau gewesen sein mag. Spezi giebt diese seine Erklärung der Abkürzungen mit allem Vorbehalt, aber so viel, schreibt er, ist sicher, dass Niebuhr und Playfair falsch gesehen und falsch gelesen haben. Darüber sei weder bei ihm mehr ein Zweifel, noch bei zwei gelehrten Professoren aus Padua und Berlin, die ihn bei der Vergleichung unterstützten. Wenn aber im Allgemeinen eine zweite Untersuchung mehr Zutrauen verdient, als eine erstmalige, weil man das zweite Mal schon weiss, worauf es ankommt; wenn Spezi die Auffassung Niebuhrs verwirft, trotzdem ihm bei der Anfrage absichtlich nicht angedeutet wurde, dass hier wohl ein Irrthum vorhanden sei, um ihn nicht befangen in seinem Urtheile zu machen; wenn endlich dieses Urtheil durchaus mit der sonstigen historischen Wahrscheinlichkeit übereinstimmt, so darf ich wohl auch diese griechische Null als nicht vorhanden betrachten.

Und nun komme ich noch zu der dritten und wichtigsten Angabe, deren Entkräftung ich versuchen muss, zu einer Angabe, welche auf eine Steininschrift sich gründet, bei der also sicherlich an keine nachträgliche Interpolation gedacht werden kann, wie sie bei einer Handschrift doch immerhin möglich ist. Ottfried Müller entdeckte auf der Akropolis zu Athen einen Stein, welcher in 5 durch Striche getrennten Kolumnen augenscheinlich nur Zahlen enthielt, jede einzelne aus zwei Buchstaben bestehend. Ludwig Ross theilte eine genaue Zeichnung des Steines Herrn Professor A. Böckh in Berlin mit, welcher dieselbe in einer Beilage zum Ka-

taloge[233]) der berliner Universität für das Sommersemester 1841 veröffentlichte (**Figur 28**). Bei der nicht allzugrossen Verbreitung dieses Programmes, welcher in der Geschichte der Zahlzeichen häufig genannt wird, halte ich es für zweckmässig die Beschreibung und Erläuterung der Inschrift aus demselben hier aufzunehmen: „Der Stein scheint nach oben und rechts vollständig erhalten zu sein, nach unten und links ist er zerbrochen. Durch diese Verstümmelung fehlt Vieles in den Kolumnen I, II und auch in Kolumne III Zeile 12 das erste Zeichen vor dem *Δ*. Die Buchstaben sind gross und ausnehmend deutlich. Es erscheint keinem Zweifel unterworfen, dass der Stein als zu einem andern Denkmale zugehörig gedacht werden muss, auf welchem Geldeinnahmen oder Ausgaben einzeln aufgezählt wurden mit Angabe der Totalsumme. Beispiele solcher Art sind in nicht geringer Anzahl vorhanden.[249]) Um nun diese Entstehung der Summe aus den einzelnen Aufstellungen zu erweisen, scheint auf unserem Steine ein Beispiel solcher Zusammenzählung geliefert worden zu sein, wobei wohl auch unter den einzelnen Kolumnen deren Summe angegeben war. Die Schreibweise in den einzelnen Kolumnen ist regelmässig so, dass der Buchstabe links einer der 9 Einheitsbuchstaben, der rechts einer der 9 Zehnerbuchstaben ist, also in der sikilischen Weise geschriebene Zahlen. Nur einige Ausnahmen treten auf, welche sich sämmtlich auf den Vertikalstrich, d. h. eigentlich auf das Jota beziehen.“ Als Zeichen der Zahl 10 sollte es nämlich immer rechts stehen, und doch findet es sich fünfmal links.[250]) Böckh macht dazu die weitere Bemerkung, dieses Vorkommen des Vertikalstriches sei sicherlich ein Ersatz für die fehlenden Einer etwa eine Art von Null, und er setzt hinzu, wenn in der zweiten Stelle weiter rechts etwa keine Zehner vorhanden gewesen wären, so hätte wahrscheinlich auch ein Raum ausfüllendes Zeichen seine Stelle eingenommen, nur wäre es dann sicher kein Vertikalstrich gewesen, weil dieser die Bedeutung 10 hätte. Bei der grossen und gerechten Autorität, deren der Verfasser dieses Programmes sich allgemein erfreut, gehe ich mit einiger Scheu auf das Wagniss ein, ihn hier eines Irrthums zu beschuldigen. Aber in der That hat Böckh die Bedeutung dieses links stehenden Jotas vollständig missverstanden. In mancher Beziehung stimme ich ihm, wenn auch aus ganz anderem Gesichtspunkte, freilich bei. Auch ich glaube, dass da wo das Jota sich links findet, keine Einer vorhanden waren, ich glaube ferner, dass

allerdings, um die Symmetrie zu wahren, die Einrichtung getroffen wurde, jedesmal zwei Buchstaben zu schreiben, auch wo man mit einem einzigen Buchstaben hätte auskommen können. Aber hier hört unser Einverständniss auf. Ich glaube nämlich nicht, dass man um zwei Buchstaben zu haben ein bedeutungsloses Jota links hinschrieb, sondern man löste die Zehner in eine Summe von Zehn und noch einem anderen Zehner auf und gewann dadurch die Möglichkeit zwei Buchstaben zu schreiben, deren jeder einen Sinn hatte. So steht also nach meiner Ansicht das *IM* für ein einfaches *N*, das *IN* für ein einfaches *Ξ*, andere Beispiele kommen aber nicht vor. Denkbar wäre mir, dass auch Hunderte allein vorkämen und durch zwei Buchstaben dargestellt werden sollten. Dann würde man etwa *T* (300) auflösen in *P* (100) und *Σ* (200), also diese letzten beiden Buchstaben schreiben. Auch hier wäre dem Wortlaute nach das erreicht, was Böckh ankündigt, nämlich dass in diesem Falle die Null nicht durch einen Vertikalstrich ausgedrückt wäre, sondern durch ein andres Zeichen (nach meiner Annahme durch ein Rho), aber freilich nicht in dem Sinne, wie Böckh die Sache auffasste.

Ein solches Zerlegen einer Zahl, die aller Voraussicht nach durch ein Zeichen geschrieben werden soll, in mehrere kann zwar auffallen, enthält aber nichts Unmögliches. Die egyptisch hieratischen Zeichen für 5, 6, 7, 8 bieten schon ein derartiges Beispiel. Aehnlich verhält es sich mit jener mnemonischen Schreibweise der Zahlen, welche wie wir sahen bei den Griechen existirte. Aehnlich schrieb man lange Zeit die Hunderte von 500 an im Hebräischen durch Zusammensetzung zweier Buchstaben, und eine freiwillige Umschreibung lehrt dieselbe Sprache uns kennen, wenn sie 15 statt durch 10 und 5 durch 9 und 6 darstellt, weil die Buchstaben für 10 und 5 den Anfang des heiligen Namens Jehovah bilden, der nicht entweiht werden darf durch unnützes Aussprechen. Merkwürdige Beispiele von Zusammensetzungen finden sich ferner, wie mir Dr. Laband freundlichst mittheilte, in einer salfränkischen Umschreibung[251]) des salischen Gesetzbuches aus dem 5. Jahrhundert n. Ch. Geb. Endlich ein griechisches Beispiel ist vielleicht jene aus sieben Strichen bestehende 7 auf der früher erwähnten Votivtafel, wenn statt derselben eigentlich ein Pi und nur zwei Striche zu erwarten waren.

Möge sich indessen dieses verhalten, wie es immer wolle,

möge mein Erklärungsversuch sogar unrichtig sein, was ich bis auf weiteren Gegenbeweis nicht glaube, so ist selbst der werthlose Vertikalstrich weit entfernt mit der Null auch nur vergleichbar zu sein. Zur Existenz der Null als solcher ist vielmehr ein Zeichen nothwendig, welches ohne irgend eine Nebenbedeutung nur Raum ausfüllend auftritt, also überall in derselben Gestalt denselben Zweck erfüllen kann, und dass der Vertikalstrich dazu nicht geeignet ist, giebt der gelehrte Verfasser jenes Programmes ja selbst zu. Damit fällt also die dritte und letzte Angabe, als ob die Griechen eine Null besessen hätten.

Es bliebe noch übrig die Methoden anzugeben, welche Archimed und Apollonius ersannen, um noch grössere Zahlen als die bisher erwähnten darzustellen und mit denselben zu rechnen. Ich ziehe jedoch vor diesen Gegenstand in den nächsten Kapiteln gleichzeitig mit dem Rechenbrette zu erläutern. Den Schluss dieses Kapitels mag die Erwähnung eines kühnen Versuches bilden, welchen Bischof Huet machte, unsere 9 modernen Ziffern aus Buchstaben des griechischen Alphabets herzustellen. Die 1 sei ein einfacher Strich, 2 das unten abgeschnittene Beta, 5 der Buchstabe Epsilon mit umgedrehtem Kopfe u. s. w. (**Figur 29**). Er vertheidigt seine Hypothese mit grossem Wortschwall, welchen Freunde solchen Pompes bei Nesselmann nachlesen können,[252]) der die ganze Stelle wörtlich aufgenommen hat.

IX. Das Rechenbrett.

Ich komme jetzt zur Beschreibung eines Apparates, den ich bereits mehrfach nannte als zur Erleichterung des Rechnens bei verschiedenen Völkern dienlich, welcher aber bis jetzt nur immer erwähnt wurde, ohne dass ich ihn näher erläutert hätte. Das Rechenbrett, welches ich damit meine, ist nun freilich in ziemlich verschiedenen Gestalten vorhanden. Nichts desto weniger wird es möglich sein den leitenden Gedanken, der zu Grunde liegt, anzugeben, und daran die einzelnen Entwicklungsphasen des Apparates zu erklären. Denken wir uns als Einfachstes einen Rahmen, in welchem eine Anzahl von Schnüren gespannt sind, an deren jeder zehn Kugeln leicht verschiebbar angebracht sind. Unterscheiden wir ferner an jeder einzelnen Schnur die beiden Befestigungspunkte, so dass wenn von den verschiebbaren Kugeln einige oder alle an dem einen Ende sich befinden, sie als nicht vorhanden aufgefasst werden, während sie an das entgegengesetzte Ende geschoben, welches darum das Zähl-Ende genannt werden mag, Geltung haben und gezählt werden müssen. Die Schnüre selbst werden als erste, zweite, dritte Schnur und so fort unterschieden. Setze ich nun endlich noch hinzu, dass jede zählende Kugel der ersten Schnur eine Einheit, jede zählende Kugel der zweiten Schnur eine Zehn, bei der dritten Schnur Hundert u. s. w. bezeichnet, so hat es sicherlich keine Schwierigkeit mehr, sich vorzustellen, wie mit Hülfe dieses Rechenbrettes irgend welche Zahlen versinnlicht werden können. So viele Kugeln das Zähl-Ende einer jeder Schnur aufweist, so viele Einheiten der betreffenden Ordnung sind eben gemeint, und wenn also z. B. die erste Schnur 3 Kugeln, die zweite gar keine, die dritte 4 Kugeln, die vierte 1 Kugel, alle folgenden gar keine Kugeln an dem Zähl-Ende haben, so bedeutet diese Zusammenstellung

dass 3 Einer, 4 Hunderte, 1 Tausend vorhanden sind, dass hingegen Zehner sowohl als Zehntausende und noch höhere Zahlen fehlen, dass also die dargestellte Zahl 1403 ist. Ganz in ähnlicher Weise wäre etwa 780 dadurch bezeichnet worden, dass die zweite und dritte Schnur der Reihe nach 8 und 7 Kugeln aufweisen, alle übrigen aber leer blieben. Nun war es leicht an zwei verschiedenen Apparaten diese beiden Zahlen darzustellen. Sollten sie aber an einem Apparate vereinigt werden, d. h. sollte man die Addition der beiden Zahlen vornehmen, so musste die erste Schnur alsbald 3, die zweite 8 Kugeln aufweisen, bei der dritten Schnur entstand eine Schwierigkeit. Diese sollte des ersten Postens wegen 4 Kugeln, des zweiten Postens wegen 7 Kugeln, zusammen also 11 Kugeln am Zähl-Ende aufweisen, während im Ganzen nur 10 Kugeln an ihr aufgereiht waren. Man musste sich also hier dadurch zu helfen suchen, dass man das gegenseitige Verhältniss, in welchem die einzelnen Schnüre zu einander stehen, mit in Betracht zog, dass man also 10 Kugeln irgend einer Schnur durch eine Kugel der nächstfolgenden Schnur ersetzte. In dem gegebenen Beispiele blieb somit an der dritten Schnur von den 11 Kugeln nur eine zurück und dafür trat an der vierten Schnur noch eine neue Kugel zu der aus dem ersten Posten schon vorhandenen hinzu. Das war somit dieselbe Regel der Addition, deren noch heute das decadische Zahlenrechnen sich bedient, nur mit dem einen nicht ganz unbedeutenden Unterschiede, dass die schriftliche Addition bei den Einern anfangen muss, wenn man nicht nachträglich noch zu Verbesserungen genöthigt sein will; das instrumentale Rechnen hingegen, wie wir das mit dem Rechenbrette nennen wollen, kann bei jeder beliebigen Schnur anfangen, weil nachträgliche Verbesserungen ihm nicht mehr Mühe verursachen, als von vornherein sich ergebende. Das instrumentale Rechnen kann daher Regeln besessen haben, die mit denen unseres schriftlichen Rechnens durchaus nicht übereinstimmten. Wir werden sehen, dass diese Möglichkeit bei den Griechen zur Wirklichkeit wurde, dass dieselben ihre Multiplicationen z. B. von den Einheiten höchsten Ranges anfingen. Diesen Unterschied bei Seite gelassen, ist der Grundgedanke des Rechenbrettes genau der des jetzt üblichen Zahlenrechnens mit Einschluss des Stellenwerthes, da die Stelle (d. h. hier die Schnur), an welcher eine Ziffer (d. h. hier eine Anzahl von Kugeln) auftritt, bestimmend für deren Werth ist. Und dennoch

dauert es viele Jahrhunderte, bis man berechtigt ist, von einem eigentlichen Stellungswerth der geschriebenen Zahl zu reden, bis die Rechenmethode zur Schrift sich umwandelte. Daran ist, wie nicht genug hervorgehoben werden kann, der Umstand Schuld, dass das Rechenbrett von selbst andeutet, wenn Einheiten irgend einer Ordnung nicht vorhanden sind, indem alsdann einfach das Zähl-Ende der betreffenden Schnur leer bleibt. Die schriftliche Anwendung des Stellenwerthes hingegen muss das Wegbleiben einer Ordnung durch das besondere Zeichen der Null andeuten, und bevor dieses erfunden war, kann das instrumentale Rechnen zwar offenbar alle möglichen Zeichen für die Zahlen von 1 bis 9 angewandt haben, aber niemals zum Schreiben von Zahlen geführt haben.

Das Rechenbrett in dieser einfachsten Gestalt, wie ich es soeben beschrieben habe, findet sich in Russland wieder, wo es, wie ich früher einmal andeutete, unter dem Namen Tschotü fast in jedem Kaufmannsladen zu finden ist. Das Einzige, worin eine kleine Verbesserung zu finden ist, besteht in der verschiedenen Färbung der auf einer jeden Schnur aufgereihten Kugeln, welche dazu dient, rascher die jedesmal nöthige Zahl von Kugeln greifen zu können. Von den 10 Kugeln sind nämlich die vier obersten und die vier untersten in der Regel weiss, die noch übrigen beiden Kugeln, die sich in der Mitte befinden, schwarz. Ob diese Maschine von Osten her eingeführt wurde, ob diese Einführung gar erst in den allerletzten Jahrhunderten erfolgte, wie Hager angiebt,[253]) kann ich nicht entscheiden. Der Thatsache einer durch eine bestimmte Person vermittelten Einführung steht allerdings nichts Erhebliches im Wege. Ist doch grade die russische Rechenmaschine in ähnlicher Weise nach Frankreich gekommen, wo sie nach dem russischen Feldzuge zuerst von Poncelet in die Schulen von Metz eingeführt, jetzt fast in allen Kleinkinderbewahranstalten in Gebrauch ist, und mit dem Namen boullier, also etwa Kugelbrett, belegt wurde.[254])

Im weiteren Osten war das instrumentale Rechnen gleichfalls gebräuchlich, so dass es wohl von dort herkommen könnte. Ich mache wiederholt auf die als Erinnerungszeichen dienenden Knotenschnüre aufmerksam. Die Quippos der Peruaner sind dahin zu zählen, ebenso wie die Kouas der Chinesen daraus entstanden. Nicht

minder verdankt ihnen der christlich-religiöse Rosenkranz seinen Ursprung, welchen die Kreuzzüge aus Asien nach Europa herüberbrachten [255]) und auch die Akshamâlâ (Augen- oder Perlenkranz), die den indischen Brahmanen bei der Aufzählung der Namen des Gottes Vischnu behülflich ist, [256]) schreibt sich ebendaher. Eine höchst originelle Betmaschine der Kalmucken darf hier wohl wenigstens erwähnt werden, die ich vor mehreren Jahren einmal in einer ethnographischen Sammlung sah. Dieses Volk benutzt nämlich zur Hersagung von einer grossen Anzahl von Bussgebeten, welche ihre Priester ihnen auferlegen, einen merkwürdigen Apparat. Das betreffende Gebet ist in sehr feiner Schrift hundertmal unter einander auf ein Tuch geschrieben, welches um eine Walze gerollt ist. Jede Umdrehung der Walze gilt alsdann vermöge des damit verbundenen knarrenden Geräusches als hundertmaliges Aussprechen des Gebetes, und der Art ist es leicht, in sehr kurzer Zeit das Gebet viele tausendmal herzusagen.

Das eigentliche Rechenbrett der Ostasiaten, der Suanpan der Chinesen und Tartaren, besitzt freilich eine von dem russischen Apparate ziemlich bedeutend abweichende Construction. [257]) Bei ihm beträgt die Anzahl der an jeder Schnur aufgereihten Kugeln nicht 10, und ferner sind die Kugeln nicht in einfacher Folge aufgereiht. Jede einzelne Schnur, oder vielmehr jeder Draht ist nämlich etwa in der Mitte durch einen alle Drähte verbindenden Transversaldraht in zwei Abtheilungen getrennt, in deren einer fünf, in der anderen zwei Kugeln sich befinden. Jede der beiden allein in einer Abtheilung befindlichen Kugeln entspricht dem Werthe nach fünf Kugeln, welche auf der einfachen ungeschiedenen Schnur angegeben wären. Hier ist also die Uebersichtlichkeit noch mehr erhöht, und ihr entspricht auch, wie früher schon bemerkt, die ausserordentliche einem Zuschauer fast Schwindel erregende Fertigkeit, mit welcher ein etwas geübter Chinese seinen Suanpan handhabt.

Die bisher beschriebenen Apparate sind soweit vortheilhaft eingerichtet, als an ihnen Alles, was zu dem Gebrauche erforderlich ist, gleich bei einander ist. Hingegen ist man auch wieder zu sehr an das Vorhandene und dessen Benutzung gebunden, so dass es dem Gedanken nach als ein Fortschritt betrachtet werden darf, dass man die Kugeln von der Schnur entfernt aufbewahrte und nur nach

Bedürfniss aufreihte. Ich will damit nicht grade die Behauptung ausgesprochen haben, dass diese Methode auch der Erfindung nach die zweite war. Es ist möglich, dass man von der Maschine mit losen Kugeln oder Steinen ausging und nachträglich durch Befestigung derselben einen leicht zu handhabenden Apparat sich herstellen wollte, ohne sich dabei bewusst zu werden, dass damit ein Rückschritt geschah. Andererseits ist aber auch die Möglichkeit nicht zu verwerfen, dass man von den Schnüren sich erst in zweiter Linie emancipirte, ähnlich wie man durch zeichnende Darstellung derselben zu den chinesischen Kouas kam. Bei der Herstellung des Rechenapparates mit losem Bezeichnungsmaterial war es am einfachsten, die Schnüre oder Drähte durch Einschnitte in eine gewöhnlich metallene Tafel zu ersetzen, in welche man dann jedesmal so viele Stifte, Steinchen oder wie wir ganz allgemein sagen wollen so viele Marken einfügte, als die betreffende Ordnung Einheiten anzeigen sollte. Solche Rechentafeln im eigentlichen Sinne des Wortes besassen sowohl die Griechen als die Römer, wie aus unzweifelhaften Ueberbleibseln hervorgeht.

Eine griechische Rechentafel,[258]) freilich auf Marmor und daher von der oben gegebenen allgemeinen Beschreibung etwas abweichend, wurde zu Anfang des Jahres 1846 auf der Insel Salamis aufgefunden und von Herrn Rangabé, der sich damals in Athen aufhielt, in einem Briefe an Herrn Letronne vom 22. April desselben Jahres abgezeichnet und zuerst richtig gedeutet. Dann aber verliess er den richtigen Weg, um in den Irrthum zu verfallen, als ob die Tafel nicht zum Rechnen gedient habe, sondern ein Brettspiel gewesen sei. Letronne merkte schon das Irrige der zweiten Hypothese, welche Herr Vincent durch ihn noch näher zu besprechen aufgefordert wurde. Und dessen Abhandlung endlich zeigte, dass die Tafel wohl zu doppeltem Zwecke eingerichtet war, dass man auf ihr rechnen konnte, dass sie aber doch gleichzeitig zum Spielen diente, indem einige Bestandtheile derselben darauf hinweisen. (**Figur 30**). Die Länge der Marmortafel wird zu 1,5 Meter angegeben, die Breite zu 0,75. Die Zahlzeichen, als welche die auf der Tafel befindlichen Buchstaben unzweifelhaft anzusehen sind, besitzen eine Höhe von 13 Millimetern. Das sind in der That schon nicht die Dimensionen, ebensowenig wie das Material einer gewöhnlichen Rechentafel, und so scheint vor allen Dingen die Vermuthung gesichert, dass man es hier mit einem zum öffentlichen Gebrauche

bestimmten Monumente zu thun hat, dessen näherer Zweck entweder nur rechnender Natur war, also z. B. als Zahltisch eines Wechslers, oder es diente zu einem theilweise auf Rechnung gegründeten Spiele, vielleicht zu einem Würfelspiele, welches mit dem noch im vorigen Jahrhundert gebräuchlichen Trictrac einige Aehnlichkeit haben mochte. Rangabé hat mit grosser Gelehrsamkeit die Stellen alter Autoren zusammengetragen, welche auf dieses Spiel sich beziehen, und Vincent hat eine Erklärung dieser Stellen mit Zugrundelegung der Marmortafel nicht ohne Glück versucht. Wenn ich auch für die nähere Ausführung auf die Originalarbeit verweisen muss, so darf ich doch hier die vollständig richtige Bemerkung Vincent's aufnehmen, dass ein Zusammenhang des Rechenbrettes mit einem zum Spiele eingerichteten Brette sicherlich existirte. Und ich darf wohl hinzufügen dass ein solcher Zusammenhang auch an die pythagorische Schule sich anknüpft, welche ein Zahlenkampf[259]) genanntes Spiel besass, das in künftigen Kapiteln unsere Aufmerksamkeit noch auf sich ziehen wird.

Ein zweites Analogon anzunehmen, könnte man sich durch eine Bemerkung von Humboldt[260]) verleitet fühlen, wenn dieser sagt: „In dem Finanzwesen des Mittelalters wurde der Rechentisch (abax) zum exchequer.“ In der That ist die sprachliche Identität von échiquier, Schachbrett, und chambre de l'échiquier, Rechnungskammer, in Frankreich, und des ebenso doppelsinnigen exchequer in England so absolut nicht von der Hand zu weisen, dass man lieber ohne Weiteres der Humboldtschen Bemerkung in dem Sinne Glauben schenkt, das Schachbrett selbst hänge mit dem Rechentische zusammen, ehe man sich mit den verschiedenen Versuchen abplagt, welche gemacht wurden, um jene zwiefache Anwendung desselben Wortes zu erklären.[261]) Wie weit die Phantasie sich dabei erging, zeigt folgende einer französischen Zeitschrift entnommene Probe.[262]) Es sei unzweifelhaft, meint der anonyme Verfasser des im Ganzen sehr schätzbaren Aufsatzes, dass in den alten Schlössern der Herzöge in Caen, Rouen und anderwärts ein Saal den Namen salle de l'échiquier führte. „Bedeckte etwa ein grosser schachbrettartig gewirkter Teppich die Wandungen oder den Fussboden des Saales? Oder war die Figur eines Schachbrettes (échiquier oder échacier lat. scaccarius) irgendwo an der Wand oder auf den Tischen angebracht? Ich glaube nicht: sondern es war das Gemach, in welchem der Fürst vor oder nach den Mahl-

zeiten Schach zu spielen pflegte. Die Schachbretter waren lange Zeit von Metall; später verfertigte man sie aus Holz, vielleicht um den hochadligen Spielern die Lust zu benehmen, der sie häufig nachgaben, ihren Gegnern mit dem Brette die Rippen zu zerschlagen. Die Bretter waren auf langen Tischen aufgestellt, ähnlich den grünen Tischen unserer Gerichtszimmer, und die Gegenwart dieser Tische machte es grade bequem, das Schachzimmer vor allen anderen Räumen des Schlosses zum Sitze des Gerichtes zu bestimmen." Das Gezwungene dieser Erklärung leuchtet von selbst ein. Da möchte man, wie gesagt, lieber noch die Hypothese machen, dass ein und dasselbe Brett, welches ursprünglich zum Rechnen diente, später zum Spiele eingerichtet wurde, und als die Nothwendigkeit desselben zum Rechnen aufhörte, seinen Namen nur vom Spiele noch führte. War doch aus dem Rechenbrette alsbald ein Schachbrett gebildet, sowie man die einzelnen Schnüre oder Einschnitte, die wir bis jetzt kennen lernten, durch Kolumnen ersetzte, in welchen selbst wieder einzelne Felder die Marken aufzunehmen bestimmt waren.

Diese Hypothese ist aber falsch, und wenn ich sie hier machte, so geschah es, um an einem Beispiele zu zeigen, wie man sich niemals an eine hingeworfene Bemerkung eines noch so grossen Gelehrten klammern soll, sondern jeglicher Autorität die eigene Untersuchung, wo immer möglich, vorziehen muss. Der Name der Rechnungskammer hängt allerdings mit dem Schachbrette zusammen, aber nicht wegen eines rechnenden Gebrauches, sondern wegen einer in frühen Zeiten in England und den englisch-französischen Provinzen gebräuchlichen Buchführung in Gestalt eines Schachbrettes, (**Figur 31**). Jede der vertikalen Reihen war mit einem Namen bezeichnet, ebenso auch jede der horizontalen Reihen; und zwar kam jeder Name zweimal vor, einmal bei einer vertikalen und einmal bei einer horizontalen Reihe. Darnach existirte für irgend zwei Namen, etwa für A und B, ein Kreuzungsfeld, welches horizontal dem A, vertikal dem B entsprach, und ein zweites Kreuzungsfeld, welches horizontal dem B, vertikal dem A entsprach. Eine Summe, welche in ein solches Kreuzungsfeld zweier Personen gebucht wurde, bezog sich nun auf beide. Der horizontale Name schuldete sie dem vertikalen Namen, und so erfüllte also einfache Eintragung den Zweck, den die moderne doppelte Buchführung sich setzt. Denn dieselbe Buchung, welche gelesen wird:

A schuldet an B 10 Thaler, sofern es sich um die sogenannte Bilanz des A handelt, heisst: B hat 10 Thaler von A zu gut, sofern B seine Rechnung ausgleichen will. Soll an dem gewählten Beispiele untersucht werden, wie die Rechnung des A im Ganzen steht, so addirt man alle horizontalen Buchungen und findet: A schuldet an B 10 Th., an C 25 Th., an D 13 Th., an E 47 Th., also zusammen 95 Th. Das Guthaben des A ergiebt sich aus der Addition der ihm vertikal entsprechenden Buchungen. A hat von B 3 Th. zu gut, von C 16 Th., von D 54 Th., von G 38 Th., also zusammen 111 Th. d. h. um 16 Th mehr als er schuldet, und dieser Ueberschuss kann am Ende der vertikalen Reihe notirt werden. Bildet man in ähnlicher Weise die Bilanz eines jeden Einzelnen und notirt den Ueberschuss am Ende der ihm zugehörigen vertikalen oder horizontalen Reihe, je nachdem er ein Guthaben, oder eine Schuld ist, so muss schliesslich die Totalsumme der überschüssigen Guthaben und die der überschüssigen Schulden genau dieselbe sein, wenn nicht ein Rechnungsfehler vorliegen soll. Grade diese Controle beabsichtigt aber die sogenannte doppelte Buchführung. Da nun die Rechnungskammer die Buchführungen zu beaufsichtigen und in Streitfällen die Entscheidung zu geben hatte, so ist damit der an das Schachbrett erinnernde Name genügend erklärt,[263]) aber der Zusammenhang des Schachbrettes mit der Rechentafel fällt weg.

Humboldt hat sich vielleicht zu seiner Bemerkung berechtigt geglaubt, weil der englische Exchequerhof auch mit der Aufbewahrung gewisser, tallies genannter, Rechenhölzer betraut war, welche zwar nicht im Mindesten seinen Namen beeinflussten (das sagt auch Humboldt eigentlich nicht), aber um so mehr Aehnlichkeit mit der einfachsten Gattung von Rechenapparaten mit den früher genannten Kerbhölzern hatten.[264]) Wenn man nämlich bei einem Kaufmanne Gegenstände auf Borg nahm, so wurde der Betrag durch Striche auf einem Holze angedeutet, und dieses Holz alsdann der Länge nach gespaltet, so dass von den zwei zusammenpassenden Theilen der Gläubiger den einen, der Schuldner den anderen behielt, somit beide gegen Uebervortheilung gesichert waren. Zur besseren Controle der Staatskassenverwaltung wurden nun alle öffentlichen Einnahmen gleichfalls auf solchen Rechenstöcken in doppelten Exemplaren angemerkt und im Exchequerhofe aufbewahrt. Erst vor etwa 30 Jahren hörte diese Gewohnheit auf, der ange-

häufte grosse Vorrath wurde auf dem Parlamentshofe verbrannt, und bei dieser Gelegenheit brannte das Parlamentsgebäude selbst mit ab.[265])

Wenn nun auch dieses geglaubte Seitenstück zur salaminischen Tafel sich als nichtig erweist, so giebt es bis auf den heutigen Tag noch Spiele genug, welche auf einem Zählen beruhen, und somit genöthigt sind, die in jeder einzelnen Tour erlangten Zahlen aufzuschreiben, oder wie man gewöhnlich sagt zu markiren. Dazu bedient man sich nun besonders in Frankreich einer eigenthümlich (**Figur 32**) zurechtgeschnittenen Karte,[266]) deren Gebrauch bei dem beigeschriebenen Werthe der einzelnen Abtheilungen von selbst einleuchtet. Dieses Kärtchen ist nichts Anderes als selbst eine Art von Rechenbrett, nur dass was dort durch hinzutretende Marken angedeutet werden musste, hier durch ein Umbiegen der kleinen Kartenstreifchen erreicht wird.

Ich kehre jetzt wieder zu der salaminischen Tafel zurück, deren doppelte Anwendung nach diesen Abschweifungen vielleicht in etwas hellerem Lichte erscheint. Die schon erwähnten Zahlzeichen sind dreimal vorhanden: an dem Ende, welches in der Figur das untere ist, dann links und zum drittenmale rechts, wo ausser den 11 Zeichen, die auch an den beiden andern Orten sich finden, noch zwei weitere Zeichen links, also bei der höchsten Ordnung angefügt sind. Letronne hat die Bedeutung der 13 Zeichen vollständig erkannt. Das *T* am Anfange, also zu äusserst links heisst ein Talent, welches dem Werthe von 6000 Drachmen entsprach. Die nächste Münzsorte war die Drachme selbst, und auf diese beziehen sich die nun folgenden acht Zeichen, welche als 5000, 1000, 500, 100, 50, 10, 5, 1 Drachme zu lesen sind, und von welchen nur das Drachmenzeichen ⊢ uns hier neu ist, während die sieben anderen Zahlzeichen dieselben sind, welche im vorigen Kapitel als auf attischen Inschriften häufig vorkommende erklärt wurden. Die vier letzten Zeichen beruhen nun wieder auf den Unterabtheilungen der Drachme, und zwar ist | das Zeichen der Obole, von denen 6 auf die Drachme gehen, und denen selbst wieder 6 kleinere Kupfermünzen an Werth entsprechen, deren jede Chalkous genannt wurde. (ist der halbe Obolus oder drei Chalken. T ist hier der Anfangsbuchstabe von Triton, also ein drittel Obolus oder zwei Chalken. Endlich X ist der Anfangsbuchstabe des Chalkous selbst. Vincent

ist nun der Ansicht, dass die beiden Spieler an den langen Seiten der Tafel sassen. An der unteren schmalen Seite sass vielleicht der dritte Spieler, der mitunter erwähnt wird,[267]) und der als Ueberzähliger wahrscheinlich wartete bis einer der beiden eigentlichen Spieler, etwa der Verlierende, austrat; vielleicht aber auch schon früher bei gewissen Fällen betheiligt war. Jedenfalls ist dieser Platz für ihn naturgemässer, als der am oberen schmalen Ende, wo keine Zahlzeichen stehen. Das Spiel war nun, wie es scheint, so dass jeder der Spieler 5 Kolumnen nöthig hatte, welche dem Werth von 1, 10, 100, 1000 Drachmen und einem Talente entsprachen. Jede Kolumne war dann in der Mitte nochmals abgetheilt, so dass der obere Theil derselben den fünffachen Werth des unteren besass. Die zwei Spieler werden demnach zusammen 10 Kolumnen nöthig gehabt haben, und so viele zeigt die Tafel in der That, wenn der Raum zwischen je zwei Einschnitten als eine Kolumne angesehen wird. So erklärt sich auch die Transversallinie, welche quer durch alle Kolumnen hindurchgeht, und über welcher jeder der beiden Spieler seine Fünfer markirte, wie unter derselben seine Einer. Das Kreuz in der Mitte trennte wohl die Rechenkolumnen des einen Spielers von denen des andern; die beiden Seitenkreuze waren vielleicht zur besseren Uebersicht vorhanden, indem sie jedem Spieler die minder wichtigen Kolumnen von 1, 10 und 100 Drachmen, von den beiden höchsten zu 1000 Drachmen und einem Talente abtrennten. Unter dieser Voraussetzung wären freilich jedem Spieler die 5 Kolumnen zuzuschreiben, welche von seinem Standpunkte aus am weitesten nach links lagen und nicht, wie Vincent glaubt, die rechtsliegenden. Ich könnte für meine Auffassung noch sprechen lassen, dass so die benutzten Kolumnen selten dicht nebeneinander sich befanden, also selten Verwechslungen eintreten konnten, doch ist der ganze Gegenstand ein immerhin sehr hypothetischer und keineswegs über alle Zweifel erhaben. Betrachten wir die betreffenden Kolumnen sämmtlich als Rechentafeln, so haben wir einen aus 10 Ordnungen zusammengesetzten Apparat vor uns, worauf noch zurückzukommen ist. Die nicht mit einem Querstrich versehenen Abtheilungen am oberen Ende der Tafel sind jedenfalls von Letronne und Vincent richtig dahin erklärt, dass sie zur Bruchrechnung dienten, indem die vier Kolumnen für den Chalkous, den drittel Obolus, den halben Obolus und den Obolus bestimmt waren. Darauf weist die Analogie römischer Rechentafeln hin.

Es giebt nämlich einige Exemplare römischen Ursprunges, von denen eines in dem Besitze der pariser Bibliothek sein soll,[268]) ein zweites im 17. Jahrhundert einem augsburgischen Patricier aus der bekannten Familie der Welser angehörte, der eine Beschreibung davon hinterliess.[269]) Wohin ein drittes Exemplar gekommen ist, welches Ursinus beschrieb,[270]) weiss ich nicht, ebensowenig wie mir der gegenwärtige Aufenthalt des Welser'schen Apparates bekannt ist. Die römische Rechentafel (**Figur 33**) war von Metall und hatte 8 längere und 8 kürzere Einschnitte, je einen von jenen mit einem von diesen in grader Linie. In den Einschnitten waren bewegliche Stifte mit Knöpfen, in einem der längeren 5 Stück, in den übrigen 4, in den kürzeren je 1. Jeder längere Einschnitt war auf der Seite, wo der kürzere Einschnitt ihn fortsetzte, mit einer Ueberschrift versehen. Der Gebrauch dieser Rechentafel ergiebt sich nach dem Bisherigen von selbst. Die Marken in den längeren Einschnitten bedeuten einzelne Einheiten ihrer Klasse; die in den kürzeren Einschnitten gelten 5 solcher Einheiten. Nur der erste Einschnitt von rechts bildet dabei eine Ausnahme, indem dessen einzelne Marke 6 Einheiten bedeutet. Dieser mit Θ bezeichnete Einschnitt enthielt nämlich die Unzen, die übrigen Assen,[271]) deren jedes aus 12 Unzen bestand, also Einer, Zehner, Hunderte u. s. w. bis zur Million Assen. In dem ersten Einschnitte konnte man demnach bis zu 11 Unzen bemerken (6 einzelne Unzen, und 1 fünf Unzen-Marke). Kamen noch mehrere dazu, so ersetzte man ihrer 12 durch eine Marke der nächsten Linie, d. h. der Einheiten der Assen. In den folgenden 7 Einschnitten konnte man bis zu 9 Einheiten in jeder Klasse von den Einern bis zu Millionen von Assen bezeichnen, wenn man die Knöpfe der längeren wie der kürzeren Einschnitte gegen die Mitte zu verschob, um ihnen dadurch Geltung als Zahlzeichen zu geben. So zeigten zwei verschobene Knöpfe in einem längeren Einschnitte und der einzelne in dem zugehörigen kürzeren Einschnitte fortgerückt die Zahl 7 in der entsprechenden Klasse an. Neben den Einschnitten der Unzen waren noch drei kleinere Einschnitte, die beiden oberen mit je einer Marke, die unterste mit zwei Marken versehen. Die Bedeutung dieser Einschnitte war den beistehenden Zeichen zufolge von oben nach unten die halbe Unze, semuncia, die viertel Unze, siciliquus, und die drittel Unze, duella.

Im Ganzen ist demnach hier dasselbe Princip wahrnehmbar,

welches auch der vorhin erklärten salaminischen Tafel inne wohnt, und nur in den Brüchen ist ein wahrnehmbarer Unterschied. Bei dem griechischen Apparate ist nämlich, wie Vincent bemerkt, [272]) der Obolus in den halben, drittel und sechstel Obolus getheilt, so dass die Einheit in jeder der drei Unterabtheilungen genommen zusammen genau einen Obolus giebt. Bei den Römern ist dieses nicht der Fall, wo die Unze in halbe, viertel und drittel Unze zerfällt, deren Summe alsdann eine und ein zwölftel Unze beträgt.

X. Das Rechenbrett.

(Fortsetzung.)

Schon bei dem salaminischen Apparate konnten, wie wir sahen, möglicherweise die Einschnitte nicht selbst zum Markiren dienen, sondern vielmehr der Zwischenraum zwischen je zwei Einschnitten, den ich als eine Kolumne bezeichnete. Das musste um so viel mehr stattfinden, sobald man anfing den ganzen festen Apparat entbehren zu lernen, und nur bei jedesmaliger Anwendung durch Zeichnung auf ein mit Sand bestreutes Brett ihn frisch herstellte. Dieser dem Gedanken nach nahe liegende, aber nichtsdestoweniger bedeutende Fortschritt, da er eine Annäherung von dem bloss instrumentalen Verfahren an die Schrift in sich trägt, knüpft sich vielleicht an den Namen des Pythagoras, vielleicht auch ist er noch älteren Datums, und Pythagoras hat noch eine weitere Verbesserung hinzugefügt.

Dass nämlich Pythagoras irgend eine Veränderung mit dem Rechenapparate vorgenommen haben muss, geht aus einer Tradition hervor, welche mittheilt, die alten Pythagoriker hätten sich zum Rechnen der pythagorischen Tafel bedient, welche später den Namen Abacus erhalten habe.[404b]) Damit ist sicherlich die Meinung verbunden, Pythagoras sei gewissermassen als Erfinder des Apparates anzusehen, habe also zum mindesten irgend etwas darauf Bezügliches neu eingeführt. Und wenn nun der Name Abacus eigentlich der ältere ist, also jener Tradition zu widersprechen scheint, so löst sich, wie ich glaube, dieser Widerspruch zu Gunsten meiner Annahme, wenn man sich die Sache so denkt: Ursprünglich hiess der Apparat Abacus, dann verbesserte ihn Pythagoras, und die Schule ehrte den Lehrer dadurch, dass sie seinen

Namen der halbwegs neuen Rechentafel beilegte; noch später kehrte man zu dem ursprünglichen Namen wieder zurück, vielleicht weil die pythagorische Neuerung ausserhalb der Schule sich nicht verallgemeinerte, so lange ein dem grossen Publikum unbekannter Name daran haftete.

Abacus ist allerdings erst der lateinische also jedenfalls ziemlich späte Name; allein das griechische Wort abax lautet ganz übereinstimmend und kann sicherlich seine weitere Verwandtschaft mit dem semitischen Worte abak nicht verleugnen, [273]) wie mehrfach bemerkt worden ist. Abak heisst Staub, so dass die Uebersetzung Staubbrett oder Sandbrett lauten würde. Die Erinnerung an mit Sand bestreute Bretter ging aber im ganzen Oriente nie verloren. Die dortige Nekromantie kennt ganz genau die Kunst des Sandes, [274]) die Punktirkunst, wie sie in den deutschen Uebersetzungen der Mährchen der 1001 Nacht auch wohl genannt wird, wenn der Zauberer aller Art Punkte und Striche zieht, welche beim Anklopfen an das Punktirbrett andere Gestalten annehmen, und wovon das Wahrsagen aus dem Kaffeesatze ein modernster Ueberbleibsel ist. Allein trotz dieser Analogie und mit Beibehaltung des Namens Staubbrett könnte man doch daran denken, die Rechentafel sei ein fester Apparat, keine bloss gezeichnete gewesen, und das Wort Staub beziehe sich vielmehr auf die Rechenmarken, welche über das ganze Brett zerstreut sich vorfinden und darin dem Staube ähnlich sind. So gezwungen diese Erklärungsweise lautet, so steht sie doch in engem Zusammenhange mit der vorerwähnten Tradition von der Beziehung des Pythagoras zur Rechentafel. Denn derselbe Autor, welcher jene uns mittheilt, setzt kurz darauf die Angabe hinzu, die alten Pythagoriker hätten die einzelnen Ziffern wie Staub über das Rechenbrett ausgestreut, um Multiplicationen und Divisionen mit Leichtigkeit und ohne Irrthum auszuführen. [275])

Wann das Wort Abax zuerst bei den Griechen auftritt, ist nicht ganz mit Bestimmtheit zu ermitteln. Polybius, ein arcadischer Geschichtsschreiber, welcher 203—121 v. Ch. Geb. lebte, benutzt das Wort in einem für uns höchst interessanten Zusammenhange. [276]) Er sagt von den Höflingen, sie glichen den Marken auf dem Abax: Wie diese nach dem Willen des Rechnenden bald einen Chalkous bald ein Talent gelten, so seien die Höflinge auf den Wink des Königs hin bald hochbeglückt, bald überaus elend. Ich will dabei hervorheben, dass die hier genannten Extreme, Chal-

kous und Talent, genau mit denen der salaminischen Tafel übereinstimmen. Ich bemerke weiter, dass die ganze Stelle des Polybius nur dann verständlich ist, wenn man lose Rechenmarken annimmt, die bald in die eine, bald in die andere Kolumne gebracht werden. Endlich setze ich hinzu, dass derselbe Vergleich von Diogenes Laertius[217]) dem Solon zugeschrieben wird, wodurch sowohl der Name Abax als ganz besonders die Kenntniss der Rechentafel mit losen Marken weit hinaufrückt, bis vor Pythagoras. Und doch muss ich bei meiner früheren Annahme beharren, dass Pythagoras der Erste in Griechenland war, der die Rechentafel auf Sand zeichnete. Jedenfalls ist er der Erste, von dem wir mit Bestimmtheit wissen, dass er es that. Ich habe die beweisende Stelle schon früher aus Jamblichus mitgetheilt,[278]) jedoch ohne ihre jetzt zu erläuternde Bedeutung hervorzuheben. Jamblichus erzählt uns nämlich, die ersten Lehrgegenstände, welche Pythagoras seinen Schülern beibrachte, seien die Lehren von den Zahlen und von der Geometrie gewesen, und er habe jedes Einzelne auf dem Abax bewiesen. Wenn aber darnach dasselbe Brett diente, um Arithmetik und Geometrie zu lehren, so konnte es doch nicht besonders mit Einschnitten versehen sein, um als Rechenbrett zu dienen, sondern dasselbe Mittel musste angewandt werden in den einen, wie in den anderen Unterrichtsstunden. Wie also der Geometer seine Zirkel und sonstigen Figuren im Sande beschrieb, was aus vielen Mittheilungen bekannt ist, unter welchen ich nur die oft erzählten den Tod des Archimed begleitenden Umstände hervorhebe, so machte es auch der Rechner auf demselben Abax, d. h. folglich jetzt auf einem mit Sand bestreuten Brette.

Eine sehr nahe liegende Frage geht dahin, wie man bei zeichnender Bildung des Abax die Kolumnen ausfüllte. Möglicherweise geschah es noch immer mit Marken, wie bei dem besonders eingerichteten Apparate.[279]) Eine andere Möglichkeit liegt aber auch darin, dass man die Kolumnen jetzt schriftlich ausfüllte, wie man sie schriftlich bildete.[280]) Das konnte selbst wieder in drei verschiedenen Arten geschehen: durch einzelne Striche, durch als Zahlen geltende Buchstaben oder durch besondere Zahlzeichen. Das erstere Mittel war das nächstgelegene, entsprach den ebensovielen Marken, die man früher benutzt hatte. Aber es musste sich bei der Schrift gar bald als unbrauchbar erweisen, weil es zu zeitraubend war und zudem die einzelnen Striche leicht in einander über-

gingen. Desshalb musste dem gezeichneten Abax die Einführung von abgekürzten Zahlzeichen zur Seite stehen. Das ist jene andere Verbesserung, welche ich Pythagoras jedenfalls zuschreiben möchte, für den Fall dass er auch nicht den gezeichneten Abax nach Griechenland brachte. Welcherlei Zeichen er benutzte ist leicht zu erschliessen, wenn man der Thatsache eingedenk ist, dass man in Gedanken stets mit den Worten und den Zeichen rechnet, in welchen man das Rechnen lernte. Mag z. B. ein Deutscher noch so sehr in den Geist der französischen, der englischen Sprache eingedrungen sein, das Einmaleins denkt er immer deutsch, während er die übrigen Gedanken schon in der fremden Sprache selbst fasst. Pythagoras hatte aber lernend, und später als Priester auch wohl lehrend, in Egypten viele Jahre mit Mathematik sich beschäftigt, hatte in Babylon Gelegenheit gehabt sich im Rechnen zu vervollkommnen. Er muss also an alle anderen Zeichen eher gewöhnt gewesen sein, als an den Gebrauch griechischer Buchstaben statt der Zahlzeichen; und so erklärt es sich einfach genug, dass in der Schule fremdartige Zahlzeichen benutzt wurden, dieselben, wie wir noch sehen werden, aus denen allmälig unsere modernen Ziffern entstanden; so erklärt es sich auch, dass diese Zeichen ausserhalb der Schule nicht verstanden wurden, mochte man sie nun den Kolumnen einzeichnen, oder einzelne Marken mit denselben im Voraus bezeichnen..

Fasse ich nun, bevor ich zu neuen Betrachtungen übergehe, das bisher Entwickelte zusammen, so geht als gesichert jedenfalls hervor, dass das Rechenbrett ein Eigenthum aller alten Kulturvölker war, und dass nur ein und derselbe Grundgedanke den verschiedenen Modificationen des Abacus unterliegt. Ich habe mich jetzt darüber auszusprechen, wie wohl das Rechenbrett seine Kolumnen ordnete. Friedlein kommt zu dem Schlusse,[281]) bei den Rechenbrettern seien ganz allgemein die Linien wagrecht gezogen worden. Das ist nicht richtig. Im Gegentheil war die Lage des Rechenbrettes dem gegenüber, welcher es benutzte, im Alterthume eine solche, dass die einzelnen Kolumnen vertikal gegen ihn gerichtet erscheinen, dass also wenn man die Marken durch Zahlzeichen ersetzte, diese nebeneinander auftreten müssen, wie es noch heute der Fall ist. Das geht unzweifelhaft aus der salaminischen Tafel wie aus dem römischen Abacus hervor, wenn man sich die Stellung der Zeichen nur ansieht, welche den Ord-

nungswerth der einzelnen Kolumnen bestimmen. Und wenn die Abbildung eines Abacisten d. h. eines einen Abacus haltenden Jünglings, welche uns überliefert wird,[282]) Nichts für diese meine Ansicht beweist, so widerspricht sie ihr ebensowenig, wie Friedlein selbst bemerkt hat,[281]) da die auf dem Brette angegebenen 14 Marken in durchaus unverständlicher Weise geordnet erscheinen. Hingegen kann ich die Stelle des Herodot[21]) für mich anführen, in welcher es heisst, dass die Egypter ihre Rechensteine von der Rechten zur Linken benutzten, nicht wie die Griechen von der Linken zur Rechten. Am Anfange des vorigen Kapitels habe ich nämlich schon bemerkt, dass die Griechen bei dem Zahlenrechnen von den Einheiten höchster Ordnung anfingen, welche nach meiner Annahme links sich befanden, so dass also damit die Stelle des Herodot bewahrheitet ist. Ich kann ferner für mich anführen, dass der Suanpan der Chinesen, der Tschotü der Russen dieselbe Lage besitzt; dass sie im 11. und 12. Jahrhundert nachweislich vorhanden war. Erst später muss eine Umwandlung der Vertikallinien in Horizontallinien erfolgt sein, und es wäre eine interessante Frage zu erörtern, wann und wie diese Veränderung eintrat. Jedenfalls war sie im 15. Jahrhundert vollendet, wie wir aus der sogenannten Rechnung auf den Linien wissen. Diese Methode war ein Eigenthum namentlich deutscher Mathematiker vom Ende des 15. Jahrhunderts an, aber noch bis tief in das 17. Jahrhundert hinein. Man unterschied sie von der Rechnung auf der Feder, wie das jetzt noch gewöhnliche Zahlenrechnen genannt wurde. Eines der ältesten Werke, in welchem eine ausführliche Beschreibung des Rechnens auf der Linie gegeben wird, ist sicherlich das in so vielen Beziehungen merkwürdige Sammelwerk, welches Gregorius Reisch aus Freiburg unter dem Namen Margaritha philosophica herausgab, und welches 1503 zuerst gedruckt[283]) sehr viele Auflagen erlebte.[284]) Das vierte Buch dieses Werkes handelt von der Arithmetik, und beginnt mit einem, seit Alexander von Humboldt die Aufmerksamkeit von Chasles darauf lenkte,[285]) berühmt gewordenen Holzschnitte, auf welchem das Rechnen auf der Linie und das auf der Feder durch zwei Männer ausgeführt wird, zwischen welchen die Arithmetik schwebt und in jeder Hand ein Buch hält. Darauf folgen fünf Abhandlungen, oder Tractate, wie sie im lateinischen Texte heissen: Ueber speculative Arithmetik, praktische Arithmetik, von den gewöhnlichen Brüchen, von den in der Physik

vorkommenden Brüchen, endlich der Algorithmus calcularis mit Rechenpfennigen. Diese letzte Abhandlung beschreibt auf zwei Quartseiten die Numeration sowie die sogenannten vier Species auf der Linie. Zum Zwecke der Numeration ist angegeben (**Figur 34**) dass jede der gezeichneten Linien den Werth besitze, welcher ihr vorgeschrieben ist, ein Werth, der also von unten nach oben steigt und von der Einheit bis zur Million geht. Ausserdem wird aber angegeben, dass eine Marke, die zwischen zwei Linien gelegt wird, das Fünffache des Werthes besitzen soll, welchen sie auf der unteren der beiden Linien hätte. Darin zeigt sich also ein Ueberrest, könnte man sagen, der früheren Methode mit Vertikalkolumnen, wo auch die Fünfer über den betreffenden Einern sich fanden. Das Rechnen auf der Linie selbst auseinanderzusetzen ist hier nicht der Platz. Ueberdies lassen die verschiedenen Regeln bei nur geringem Nachdenken sich leicht wieder herstellen, sofern man nur die gewöhnlichen Rechenmethoden in instrumentaler Weise übersetzt; und einige besondere Methoden können erst in einem späteren Kapitel zur Sprache kommen. Die Vertikalstriche, welche bei Rechnungen auf der Linie auch mitunter noch vorhanden sind, dienen dazu, Zwischenabtheilungen zu bilden, um mehrere Zahlen nebeneinander zu bemerken, und keine Verwechslung, der Art eintreten zu lassen, dass man nicht wüsste, zu welcher Zahl diese oder jene Marke gehörte. Dieses instrumentale Rechnen auf der Linie verbreitete sich, wie gesagt, namentlich in Deutschland mit grosser Geschwindigkeit, und wurde in vielfältigen Schriften von einer ganzen Reihe besonderer Rechenlehrer erörtert, unter welchen Adam Riese's Name [286]) wohl ohne besondere Verdienste des Trägers auch im grösseren Publikum sehr bekannt geworden ist, so dass noch heute der Ausdruck „nach Adam Riese" in Deutschland sprüchwörtlich ist, um ein unzweifelhaft richtiges Resultat einfachster Rechnung zu bekräftigen. Warum man auf das instrumentale Rechnen grosses Gewicht legte, sagt Riese uns ausdrücklich, wenn er bemerkt: „Ich habe befunden in Unterweisung der Jugend, dass alleweg, die so auf den Linien anheben, des Rechnens fertiger und lauftiger werden, denn so mit den Ziffern, die Feder genannt anfahen. In den Linien werden sie fertig des Zählen und alle Exempla der Kaufhändel und Hausrechnung schöpfen sie einen besseren Grund, mögen alsdenn mit geringer Mühe auf den Ziffern ihre Rechnung vollbringen." Dieselbe Erfahrung scheint

sich in neuester Zeit in den französischen Primärschulen zu bestätigen, und so erklärt sich eigentlich die Möglichkeit des zeitweiligen Abhandenkommens der instrumentalen Rechenmethoden für Anfänger viel schwieriger, als das anderthalb Jahrhundert hindurch zähe Festhalten an denselben, welches Tennulius so tadelnswerth findet.[287]) So viel über die Lage des Abacus dem Rechnenden gegenüber.

Ich komme nun zur Besprechung eines weiteren Umstandes, welcher von Interesse sein dürfte, nämlich der Ausdehnung, bis zu welcher die Rechenmaschine bei den einzelnen Völkern in Gebrauch war. Mit anderen Worten ich stelle mir die Frage, wie viele Kolumnen auf den Rechentafeln der einzelnen besprochenen Völker existirten, eine Frage, die so beiläufig schon in früheren Kapiteln auftrat. Schon früher habe ich darauf hingewiesen, dass der Zahlbegriff nur bis zu einer gewissen Grenze ein genauer ist, und dass diese Grenze sowohl in der sprachlichen Benennung wahrnehmbar ist, als auch andrerseits höchst wahrscheinlich beim Rechenbrette ihre Bedeutung gehabt hat. Sprachlich merkwürdig sind dabei besonders die Namen für 1000 und für 10000, wie sie bei verschiedenen Völkern auftreten. Das Wort für 1000 ist in der Sprache aller Nationen, die wir bisher betrachteten, ein selbstständiges, aus keinen sonstigen Zahlwörtern als Element gebildetes. So bei den Egyptern wie bei den Babyloniern, bei den Chinesen wie bei den Indern, bei den Griechen wie bei den Kulturvölkern, welche noch einer späteren Besprechung zu unterwerfen sind, den Römern und den Arabern, endlich auch noch bei den Slaven. In einigen dieser Sprachen hat man den Gebrauch des bestimmten Zahlwortes für 1000 auf eine unbestimmte Anzahl ausgedehnt, um anzudeuten dass sie sehr gross sei. Es giebt zwar auch ziemlich niedrige Zahlwörter, welche in solcher unbestimmten Bedeutung angewandt werden. So z. B. werden 10, 12, 20, 100 in ähnlicher Weise benutzt; bei den Türken scheint 40 dieselbe Verwendung zu finden.[288]) Aber damit ist doch stets wenn auch eine grössere, doch keine sehr grosse Zahl gemeint. Diese Rolle erfüllt das Wort 1000 wie im Deutschen, wo man von tausendmaliger Wiederholung spricht, wenn man eine sehr häufige Wiederholung meint, so in den meisten modernen Sprachen, im Englischen, im Französischen, im Italienischen, im Russischen. Genau dieselbe Bedeutung hat aber auch das Tausend der Egypter, wie Champollion in seiner

Grammatik mittheilt, und nicht weniger das Tausend der Römer. Bei den Römern ist noch ein durchaus vereinzeltes höchst merkwürdiges Vorkommen die Benutzung des Wortes für 600 als sehr viel. Pott stellt einen Augenblick die Hypothese auf,[289]) dass 600 vielleicht aus einem anderen Zahlensysteme als dem decadischen diese Bedeutung als runde Zahl, wie er sich ausdrückt, übernommen habe, verwirft sie aber gleich wieder, weil die Arithmetik das nicht zulasse. Das ist nun freilich nicht ganz wahr, denn es giebt ein aus den beiden Grundzahlen zehn und zwölf mischweise gebildetes Zahlensystem, in welchem 600 sehr gut eine Rolle spielen könnte. Aus diesem System entspringen die noch in der modernen deutschen Sprache vorhandenen Zahlwörter: Schock für 60 Stück, Mandel für 15 Stück, und auf ihm beruht ebenso die in den skandinavischen Sprachen gang und gebe Unterscheidung des kleinen Hundert, Lillehundrud nämlich 100 von dem grossen Hundert, Storhundrud oder 120, wie auch die Angelsachsen das kleine und grosse Tausend unterschieden.[290]) Trotzdem möchte ich die Zahl 600 in ihrer ausnahmsweisen Bedeutung gleichfalls nicht aus diesem System ableiten, weil es ein wesentlich germanisches System ist, von welchem keine Spur bei den Römern aufzufinden ist, und andrerseits in germanischen Sprachen das 600 nirgends jenen unbestimmten Sinn erhält. In Bezug auf die Zahl 1000 ist noch zu bemerken, dass sie wenn auch nicht in der Einzahl doch in der Mehrzahl von den Arabern in der Bedeutung sehr gross, unendlich gross gebraucht wird.

Das Wort für 10000 zeigt nun eine bei weitem grössere Verschiedenheit bei den einzelnen Nationen als das für 1000. In allen modernen Sprachen ist es aus 10 und 1000 zusammengesetzt, ebenso im Lateinischen und im Arabischen.[291]) In anderen Sprachen dagegen tritt es als selbstständiges Wort auf, und ich nenne von den Völkern, deren Sprachschatz sich dahin erstreckt, die Egypter, die Babylonier, die Inder, die Chinesen, also grade die ältesten Völkerschaften und auch noch die Griechen, bei welchen diesem Worte dieselbe unbestimmte Vielheitsbedeutung beigemengt ist, welche wir soeben von dem 1000 anderer Sprachen kennen gelernt haben. Die Chinesen benutzen, wie es scheint, beide letztgenannten Zahlen unbestimmt, aber mit dem doch noch innewohnenden Begriffe der Steigerung. So wird erzählt,[292]) dass das Volk, wenn es einen Grossen des Reiches leben lasse, ihm tausend Jahre

wünsche, der dem Kaiser allein zukommende Heilruf erstrecke sich auf zehntausend Jahre. Eine ähnliche Steigerung erkennen wir augenblicklich in dem biblischen „Saul hat Tausend erschlagen, David aber Zehntausend", eine ähnliche sahen wir früher in einer Stelle des Buches Daniel,[41]) wo das Tausend freilich wie das Zehntausend in Wiederholung auftraten; allein darin liegt doch wohl sicher nur eine abermalige Steigerung der Steigerung, wie wir im Deutschen viele vielemal, im Französischen beaucoup beaucoup zu demselben Zwecke verbinden.

Die beiden Zahlen 1000 und 10000 spielen aber eine noch bestimmtere und damit viel wichtigere Rolle bei der Eintheilung der Zahlen in Gruppen oder Abtheilungen, und zwar ist nicht zu verkennen, dass die Griechen auch hier der Zahl 10000 dieselbe Bedeutung zuwiesen, welche die Römer der Zahl 1000 einräumten. Von der Gruppirung der Zahlen bei den Griechen wissen wir durch Pappus, der, wie früher bemerkt, einen Auszug aus den arithmetischen Schriften des Apollonius von Pergä uns überliefert hat. Dieser geistvolle jüngere Zeitgenosse des Archimed benutzte wenigstens die angedeutete Eintheilung der Zahlen, wie jener Auszug beweist. Ob er sie erfunden, darüber herrscht keinerlei Sicherheit, da der Anfang des Auszuges fehlt. Man kann also nur sagen, Apollonius zerlegte die Zahlen in Tetraden. Deren erste ging demnach von 1 bis 9999, die zweite von 10000 bis 9999mal 10000 u. s. w. Die erste Tetrade führte den Namen der Einheiten, die zweite den der einfachen Myriaden, die dritte, welche mit Myriaden von Myriaden anfing, hiess die Tetrade der doppelten Myriaden, und so wird es nun keine Schwierigkeit mehr haben, weiter einzusehen, was Apollonius unter den dreifachen, vierfachen u. s. f. Myriaden versteht. Die Bezeichnung dieser Myriaden erfolgt durch Vorsetzung des *M* als Anfangsbuchstaben von Myrias nebst den aufeinanderfolgenden Buchstaben des Alphabetes in ihrer Zahlenbedeutung. So heisst also die erste Myriade $M\alpha$, die zweite $M\beta$ u. s. w.[293]) Ich will nicht untersuchen, ob Apollonius, oder wer sonst diese Gruppirung in Tetraden erfand, dazu geführt wurde, weil das griechische Alphabet die Bezeichnung der Zahlen nur bis zur Myriade zu vermitteln geeignet war,[294]) so viel ist sicher, dass diese Eintheilung mindestens ebensogut aus dem Sprachgebrauche hergeleitet werden kann, welcher der Myrias eine Sonderstellung einräumt.[295])

Archimed hatte übrigens eine den Tetraden analoge Gruppirung erfunden, welche in seiner sogenannten Sandrechnung näher auseinandergesetzt ist. Man hat diese Schrift in eigenthümlicher Weise mit der Geschichte des Zahlensystems in Verbindung gebracht, und dieselbe fälschlich so ausgelegt, als habe Archimed beabsichtigt in ihr einfachere Rechenmethoden zu lehren. Man hat dann, weil keine Darstellung des rein decimalen Systems sich darin fand, weiter geschlossen dass dieses den Griechen fremd geblieben, und dass somit alle Hypothesen fallen, welche den pythagorischen Ursprung unserer Zahlzeichen oder Aehnliches behaupten. Chasles hat das Verkehrte dieser Auffassungsweise mehr als zur Genüge dargethan.[296]) Und in der That es musste fast ein von Parteileidenschaft so leicht hingerissener Charakter wie Libri sein, um jenes Motiv der archimedischen Schrift zu unterlegen. Es sei erlaubt, die ersten Sätze der archimedischen Sandrechnung hier wörtlich mitzutheilen.[297]) Sie lauten so: „Manche Leute glauben, König Gelon, die Zahl des Sandes sei von unbegränzter Grösse. Ich meine nicht des um Syrakus und sonst noch in Sizilien befindlichen, sondern auch dessen auf dem ganzen festen Lande, dem bewohnten und dem unbewohnten. Andere giebt es wieder, welche diese Zahl zwar nicht für unbegränzt annehmen; sondern nur, dass noch keine so grosse Zahl jemals genannt sei, welche seine Menge übertreffe. Wenn sich nun eben diese einen so grossen Sandhaufen dächten, wie die Masse der ganzen Erde; dabei sämmtliche Meere ausgefüllt und alle Vertiefungen der Erde so hoch, wie die höchsten Berge, so würden sie gewiss um so mehr glauben, dass keine Zahl zur Hand sei, die Menge desselben noch zu überbieten. — Ich aber will mittelst geometrischer Beweise, denen Du beipflichten wirst, zu zeigen versuchen, dass unter den von mir benannten Zahlen, welche sich in meiner Schrift an den Zeuxippos befinden, einige nicht nur die Zahl eines Sandhaufens übertreffen, dessen Grösse der Erde gleich kommt, wenn sie nach meiner Erklärung ausgefüllt ist, sondern auch die eines solchen, dessen Grösse dem Weltall gleich ist.“ Aus diesen Sätzen ergiebt sich nun zweierlei. Einmal zeigt sich, dass Archimed mit seiner Sandrechnung eine Aufgabe lösen wollte, welche mit seiner den Mathematikern bekannten sogenannten geometrischen Exhaustionsmethode in viel innigerem Zusammenhange steht als mit elementaren Rechenmethoden. Es ist der Begriff des ma-

thematisch Unendlichen, den er zu erläutern beabsichtigt, wenn ihm auch dieses Wort selbst noch nicht zu Gebote steht. Er will zeigen, dass es keine bestimmte Zahl von solcher Grösse giebt, dass man nicht eine noch grössere Zahl bilden könnte, ebenso wie seine geometrische Exhaustionsmethode davon ausgeht, dass keine zwei bestimmte nichtidentischen geometrischen Gebilde so nahe zusammenfallen, dass man nicht noch ein drittes Gebilde zwischen beiden sich verschaffen könnte. Zu diesen der Philosophie der Mathematik angehörigen Betrachtungen bedarf er grosser Zahlen, und benutzt dieselben so, dass er, mit Recht alle Detailrechnung bei Seite lassend, nur ins Grobe die Ueberschläge macht, also Nichts weniger beabsichtigt, als Rechenmethoden zu lehren. Zweitens sieht man aber aus dem Mitgetheilten, dass Archimed allerdings eine Schrift über das Zahlenrechnen verfertigt hat, welche dem Zeuxippos gewidmet war, und welche, wie es aus einer späteren Stelle der Sandrechnung hervorgeht, die Grundzüge betitelt war.[298]) In diesem Elementarwerke lehrte er die Bildung der Zahlen, und in ihm hätte die Nachwelt wahrscheinlich eine wissenschaftliche Auseinandersetzung über die Benutzung des Rechenbrettes gefunden, wenn es überhaupt erhalten wäre. Leider ist der Anfang der Sandrechnung die einzige directe Spur, die davon übrig geblieben ist, und so ist nur die Abtheilung der Zahlen in Octaden daraus bekannt, welche Archimed einführte, um sehr grosse Zahlen bequem bezeichnen zu können. Diese Octaden sind nichts Anderes als Zahlengruppen, deren jede zwei apollonischen Tetraden entspricht. Die erste geht also bis zur Zahl 10000 mal 10000, welche die Einheit der zweiten Octade bildet. Einheit der dritten Octade ist dieselbe Zahl, welche bei Apollonius Einheit der vierfachen Myriade ist u. s. w. Diese Eintheilung bis zur 10000sten Myriade der 10000 mal 10000sten Octade durchgeführt bildet insgesammt die erste Periode, und die zuletzt genannte Zahl selbst, welche also nach unserer modernen Schreibweise eine 1 mit 800 Millionen Nullen wäre, bildet die Einheit der ersten Octade der zweiten Periode. Schon diese Zahl ist bei weitem grösser als jene Schlusszahl eines chinesischen Werkes, die im vierten Kapitel erwähnt wurde. Vollständig schwindelerregend ist es aber, wenn Archimed hinzusetzt, so fahre man beständig fort bis zu 10000 Myriaden der 10000 mal 10000sten Octade in der 10000 mal

10000sten Periode d. h. nach moderner Schreibweise eine 1 mit 80000 Billionen Nullen hinter sich!

Der kühne Versuch, solche Zahlen zu ersinnen, würde an sich schon beweisen, dass man Rechenmethoden kannte, welche, was bei kleineren Zahlen erlernt war, auch auf grössere anwandten. Diese Methoden müssen gleichfalls in den archimedischen Grundzügen gelehrt worden sein. Am deutlichsten ergeben sich aber diese Regeln aus den schon häufig erwähnten Fragmenten des Apollonius, in denen sie durchweg angewandt sind. Apollonius unterscheidet nämlich bei jeder Zahl ihren Stellenwerth von der Anzahl der betreffenden Einheiten, welche die Pythmenes, d. h. also die Wurzeln genannt werden, und giebt Regeln an, nach welchen nur mit den Wurzelzahlen die eigentlichen Multiplicationen ausgeführt werden sollen, während die Rechnung mit den Nullen, wie wir heute sagen würden, nachträglich folgt. Allerdings ist das Manuscript, welchem Wallis folgt, überaus verderbt. Doch seine Verbesserungen haben dazu geführt, die einzelnen Sätze, wenn nicht ganz fehlerfrei, mindestens verständlich zu machen, so dass der Grundgedanke doch daraus hervorgeht, welcher eben kein anderer ist als der unseres heutigen Zahlenmultiplicirens. Ich will zur näheren Erläuterung den ersten erhaltenen Satz, welcher der 15. des zweiten Buches des Pappus[237]) ist, in wörtlicher Uebertragung hier einschalten, indem ich mich zur grösseren Deutlichkeit moderner Ziffern bediene: „Seien die Zahlen kleiner als 100 aber durch 10 theilbar, und es wird verlangt, deren Product zu nennen, ohne sie selbst zu multipliciren. Seien etwa die Zahlen 50, 50, 50, 40, 40, 30, so sind deren Wurzelzahlen 5, 5, 5, 4, 4, 3, aus welchen als Product 6000 Einheiten entstehen. Da nun die Menge der Zehner 6 ist, und diese Zahl durch 4 getheilt 2 zum Rest lässt, so ist das Product der Zehner für sich 100 einfache Myriaden. Nun erhält man das Product der von Anfang gegebenen Zahlen durch Multiplication des Productes der Zehner in das Product der Wurzelzahlen. Jene 100 Myriaden mal 6000 Einheiten machen 60 zweifache Myriaden, und so ist das Product von 50 . 50 . 50 . 40 . 40 . 30 gleich 60 zweifachen Myriaden." Es wäre wohl überflüssig ein Wort der Erklärung noch hinzuzufügen, wo die Methode unserer modernen Gewohnheit so nahe kommt. Nur so viel sei angeführt, dass auch Beispiele der Multiplication von Zehnern in Hunderte vorkommen (Satz 18 des Pappus), und dass der 27. und

letzte Satz des Buches das Ganze zu einer Spielerei anwendet, nämlich zur Multiplication aller Buchstaben, die einen gegebenen Vers bilden, miteinander,[299]) wo jedem Buchstaben selbstverständlich der Zahlenwerth beigelegt ist, den er gewöhnlich zu haben pflegt, wie im achten Kapitel ausführlicher besprochen wurde.

Diese Methode existirte also vor dem Jahre 200 v. Ch. Geb. Sie war dem Gedanken und der Ausführung nach einfach und leicht zu erlernen, und dennoch wurde sie nicht allgemein. Dieses jetzt schon als Erwiderung jenen Gegnern, welche die Möglichkeit anzweifeln, dass eine Rechenmethode in einer Zeit bekannt war, und dann einer weniger behülflichen wieder Platz machen konnte; dass sie in dem engeren Kreise einer Schule bekannt sein konnte, und doch nicht unmittelbar Gemeingut Aller wurde.

Die Behauptung, dass die Multiplicationsmethode des Apollonius sich nicht so verbreitete, wie man erwarten sollte, rechtfertigt sich durch den Commentar zu einigen Schriften des Archimed, welchen Eutokius von Askalon im 5. Jahrhundert verfasste. In diesem Commentare[300]) sind nämlich die Multiplicationen, welche in der sogenannten Kreismessung des Archimed vorkommen, ausgeführt, ein für die Geschichte kostbarer Ueberrest von griechischer Rechenkunst. Aus ihnen geht hervor, dass die Multiplication nicht bloss mit den Wurzelzahlen vorgenommen wurde, und ferner dass, wie ich schon einigemal bemerkte, die Multiplication links bei den höchsten Stellen anfing, wobei die entstehenden Theilproducte untereinander geschrieben, und schliesslich addirt wurden. Ob dazu ein Rechenbrett zu Hülfe gezogen wurde, ist nicht angegeben, lässt sich aber desshalb für die Zwischenrechnungen keineswegs gradezu in Abrede stellen.

Der nächste Zweck dieser ganzen Abschweifung war zu zeigen, dass die Griechen Gruppirungen der Zahlen in Abtheilungen von je vier Ordnungen besassen, und dieses dürfte wohl zur Evidenz gebracht sein. Diese Tetraden verschwanden indessen spurlos, und statt ihrer trat die Eintheilung in Triaden auf, welche römischen Ursprunges zu sein scheint, wenigstens nicht mit Bestimmtheit weiter aufwärts verfolgt werden kann. Die Sprache wies eben darauf hin, indem Tausend, ich habe schon darauf aufmerksam gemacht, hier dieselbe Rolle als letztes selbstständiges Zahlwort spielte, wie Zehntausend bei den Griechen. Triaden wer-

den wir in der Zahlschreibung der Römer erkennen, Triaden zeigt der in Manuscripten des 11. Jahrhunderts abgebildete Abacus, dessen römischer Ursprung später erwiesen werden soll. Triaden treten mit derselben Bestimmtheit auf, nachdem die Schrift sich der modernen Ziffern bemächtigt hatte, und so finden sie sich zunächst wohl in der Mitte des 13. Jahrhunderts ausdrücklich angewandt, um die geschriebenen Zahlen besser lesen zu können. In dieser Zeit blühte an der pariser Universität, die damals schon mehr als 100jährigen Bestand zählte, ein englischer Mathematiker, Magister Johannes. Er war in Holywood, dem späteren Halifax in der Grafschaft York geboren, und führte daher den latinisirten Namen seiner Heimath, Johannes de Sacrobosco. Sein Todesjahr ist auf dem Leichensteine als 1256 angegeben.[301]) Das bekannteste seiner Werke ist die oft commentirte Schrift über die Kugel. Aber auch über die elementare Rechenkunst schrieb er zwei Abhandlungen,[302]) die eine in Versen, die andere in Prosa. Die erstere scheint in den dreissiger Jahren zum ersten Male in England gedruckt worden zu sein, die zweite erschien 1523 in Venedig unter dem Namen des Verfassers und schon vorher 1510 in Paris freilich anonym, und ohne dass der Herausgeber Jodocus Clichtoveus gar wusste, von wem die Abhandlung eigentlich war.[303]) Die Identität der beiden Ausgaben von 1510 und 1523 erkannte Chasles sehr wohl;[304]) nur schloss er daraus, die beiden Abhandlungen seien zwar von demselben Verfasser, aber nicht von Johann von Sacrobosco. Das Irrthümliche dieser Meinung hat Drobisch siegreich dargethan und vielmehr die Wahrheit des hier Angegebenen bewiesen. Ich selbst kenne die Schrift nicht aus eigener Anschauung und muss mich daher auf Wiederholung dessen beschränken, was Chasles über den Inhalt, soweit er uns hier interessirt, mittheilt.[305]) Er giebt an, in den alten Abhandlungen, welche den Titel Algorithmus führten, habe man je die 4., 7., 10. Ziffer durch einen darüber gesetzten Punkt bezeichnet. Sacrobosco habe diese Bezeichnung anempfohlen, und sie finde sich in Schriften des 15. und 16. Jahrhunderts wieder. Offenbar beruhte es daher auf einem Uebersehen, dass derselbe Forscher einige Jahre früher[304]) in der Methode des Sacrobosco die Tetraden des Apollonius wiedererkennen wollte. Es waren vielmehr die römischen Triaden, die er nennen musste. Die späteren Schriftsteller ersetzten alsdann den Punkt über der 4., 7., 10. u. s. w. Ziffer durch ein vor jene Ziffer ge-

zeichnetes Komma, nach Chasles[305]) etwa im 17. Jahrhundert, und verzichteten darauf auch dann nicht einmal vollständig, als seit allgemeinerer Einführung der Decimalbrüche das Komma leicht zu Missverständnissen führen konnte. Ich muss diese Angabe dahin berichtigen, dass schon in der Mitte des 16. Jahrhunderts grössere Striche statt des früheren Punktes und an dem Orte des späteren Kommas auftreten. Diese Bezeichnung finde ich in der von Pelletarius um 1545 besorgten Ausgabe der Arithmetik des Gemma Frisius.[306]) In anderen Büchern des 16. Jahrhunderts ist der Punkt noch vorhanden, nur steht er unter der betreffenden Ziffer.[307]) Jedenfalls sind also die Triaden weithin verbreitet, und mit Bestimmtheit bei der Ziffernschrift des 13. Jahrhunderts vorhanden.[308])

Mit dieser Triadeneintheilung stimmt aber endlich auch die Anzahl der Kolumnen bei den vorhandenen Rechenbrettern überein, welche bis zur Einheit einer neuen Triade geht. Der römische Abacus besitzt abgesehen von der Kolumne der Unzen noch 7 Kolumnen, geht also bis zur Einheit der dritten Triade. Genau ebensoweit erstreckt sich das Rechnen auf den Linien. Der griechische Abax scheint mit 10 Kolumnen die Einheit der vierten Triade erreicht zu haben, allerdings eine auffallende Erscheinung, da im Uebrigen keine Triaden bei den Griechen nachweisbar sind. Endlich der chinesische Suanpan besteht in den häufigsten Fällen aus 10 Drähten, wiewohl ich ausnahmsweise auch ein Exemplar mit 11 Drähten sah.[309])

XI. Die Zahlzeichen der Römer.

Ich habe im vorigen Kapitel einen Theil des jetzt zu behandelnden Stoffes schon vorweg genommen, wie es bei der unter den Lesern dieser Schrift wohl allgemeinen Bekanntschaft mit denjenigen Zeichen, die man römische Ziffern nennt, wohl thunlich war. Ich habe also schon bemerkt, dass die Namen der römischen Zahlen in selbstständigen Formen nur bis 1000 reichen, und wie es sich daher vermuthen lässt, dass der Zusammenhang dieses Wortes 1000 mit der Existenz der Triaden kein bloss zufälliger ist. Auch die Zeichen folgen, wie man weiss, dem Gesetze, dass von 10000 an kein eigentlich besonderes Zeichen existirt, und ebensowenig von den Einheiten noch höherer Ordnung, dass vielmehr meistens abgeleitete Zeichen dafür in Gebrauch sind. Ebenso abgeleitet in einer Weise, welche noch zu besprechen sein wird, sind vielleicht die Zeichen für fünf Einheiten irgend einer Ordnung, und so sind denn die modernen Formen dieser römischen Zeichen, von denen ich ausgehen will, die Buchstaben I, X, C, M für 1, 10, 100, 1000 und V, L, D für 5, 50, 500. Ich bemerkte, für die Einheiten höherer Ordnung gebe es abgeleitete Zeichen. Indessen sind auch sie nur bis zu einer durch den Abacus bestimmten Grenze vorhanden, bis zur Million, der Einheit der dritten Triade. Sie entstehen durch Einklammerung schon bekannter Zeichen also ccIↄↄ = 10000, cccIↄↄↄ = 100000 und indem jetzt das Mittel fortgesetzter Einklammerung verlassen, und vielmehr ein anderes Zeichen eingeklammert wird (∞) = 1 Million. Die zwischenliegenden Fünfen lassen sich als die nach rechts schauende Hälfte der nächsthöheren Einheit auffassen, und sind nach Priscians Angabe [216]) Iↄↄ = 5000, Iↄↄↄ = 50000, cI = 500000, das letztere Zeichen freilich wieder unver-

ständlich in seiner Ableitung. Für einige Zahlen steht die Wahl zwischen mehreren Zeichen frei, und so kommt die Zahl 1000 nicht nur als M vor, sondern auch durch das Zeichen des einfach eingeklammerten etwas grösseren Vertikalstriches dargestellt c|ɔ, und ferner auch noch durch das Zeichen ∞, welches zur Bildung von einer Million schon diente. Bei den neueren Mathematikern findet sich bekanntlich das zuletzt angegebene Zeichen in der Bedeutung *unendlich gross*, und den richtigen Grund davon hat wohl Prouhet getroffen,[310]) wenn er auf die unbestimmte Bedeutung des Zahlwortes tausend aufmerksam macht. Wann und wo übrigens das Zeichen des Unendlichgrossen als solches zuerst vorkommt, habe ich noch nicht ermitteln können. Ich halte es für sehr neu, kaum mehr als den letzten Jahrhunderten angehörig. Wenigstens findet es sich nicht bei den Schriftstellern des 17. Jahrhunderts, die ein dem Unendlichkeitszeichen ganz ähnliches zusammengezogenes ae als Zeichen der Gleichheit benutzen.

Die Verwendung der angegebenen römischen Ziffern ist eine hauptsächlich *additive*, so dass das höchste Zahlzeichen zur Linken sich befindet, die niedrigeren ihrem Werthe nach folgen. Geht dagegen ein niedrigeres Zeichen einem höheren voraus, so bedeutet dieses einen Functionswechsel, wie er uns jetzt zum erstenmale vorkommt. Freilich war auch bei den Zahlzeichen anderer Völkerschaften ein Functionswechsel nichts Unerhörtes. So oft eine niedrigere Zahl einer höheren voranging multiplicirte sie dieselbe, statt ihr einfach zuaddirt zu werden; und bei den Zeichen der Keilschriftsvölker veränderte dabei das Zeichen der niedrigeren Zahl statt seiner Function mitunter seine Bedeutung. Bei den Zeichen, die jetzt besprochen werden, ist jedoch der Functionswechsel ein ganz anderer. Hier geht die Addition nicht in Multiplication über, sondern in *Subtraction*. Das Einheitszeichen also vor dem Zeichen der Fünf oder der Zehn stellt 5 weniger 1, 10 weniger 1, d. h. 4 und 9 dar.

Als Bezeichnung steht diese subtractive Benutzung der römischen Ziffern wohl einzig da; wenigstens war es mir nicht möglich, etwas Aehnliches anderwärts aufzufinden. Allein in der Wortbezeichnung der Zahlen tritt der Gedanke in vielen Sprachen hervor, nicht die Zahl selbst ohne Weiteres zu benennen, sondern *von einer höheren Zahl auf die eigentlich gemeinte zurückschliessen* zu lassen. Die Ausführung dieses Gedankens

besteht theils in einer Subtraction, theils in einer Division, und diese letztere selbst wieder ist mitunter noch mit einer nur angedeuteten Addition verknüpft. Die Zahlwörter eins und zwei werden am häufigsten subtrahirt. Dieses entspricht z. B. in der lateinischen Sprache durchweg dem Gebrauche bei den Zehnern. Man sagt duodeviginti, d. h. 2 von 20 für 18, ebenso undecentum, 1 von 100 für 99 u. s. w. Auch im Griechischen werden 1 und 2 bei den Zehnern zuweilen abgezogen, wozu das Zeitwort dein in seiner transitiven wie in seiner intransitiven Bedeutung, als b e d ü r f e n und als f e h l e n angewandt wird.[311]) So drückt man 58 aus durch 60 welche 2 bedürfen; 49 durch 50 woran 1 fehlt. In der gemeinsamen Stammsprache, im Sanskrit, ist gleichfalls eine Subtraction mittelst des Wortes una (vermindert, weniger) in Gebrauch.[312]) Sei es nun dass das una selbst allein einem Zahlworte vorgesetzt wird, und man in Gedanken eka, eins hinzuhören muss z. B. unavingsati, vermindertes 20 statt 19; oder dass das eka wirklich ausgesprochen wird, und sich dabei mit una zu ekona zusammensetzt z. B. ekonaschaschta, um 1 vermindertes 60 statt 59, oder dass andere Zahlen als eins abgezogen werden z. B. pantschonangsatam, um 5 vermindertes 100 statt 95. Die dividirende Benennung, wie ich mich oben ausdrückte, finde ich in modernen Sprachen namentlich im Deutschen wo die Wortverbindungen: ein viertel Dutzend, ein halbes Hundert, ein halbes Tausend in der Regel weniger beachtet werden, als sie es wohl verdienen. In ihnen erkenne ich wenigstens das sprachliche Analogon zu der Art, wie die römischen Zahlzeichen der Fünfer entstanden sein sollen, wovon nachher noch die Rede sein wird. Endlich, sagte ich, wende man auch noch eine dividirende Benennung an, verknüpft mit einer nur angedeuteten Addition. Dahin gehören die deutschen Ausdrücke: anderthalb, dritthalb, sechsthalb. Deren Bedeutung ist nämlich offenbar so aufzufassen, dass man sagt das andere (zweite) halb, das dritte, das sechste halb, und die Existenz des ersten, der 2, der 5 als selbstverständlich hinzufügt, und so $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$, $5\frac{1}{2}$ erhält. Ganz ähnliche Ausdrücke giebt es in der lateinischen wie in der griechischen Sprache,[313]) und eine noch merkwürdigere Anwendung des Wortes „ein halb“ kommt in der Sprache der Malaien vor.[314]) Dort wird nämlich das betreffende Zahlwort, dessen letzte Einheit nur zur Hälfte genommen werden soll, nach dem Worte halb ausgesprochen, und die gemeinte Einheit ist eine Einheit höherer Ordnung. Also

halb dreissig heisst die Hälfte der letzten zehn zu den selbstverständlich vorhandenen zwanzig oder 25; ebenso heisst natürlich halb sechzig 55 u. s. w.

Ich kehre wieder zur subtractiven Schreibart der Römer zurück. Sie war freilich selbst nur auf wenige Fälle beschränkt. Sie fand statt in IV = 4, IIX = 8, IX = 9, XL = 40, XC = 90, CD = 400, wovon das Zeichen für 8 schon zu den Seltenheiten gehört. Andere subtractiven Zeichenverbindungen dürften gar nicht vorkommen, wenigstens nicht in alter Zeit. Seit Erfindung der Buchdruckerkunst, und seit die römischen Ziffern überhaupt nur seltener und nicht aus Nothwendigkeit sondern aus einer Art von gelehrter Grille angewandt werden, hat man diese Schranken sehr erweitert. Eines der merkwürdigsten Beispiele, welches aber wohl mehr einem Druckversehen als bestimmter Absicht zugeschrieben werden muss, ist die Jahreszahl 1498 auf einer der ältesten Ausgaben des Cornelius Nepos. Dieselbe ist in Folio erschienen und aus der Druckerei von Jacobus Britannicus in Brescia hervorgegangen und schreibt am Ende des Buches die Jahreszahl MCCCCIID. So bildet sie wenigstens Lessing in seinen Kollektaneen zur Literatur ab,[315]) und bemerkt auch schon, dass die zwei Einer vor der D der Bedeutung 498 wohl entsprechen können, dass aber dann unbegreiflich erscheine, was die vorangegangenen 4 kleineren c bedeuten sollen.

Stand ein Zeichen niedrigerer Bedeutung vor einem M, so wurde es bei den Römern nicht subtractiv behandelt sondern multiplicativ, also mit dem Functionswechsel, der, wie ich vorhin sagte, auch bei andern Völkern vorkommt. So kann also 10000 ausser durch das oben angegebene Zeichen des eingeklammerten 1000 auch durch XM geschrieben werden, 100000 durch CM, ohne dass etwa eine Verwechslung mit der Zahl 900 möglich wäre.[316]) Eine derartige Verwechslung ist dagegen bei MM möglich, welches an und für sich ebensowohl 2000 bedeuten kann durch blosse Juxtapposition, als auch 1000 mal 1000, oder eine Million durch multiplicatives Verfahren. Zum Glücke sind die beiden Zahlen so sehr von einander verschieden, dass der Sinn alsbald darüber Aufschluss giebt, wie die Zahl zu lesen ist. Ausserdem giebt es noch eine zweite Bezeichnungsweise der Tausende, welche auch diese Schwierigkeit, so unbedeutend sie ist, umgeht. Sie besteht darin, dass die Zahlen, welche angeben, wie viel Tausende gemeint sind, mit

einem sie deckenden Horizontalstriche versehen werden.[317]) Also $\overline{\text{I}}$ bedeutet 1000, $\overline{\text{X}}$ bedeutet 10000, $\overline{\text{M}}$ eine Million, und auch wenn mehr als ein Zahlzeichen überstrichen ist, bleibt dieselbe Bedeutung bei also z. B. $\overline{\text{CXXIV}}$ für 124000. Die verschiedenartigsten Quellen bürgen für die Richtigkeit dieser Angaben. Die vollständigste Zusammenstellung der hierher gehörigen Thatsachen fand ich bei Matthäus Hostus, einem Schriftsteller des 16. Jahrhunderts. Da dieser Gelehrte, wie es scheint, sehr wenig bekannt ist und namentlich seine auf unseren Gegenstand bezügliche Schrift nirgends angeführt wird, wo man dieselbe nachzuschlagen geneigt sein könnte, so sei hier eine kurze Notiz über ihn eingeschaltet. Er war Philologe und Numismatiker, wurde im Jahre 1509 bei Cöln an der Spree von sehr armen Eltern geboren und starb 1587 in Frankfurt an der Oder, wo er 53 Jahre lang Professor der Griechischen Sprache gewesen war. In den letzten Jahren seines Lebens liess er in Antwerpen eine Schrift über die Zahlzeichen der Griechen und Römer erscheinen, welche auf 62 Octavseiten ziemlich engen Druckes manch Interessantes mittheilt, wovon ich noch Einzelnes zu erwähnen haben werde.[318])

Die Frage, zu deren Beantwortung ich jetzt schreite, geht dahin, wie wohl jene römischen Zahlzeichen entstanden sein mögen. Der Conjecturen giebt es mancherlei, und ich beginne damit, diejenigen Vermuthungen anzugeben, welche Priscianus, jener früher schon benutzte byzantinische Grammatiker des sechsten Jahrhunderts uns aufbewahrt hat.[216]) Sie sind das Tollste, was man wohl an Hypothesen finden kann, und beweisen uns, wenn anders dazu ein Beweis erforderlich ist, wie nachträgliche Erklärung oftmals einen ganz anderen Sinn, respective Unsinn in Zeichen hineintragen kann, als ursprünglich denselben innewohnte, ein Satz, den ich noch wesentlich zu benutzen gedenke. Priscianus giebt also folgenden Ursprung an. Die Einheit sei ein I in Nachahmung der Griechen, welche sich dieses Buchstabens, als Anfangsbuchstaben der epischen Femininform von eins bedienten. Fünf wird durch V als den fünften Vokal dargestellt; zehn durch X entweder weil es im lateinischen Alphabete gleich nach dem V kommt, oder weil es im griechischen Alphabete der zehnte Consonant ist. Die Entstehung des L für fünfzig ist noch feiner ausgeklügelt. Bei den Griechen bedeute nämlich der Buchstabe N fünfzig, und dieser sei häufig in L übergegangen; so schreibe man z. B. auch lympha für nympha,

warum sollte das nicht ebenso stattfinden, wenn L Zahlzeichen ist? Dass C der Anfangsbuchstabe von centum, hundert, genannt wird, liegt so nahe, dass es einen fast wundert, dass keine andere Erklärungsweise versucht ist. D folgt unmittelbar auf C und ist desshalb auch das nächste Zahlzeichen. Das Zeichen für 1000, fährt Priscian fort, war ursprünglich das griechische *X*, der Anfangsbuchstabe von Chilia, dem griechischen Worte für 1000. Da dieses aber auch 10 bedeutete, so wurde es in der höheren Bedeutung eingeklammert, die Striche wurden vereinigt und so entstand ∞. Endlich 10000 heisst im Griechischen Myrias, und so wählte man zur Bezeichnung das gleichfalls wieder eingeklammerte M, also (M). Ich brauche nach diesen Proben mein früheres Urtheil über diese Conjecturen wohl nicht näher zu begründen. Einfacher ist die Erklärung der römischen Zahlzeichen, welche sich bei Petrus Ramus findet,[319]) dem durch Gelehrsamkeit und reich bewegte Geschicke gleich merkwürdigen Philosophen des 16. Jahrhunderts. Dieser behauptet, die Eins, Zehn, Hundert, Tausend seien d u r c h 1, 2, 3, 4 S t r i c h e dargestellt worden, welche so verbunden wurden, dass sie die Zeichen I, X, ⊏, ⊓⊓ lieferten, und aus diesen habe die H a l b i r u n g V als halbes X, L als halber ⊏, D als halbes abgerundetes ∞ gegeben. Hostus giebt eine ganz ähnliche Erklärung und fügt noch die Andeutung hinzu, woher wohl jener Gedanke komme 1, 2, 3, 4 Striche zur Darstellung jener Zeichen zusammenzusetzen. Das hänge mit dem Abacus zusammen, weil den Einheiten die erste Linie angehöre, den Zehnern die zweite, den Hunderten die dritte, den Tausenden die vierte. Wir sehen also, dass Hostus schon demselben Irrthume sich hingab, wie Friedlein, als ob der Abacus der Römer dieselbe Stellung gehabt habe, und ganz ebenso aussah, wie das zu seiner Zeit übliche Rechnen auf den Linien.

Abgesehen von diesem einem Momente gebe ich zu, dass diese Erklärung gar sehr scharfsinnig ist. Sie ist es nur in zu hohem Grade. In so einfach naturgemässer Weise, dem Abacussysteme folgend, kann man nachträgliche Erläuterungen geben; aber so entstanden keine Zeichen. Auch ist überdies noch dasselbe einzuwenden, was ich früher schon über die Entstehung der modernen Ziffern aus Strichen bemerkte, die Entstehung müsste jedenfalls eine allmälige sein, und das ist sie nicht. Aus dem I wird nicht unmittelbar X, aus diesem nicht ⊏, aus diesem nicht ⊓⊓ durch

blosses Hinzufügen eines neuen Striches. Es wird also zur Entscheidung der Ursprungsfrage wohl auf die ältesten Zeichen der Römer zurückgegangen werden müssen, und zugleich auf die tuskischen Zeichen, welche der Schrift der Römer zwar sicher nicht direct zu Grunde liegen, aber doch Vergleichungspunkte in grosser Anzahl darbieten. Es wird zugesehen werden müssen, welcherlei Gestalten dort auftreten, und ob dieselben in der That durch einfache Striche zu erklären sind. Ich sagte die Schrift der Römer biete zwar Aehnlichkeit mit der tuskischen dar, stamme aber nicht aus derselben. Dieser Ueberzeugung war schon durch Ottfried Müllers scharfsinnige Untersuchung Bahn gebrochen,[320]) und Mommsens weitere Forschungen haben sie nur noch mehr verbreiten können.[321]) Schon die Richtung der Schrift, welche bei Etruskern und Römern entgegengesetzt ist, zeigt, dass jene ihr Alphabet wohl unmittelbar aus orientalischer Quelle entnahmen, während diese aus griechischer Vermittelung ihr Material erhielten, nachdem die Richtung der Schrift zuerst in eine theils rechts- theils linksläufige übergegangen, endlich zu einer durchaus rechtsläufigen geworden war. Dasselbe wird auch dadurch noch wahrscheinlicher, dass manche Buchstaben dem tuskischen Alphabete angehören, die dem römischen fehlen, und ebenso umgekehrt im römischen Alphabete das altgriechische Koppa als Q erhalten ist, welches die Etrusker nicht kennen. Gleichwohl war sicherlich, wie der letzte Ursprung im Oriente gemeinschaftlich war, auch später noch eine gegenseitige Einwirkung vorhanden, theils durch friedlichen Verkehr der nachbarlich wohnenden Völker, theils durch die abwechselnd stattgefundene Herrschaft der Tusker in Latium, der Römer in Etrurien.[322]) Dass die Zahlzeichen solcher Einwirkung besonders friedlicher Handelsverbindung am Meisten ausgesetzt sind, habe ich an verschiedenen Stellen schon hervorgehoben, und in der That haben auch schon in sehr früher Zeit Ausgleichungen zwischen den Zahlzeichen der Etrusker und Römer stattgefunden[323]) **(Figur 35)**. Diese ältesten Zeichen bieten aber nicht die geringste Spur einer gradlinigen Entstehung mit einziger Ausnahme der Eins, wogegen die Aehnlichkeit mit alten Buchstaben um so deutlicher hervortritt. Eigentlich giebt es, wie Müller ganz richtig bemerkt,[324]) nur zwei Arten Buchstaben als Zahlzeichen zu gebrauchen. Entweder man lässt den Buchstaben die Zahl bedeuten, die sich auf seine Stellung im Alphabete bezieht, oder diejenige, deren Name

in irgend einer Beziehung zu ihm steht, etwa so anfängt. Nichts desto weniger kommt man hier mit keiner von beiden Hypothesen durch, wie die missglückten Versuche beider Gelehrten, denen ich hier folge, zeigen. Ich muss mich daher mit diesem negativen Resultate begnügen, dass zwar die richtige Ableitung der römischen und der tuskischen Zahlzeichen noch nicht bekannt ist, dass aber die Hypothese des Ramus nicht mehr Wahrscheinlichkeit für sich hat, als die des Priscian. In einer früheren Abhandlung [325]) habe ich selbst versucht, wenn auch nicht die römischen Zahlzeichen zu erklären, doch die Aufmerksamkeit auf die bis dahin unbeachtet gebliebene Aehnlichkeit des X und C mit gleichbedeutenden egyptischen Zahlzeichen hinzulenken. So vorsichtig diese Hinweisung damals erfolgte, so muss ich doch jetzt ausdrücklich erklären, dass ich keinerlei Gewicht auf diese wohl nur zufällige Analogie lege. Gleichwohl wollte ich nicht versäumen sie der Vollständigkeit wegen anzuführen.

Bei Betrachtung der alten Zahlzeichen sieht man alsbald wie das römische und das tuskische 1000 nur in der Lage sich bedeutend unterscheiden. Aus dem liegenden römischen Zeichen entstand leicht durch Einschnürung das ∞, aus welchem selbst dann wieder CIↃ ward durch Auseinanderziehung und Auflösung in einzelne Linien, eine Veränderung, die mitunter auch bei Buchstaben vorkommt. [326]) Die aufgelöste Gestalt für 1000 diente dann, wie ich früher schon sagte, als Vorbild für die Einheiten höherer Ordnung, indem man durch wiederholte Einklammerung die jedesmalige Vervielfältigung mit 10 andeutete. Allerdings wurden aber dadurch diese Zeichen so weitläufig, dass man schon wegen der Complication derselben den vertausendfachenden Horizontalstrich vorzog, oder, wie ich gleichfalls vorher bemerkte, die Multiplication in das nachgesetzte M ausführte. Ja mitunter scheint sogar ein blosser Punkt dieses multiplicirende M ersetzt zu haben ähnlich wie bei den Griechen, denen auch diese Sitte sehr gut entnommen sein kann. Diese Methode, welche selbstverständlich auf solche Fälle beschränkt ist, in welchen ausser den Tausenden auch noch Hunderte oder doch wenigstens Zehner oder Einer vorhanden sind, weil der das M vertretende Punkt nur dann als besonders augenfällig erscheint, wenn er nicht bloss nach einem Zeichen, sondern zugleich vor einem anderen sich befindet, also inmitten einer Zahl steht, war sicherlich im ersten Jahrhunderte im Gebrauch. Man kann

diese Zeit dadurch belegen, dass die regelmässig angeführte Quelle für den Punkt die Naturgeschichte des Plinius des Aelteren ist, der, im Jahre 23 n. Ch. Geb. geboren, bei dem berühmten Vesuvausbruch des Jahres 70 das Leben verlor. In zwei Büchern des mit kolossalem Wissen zusammengetragenen Werkes finden sich die hier in Betracht kommenden Stellen.[327]) Zuerst im sechsten Buche, welches wesentlich geographischen Inhaltes ist, und in welchem die gegenseitigen Entfernungen von merkwürdigen Erdpunkten nach Schritten angegeben sind. Da mussten wohl bei der grossen Anzahl von zu schreibenden Zahlen alle Abkürzungen gebraucht werden, deren man fähig war, und ebenso lag die Veranlassung zu Schreibfehlern sehr nahe. In der That zeigen auch die verschiedenen Manuscripte des Plinius ziemlich bedeutende Varianten dieser Zahlen. Theils sind ganz andere Zahlen vorhanden, theils sind Horizontalstriche angegeben oder weggelassen, theils stehen M, theils stellvertretende Punkte, und was das Auffallendste ist, sowohl Horizontalstriche als Punkte nicht immer in derselben Bedeutung. In jedem einzelnen Manuscripte kommt jedoch, kann man wohl behaupten, jede einzelne Schreibmethode vor, so dass auch jede einzelne als wohlberechtigt, und nicht etwa nur durch Verschreiben entstanden betrachtet werden muss. Die Hauptstellen finden sich im 17., 20., 24. und 33. Kapitel dieses Buches, welche zusammengenommen den eben erwähnten Totaleindruck hinterlassen.

Am merkwürdigsten ist sicherlich das 33. Kapitel, in welchem Zahlen vorkommen, die den Horizontalstrich und den Punkt vereinigt, in anderen Manuscripten zwei Punkte aufweisen und zwar, wie ich eben schon andeutete, in zweierlei Bedeutung. Den zuverlässigen Beweis dafür entnehmen wir der Stelle, in welcher nach Agrippa die Entfernung von der Meerenge von Cadix bis nach dem Golfe von Issus auf $\overline{\text{XXXIV}}$. XL . M Schritte angegeben wird. Nach unserer bisherigen Gewohnheit müssten wir diese Zahl als 34040 Tausendschritte lesen. Nun hat Gosselin in seiner klassischen Schrift über die Geographie der Alten ausgerechnet,[328]) dass diese Entfernung als absoluter Unsinn unmöglich von irgend einem Schriftsteller habe behauptet werden können. Lese man hingegen die Entfernung zu 3440 Tausendschritten, so entspreche dieses für eine Landkarte in ebener Projection einem Bogen von 39° 18′ 51″, was zwar von der genauen Entfernung 41° 30′ noch immer um

$2^0 11' 9''$ sich unterscheidet, allein diese Differenz ist doch nicht so gewaltig, dass wir sie nicht auf Rechnung der damals unvollkommneren Messapparate und der Methoden setzen könnten. Ein in Paris befindliches Manuscript des Plinius, welches unter dem Namen des pariser Codex Nro. 6797 bekannt ist, benutzt in diesem Kapitel zwei Punkte statt Punkt und Horizontalstrich. Es giebt auch z. B. noch die Zahl XII . L . D an, welche analog zu der eben erläuterten Zahl nicht als 12050500 sondern als 1250500 zu lesen ist. Der Sinn der Stelle liefert wieder den Beweis. Und ganz ebenso ist die Anwendung zweier Punkte aufzufassen, welche derselbe Codex im dritten Kapitel des 33. Buches zeigt. Jenes ganze Buch handelt von Metallen, deren Gebrauch und namentlich deren Anwendung zu Goldmünzen. Die Nationalökonomie entnimmt ihm unschätzbare Angaben über die Menge von Münzmetall, welche zu verschiedenen Zeiten existirte, und so heisst es z. B. am Anfange des Bürgerkrieges unter dem Consulate von Sex. Julius und L. Marcius seien im Staatsschatze XVI . XX . DCCCXXIX Pfund Gold vorhanden gewesen. Das kann aber hier nicht anders heissen als 1620829 Pfund Gold.

Der Erste, welcher auf die hier berührten merkwürdigen Zahlen aufmerksam machte, war meines Wissens ein französischer Gelehrter des 15. bis 16. Jahrhunderts, Wilhelm Budäus, welcher von 1467 bis 1540 lebte. Er war einer der ersten Philologen und Historiker seiner Zeit, und wusste seine auch äusserlich glänzende Stellung als königlicher Sekretär in Paris und seinen bedeutenden Einfluss auf die verschiedenen Könige, deren Regierungen innerhalb seiner Lebenszeit fallen, zum Besten der Wissenschaft zu benutzen. So ward er der Gründer der noch heute unter dem Namen College de France berühmten Anstalt, und auch die Königliche, im Augenblicke Kaiserliche, Bibliothek verdankt ihm ihre Entstehung. Sein uns hier interessirendes Hauptwerk behandelt das Münzwesen alter und neuer Zeit.[329]) Nach ihm wurden dann sämmtliche Stellen des sechsten Buches der von ihm bemerkten noch hinzugefügt, und ältere wie neuere Schriftsteller[330]) bestätigten die überraschende Thatsache, dass der Punkt sowie der Horizontalstrich bei erstmaliger Anwendung zwar vertausendfacht, bei wiederholter Anwendung innerhalb derselben Zahl aber dort, wo er auf die höchsten Ordnungen sich bezieht, nur verhundertfacht. Das Erstere bildet eine untrügliche Uebereinstimmung mit dem Triadensystem, dessen römi-

schen Ursprung ich behaupte. Das Zweite steht ebenso untrüglich als Ausnahme von demselben da. Ich will nur hinzusetzen, dass diese Ausnahme sich ebensowenig nach dem Tetradensysteme als nach dem Triadensysteme erklärt, und ferner, was wohl noch nicht von neueren Schriftstellern beachtet worden ist, dass dieselbe Ausnahme sich auch im 16. Jahrhundert bei Anwendung der im vorigen Kapitel besprochenen abtheilenden Punkte wiederfindet. So schreibt der jetzt oft genannte Hostus $15\dot{6}0\dot{0}000$ und $17\dot{3}9\dot{0}000$ statt $\dot{1}560\dot{0}000$ und $\dot{1}739\dot{0}000$, wie es consequenter Weise sein müsste; und in der Margaritha philosophica finde ich nun gar ein Beispiel, wo der Autor seiner Inconsequenz wieder inconsequent wird und $\dot{4}59\dot{3}62\dot{9}022$ schreibt.[331])

Auf ein anderes Zeugniss des Bewusstseins des decadischen Fortschreitens bei den Zahlen, welches in jenen bis jetzt angegebenen Zeichen und Abkürzungen jedenfalls durchschimmert, hat Vincent aufmerksam gemacht.[332]) Julius Sextus Africanus schrieb um 222 n. Ch. Geb. seine sogenannten Kesten. Die wörtliche Uebersetzung dieses Titels lautet „mit der Nadel Durchstochenes", und dieses ist wohl in dem Sinne von Aneinandergeheftetem aufzufassen, Kollektaneen, womit der Inhalt übereinstimmt. Entweder diese uns wirklich erhaltenen Kesten, oder wie Martin will[333]) eine auf dieselben sich stützende Compilation eines Byzantiners enthalten im 76. Kapitel, welches von den F e u e r s i g n a l e n handelt, die Erzählung von folgender Gewohnheit der Römer:[334]) „Dazu ersannen die Römer Etwas, was mir sehr wunderbar erscheint, indem sie alle Zahlen, welche sie wollen, mit Signalfeuern bezeichnen. Sie sondern sich nämlich an Plätzen ab, welche zum Gebrauche der Signale bequem sind, und pflanzen eines zur Rechten, eines zur Linken, eines in der Mitte auf. An diesen unterscheiden sie die Zeichen, indem sie von 1 bis 9 an der linken Seite anweisen, von 10 bis 90 in der Mitte, von 100 bis 900 zur Rechten. Wenn sie also 1 zeigen wollen, befestigen sie eine Fackel auf der linken Seite, eine zweite, wenn sie 2 zeigen wollen, eine dritte, wenn 3 u. s. w. Wollen sie hingegen 10 bezeichnen, so befestigen sie eine Fackel an den mittleren Ort, drei bei 30 u. s. w. In ähnlicher Weise befestigen sie einmal eine Fackel auf der rechten Seite, wenn sie 100 anzeigen wollen, zwei wenn 200 und drei wenn 300, und ähnlich verhalten sie sich in Bezug auf andere Zahlen. So machen

sie die Zeichen nach den Elementen und fliehen die Zahl. Denn wenn sie 100 anweisen wollen, heften sie nicht etwa hundertfache Fackeln an, sondern einfache auf die rechte Seite, wie es vorher gesagt wurde. Und das thun sie auf gegenseitige Uebereinkunft, indem die Einen mit Hülfe der Zeichen in Kenntniss setzen, die Anderen in Erfahrung bringen und wieder durch Zeichen andeuten, was in den feurigen Elementen enthalten ist. Und so erkennen sie nun dieses, und offenbaren es zugleich den nach ihnen Aufgestellten, und diese sorgen gleicherweise für die Signale für die Nachfolgenden bis zu den zuletzt Stehenden, welche noch mit Signalen zu thun haben.“ Hierin zeigt sich ganz offenbar dasselbe System, welches dem Abacus zu Grunde liegt, das System des fortschreitenden Werthes der Zahlenelemente, je nachdem sie an einem anderen Orte befindlich sind, das System der vertikalen Kolumnen, mit anderen Worten das System des modernen Positionswerthes der Ziffern, so weit es ohne die Null durchgeführt werden kann.

Dasselbe System spricht sich eigentlich noch deutlicher in einer schriftlichen Bezeichnung der Zahlen aus, welche ich hier anführe, wiewohl ich nicht mit aller Sicherheit behaupten kann, dass sie grade hierher gehört. Sie besteht im Wesentlichen darin, dass gewisse Zeichen für 1 bis 9 angegeben sind, dass ausserdem ein grösserer Horizontalstrich gezogen wird, und dass die 9 Zeichen je nachdem sie links über oder unter oder rechts über oder unter dem Horizontalstriche zu stehen kommen, Einer, Zehner, Hunderte und Tausende bedeuten, sei es nun dass nur an einer dieser Stellen oder an mehreren zugleich Zahlzeichen auftreten. (**Figur 36**). Darnach können alle Zahlen von 1 bis 9999 dargestellt werden. Mitunter erscheint auch die ganze Figur um einen rechten Winkel gedreht (**Figur 37**), so dass der gemeinsame die einzelnen Rangstellen bestimmende Strich zum Vertikalstrich wird, die Einer rechts, die Zehner links oben an demselben auftreten; die Hunderte und Tausende nehmen dann die Stellen unten rechts und links von dem Vertikalstriche ein. Dieses System konnte ich nicht bis auf seine wirklichen Ueberreste verfolgen. Der älteste Schriftsteller, bei welchem ich es beschrieben fand, ist Hostus, und dieser theilt mit, nach Johannes Noviomagus sei dieses Bezeichnungssystem b e i g e w i s s e n A s t r o n o m e n in Gebrauch.[335]) Auch Henisch soll diese Zeichen angeben, und sie c h a l d ä i s c h e Z e i c h e n nennen.[336]) Jedenfalls ist aber dieser Schriftsteller um fast 100 Jahre jüngeren

Datums als Noviomagus und so muss für's Erste dieser Gelehrte als die Urquelle betrachtet werden, auf die man zurückzugehen hat. Sein eigentlicher Name lautete Bronchorst. Er wurde 1494 zu Nimwegen geboren und starb 1570 in Köln, wo er als Professor der Philosophie angestellt war, nachdem er vorher in Rostock Mathematik gelehrt hatte. Auf welche von den vielen Schriften des Noviomagus Hostus sich bezieht, sagt er leider auch nicht einmal, so dass dadurch die Nachforschung noch erschwert ist.[337]) Wenn ich bei diesen so mangelhaften Kenntnissen das ganze System hier anführe, so geschieht es, weil ich keine Astronomen kenne, denen ich eine solche Schreibweise eher zutrauen möchte, als den sogenannten Chaldäern der römischen Kaiserzeit, die immer mit dunkeln Zeichen und eigenthümlichen Figuren ihre Prognostika zu stellen liebten. Einen anderen Grund kann ich freilich nicht anführen, wenn man das Citat aus Henisch, welches ich dritter Hand entnehme, nicht dafür gelten lassen will.

Ich komme endlich zu einer seit Vossius häufig ausgesprochenen Vermuthung,[338]) welche nur in aller Kürze als nichtig dargestellt werden muss. Bekanntlich benutzten die alten Römer stenographische Zeichen für sehr viele Wörter, welche seit der Mitte des vierten Jahrhunderts dem Tiro, dem Freigelassenen des Cicero als Erfinder zugeschrieben und desshalb tironische Zeichen genannt werden. In wie weit diese Hypothese gerechtfertigt ist kann hier nicht untersucht werden. Jedenfalls hat wohl zu Ciceros Zeiten eine solche Schnellschrift existirt.[339]) Einige dieser Zeichen sehen nun modernen Ziffern, namentlich den Zeichen 2, 3, 6, 7, 9 zum Verwechseln ähnlich und daher entstand bei Vossius und seinen Nachfolgern die Meinung, dies könne wohl der Ursprung unserer Ziffern sein. Kopp, der sich mit der tironischen Schnellschrift auf's Eingehendste beschäftigte, hat indessen gezeigt,[340]) dass diese Annahme durchaus unhaltbar ist, indem die betreffenden Zeichen, weit entfernt Ziffern zu sein, vielmehr abgekürzte Silben, zum Theil auch Wörter sind (**Figur 38**). Die tironischen Zahlzeichen hingegen existiren allerdings, sehen aber unsern Ziffern durchaus nicht ähnlich.

XII. Römische Mathematiker.

Der oberflächlichste Vergleich dessen, was im letzten Kapitel vorgetragen wurde, mit dem Inhalte des Kapitels, welches über griechische Zahlzeichen handelte, ergiebt einen gewaltigen Unterschied zwischen beiden. Von den griechischen Schriftstellern war ich in der Lage fast durchgängig solche zu benutzen, deren Name in der Geschichte der Mathematik einen guten Klang besitzt; die Römer hingegen, die ich anführte, sind theils Grammatiker, denen die blosse Form die Hauptsache bildete, und denen eine Hypothese um so lieber war, je künstlicher sie dem zu Erklärenden sich anschmiegte, theils war es ein Polyhistor, welcher nur zufällig dazu kam, hier benutzt werden zu können, weil in seinen Schriften grosse Zahlen grade einigemal vorkamen. Dieser Unterschied muss auffallen, muss zugleich die Frage aufwerfen lassen, wesshalb ich bei der Darlegung der römischen Zahlzeichen keine andere Wahl in Bezug auf die Quellen getroffen habe. Es wäre nun vielleicht nicht schwer, eine Begründung dieser Wahl dahin zu liefern, dass grade solche Schriftsteller, welche in der Mathematik nicht Fachmänner sind, am geeignetsten seien in Betreff der Bezeichnungen zu Rathe gezogen zu werden, weil sie am deutlichsten nachweisen, wie tief etwa das Bewusstsein eines oder des anderen Principes, welches dabei zur Anwendung kommt, in das Volk eingedrungen ist. Offener und ehrlicher scheint mir aber das Bekenntniss, dass aus älteren Zeiten, ja bis in die ersten Jahrhunderte der modernen Zeitrechnung herab, keine anderweitigen Quellen existiren, als von der Art, wie sie hier benutzt wurden.

Mathematik so wenig wie Philosophie lag im Charakter römischer Schaffungskraft. Die ausgezeichneten Geister wandten ihre Begabung den Künsten des Krieges, oder einer theils politischen,

theils juridischen Beredtsamkeit zu. Philosophie wurde nur auf eklektische Weise getrieben, ohne dass von wesentlichen Fortschritten, oder gar von der Gründung neuer Schulen die Rede sein kann. Und die Mathematik war ebenso von den meisten Römern vernachlässigt, so weit es sich um wissenschaftliche Spekulation handelte. Nur die Theile der Mathematik in ihrem weitesten Umfange waren der Pflege unterworfen, welche bei einem wesentlich erobernden Volke in immerwährender praktischer Uebung waren. Das waren aber einmal diejenigen Kapitel der Astronomie, welche wir würden heute sagen in physikalischer Weise die Phänomene des Himmels behandelten. Das waren zweitens an die Astronomie sich anlehnende Sterndeuteleien, welche so sehr in Gebrauch und Verruf kamen, dass unter dem Namen eines Mathematikers nur ein Sterndeuter gemeint wurde, mit dessen Geschäft sich das befreundete der Zauberei, auch wohl der Giftmischerei, so eng verband, dass besondere Gesetze gegen die Mathematiker in diesem Sinne des Wortes erlassen wurden.[341]) Das war endlich drittens die eigentliche Geometrie, wie die Römer die Feldmesskunst zu nennen pflegten, also die Lehre von der Abmessung, Begrenzung und Theilung von Ländereien, eine Lehre die täglich in Anwendung kam, bei welcher es daher fast mehr auf rasche, bequeme Ausführung, als auf wissenschaftliche Strenge ankam. Und so entstand grade in Rom eine Geometrie, welcher man vielleicht den Namen der Näherungsgeometrie beilegen könnte, weil die Regeln derselben zwar durchgehends leichter Anwendung fähig, aber ebenso durchgehends nur in geringem Maasse richtig sind. Die wissenschaftliche Geometrie existirt bei den Römern so viel wie gar nicht, und der theoretische Theil der Arithmetik, die heute sogenannte Zahlentheorie, von deren grosser Bedeutung in Griechenland wir uns überzeugt haben, findet erst seit dem zweiten Jahrhunderte aus griechischen Quellen Eingang.

Nur ganz vereinzelt werden Männer genannt, welche der Mathematik ihre Kräfte theilweise widmeten, und von deren anderweitiger Thätigkeit wir grade genug wissen, um zu bedauern, dass ihre Schriften nicht bis auf uns gekommen sind. Der älteste derartige Schriftsteller ist wohl Marcus Terentius Varro, der Freund des Cicero, des Pompejus und in späterer Zeit des Cäsar, der nach der wahrscheinlichsten Annahme von 116 — 27 v. Ch. Geb. lebte. In politischen Kreisen spielte er trotz seiner Beziehungen

eine nur selten und wenig hervorragende Rolle. Desto bedeutender war die literarische Thätigkeit, der er sich hingab. Das ihm zu Gebote stehende Material war fast unerschöpflich, da er nicht nur Besitzer der grossartigsten Privatbibliothek war, sondern auch von Cäsar einer öffentlichen Büchersammlung vorgesetzt wurde. Wie er aber dieses Material zu benutzen verstand, beweist sein eigener Ausspruch, nach welchem er im Anfange seiner achtziger Lebensjahre 490 Bücher geschrieben hatte,[342]) und so kann man wohl dem Urtheile des Terentianus Maurus, eines Grammatikers aus den Zeiten der Kaiser Nerva und Trajan, beistimmen, der ihn den Gelehrtesten aller Gegenden nannte. Die erhaltenen Schriften des Varro beziehen sich auf Landwirthschaft und auf Grammatik, und nehmen unter den Arbeiten aus diesen beiden Gebieten einen ehrenvollen Rang ein. In einer seiner verloren gegangenen Abhandlungen stellte er Gründe zusammen, nach welchen die Erbauung Roms in das Jahr fiel, welches wir jetzt das Jahr 753 v. Ch. Geb. nennen, ein Resultat welches auch die neuere historische Kritik bestätigt hat. Gleichfalls verloren ging eine Schrift über Geometrie[343]) und Astronomie. In dieser gab er die Gestalt der Erde als eirund an,[344]) was der Wahrheit in so fern nahe kommt, als damit die reine Kugelgestalt der Erde geleugnet ist, aber allerdings die Abweichung von der Kugelgestalt im entgegengesetzten Sinne angenommen ist, als sie in Wirklichkeit besteht. Ob ein arithmetisches Werk[345]) des Varro vollständig verloren gegangen, oder ob noch Spuren davon irgendwo sich auffinden liessen, ist nicht ganz sicher, doch scheint mir Ersteres wahrscheinlicher.

Der nächste römische Schriftsteller, welchem tiefer gehende mathematische Kenntnisse wohl zuzutrauen sind, war der bekannte Architect Marcus Vitruvius Pollio, welcher für Kaiser Augustus Kriegsmaschinen verfertigte und etwa in den Jahren 15—12 v. Ch. Geb. seine 10 Bücher über die Baukunst schrieb. Ich habe eine Stelle dieser Schrift schon früher angeführt, welche ein Zeugniss abgab, woher die Kenntnisse des Vitruvius wohl stammten. Sie müssen nothwendig als pythagorisch angesehen werden. Dieselbe Quelle wird auch für sonstige römische Mathematiker nachgewiesen werden.

Wir kommen nun an das Ende des ersten Jahrhunderts n. Ch. Geb., in die Regierungszeit der Kaiser von Vespasian bis Trajan, unter welchen Sextus Julius Frontinus blühte. Von

Kaiser Nerva wurde er zum Oberaufseher der römischen Wasserleitungen bestellt,[346]) und schrieb in dieser Eigenschaft ein auf uns gekommenes Werk über die Wasserleitungen der Stadt Rom, sowie vorher schon unter Domitian ein anderes geschätztes Werk über die Kriegskunst. Chasles hat die Vermuthung ausgesprochen,[347]) dass Frontinus auch über die Geometrie geschrieben habe, und dass ein Werk von ihm über die Ausmessung der Oberflächen bis auf den heutigen Tag als Manuscript vorhanden sei. Ich will seine Gründe hier angeben, wenngleich ich genöthigt bin, dabei etwas vorzugreifen und vorläufig anzugeben, dass unter dem Namen des Boethius, eines Schriftstellers aus dem Ende des 5. und Anfang des 6. Jahrhunderts eine vielbesprochene und bestrittene Geometrie in zwei Büchern existirt, deren zweites Buch sich hauptsächlich auf Ausmessung von Flächen bezieht. Am Anfange dieses zweiten Buches, dessen Verfasser ich als für jetzt gleichgültig dahingestellt sein lasse, heisst es: „Schon am Anfange des vorigen Buches haben wir die Bedeutung des Wortes Messen auseinandergesetzt. Gleichwohl ist es wünschenswerth für solche, die sich speciell mit dieser Kunst beschäftigen, das Messen noch nach Julius Frontinus, jenem überaus einsichtigen Oberfeldmesser zu erklären.“[348]) Daraus geht nun Zweierlei hervor. Einmal dass Julius Frontinus in der That über praktische Geometrie geschrieben hat, und zweitens dass seine Schrift über diesen Gegenstand von dem gleichviel welchen Verfasser der Geometrie des Boethius benutzt worden ist. Chasles hat nun in einem Pergamentcodex der Bibliothek der Stadt Chartres, welchem noch anderweitige Wichtigkeit zukommt, ein Fragment gefunden, welches erstens an vielen Stellen so sehr mit dem zweiten Buche der genannten Geometrie übereinstimme, dass man daraus mit Bestimmtheit schliessen könne, das eine dieser Werke sei grossentheils eine Kopie des andern. Zweitens deute der reine und leichtere Stil dieses Fragmentes auf eine Zeit, die früher fällt als das Leben des Boethius, also um so mehr früher als die anderer Autoren, denen man die sogenannte Geometrie des Boethius wohl zuzuschreiben pflegt. Drittens sei das Fragment das vollendetste Werk, welches aus der Feder eines lateinischen Geometers hervorgegangen sei, und stimme daher weit eher zu der Berühmtheit des Frontinus, als die geometrische Schrift über die verschiedenartigen Felder, welche man ihm zugeschrieben hat.[349]) In diesen Erwägungen findet Chasles hinreichende Ver-

anlassung, jenes Fragment dem Julius Frontinus zuzuschreiben, und ferner noch in ihm die Quelle zu erkennen, welche bei dem Wiederaufleben der Wissenschaften dazu gedient habe, den geometrischen Theil der Margaritha philosophica zusammenzusetzen, welcher vielfältige Uebereinstimmung damit zeige. Ich kann natürlich, ohne das Manuscript eingesehen zu haben, mich weder für noch gegen die Hypothese von Chasles mit irgend welcher Bestimmtheit aussprechen. Nur als Frage, die später noch etwas begründet werden soll, möchte ich hinzufügen, ob nicht vielleicht jenes Fragment statt dem Frontinus einem anderen römischen Feldmesser, dem Archytas, zugeschrieben werden könnte?

Etwa 50 Jahre nach Frontinus, unter den Antoninen, war die Blüthezeit des an Geist und Kenntnissen aller Art reichen Appulejus, der, zu Madaura, einer blühenden Kolonie an der Grenze Numidiens gegen Gätulien hin geboren, seine Studien vornehmlich in Athen machte, dann aber nach dem Vorgange altgriechischer Weisen auf weiteren Reisen sie fortsetzte. Wir kennen ihn heute direct als witzigen Romanschriftsteller. Seine mathematische Thätigkeit ist nur noch aus Citaten bekannt. Durch die Ueberlieferung des Cassiodorus [350]) indessen, sowie des Isidor von Sevilla [58]) ist hinreichend dargethan, dass Appulejus, als jüngerer Zeitgenosse des Nicomachus, die durch diesen im Zusammenhange herausgegebenen arithmetischen Lehren des Pythagoras in sich aufnahm und in die lateinische Sprache übertrug. Leider ist, wie gesagt, diese Schrift verloren gegangen, was um so mehr zu bedauern ist, als in ihr wenn man einer kurzen Notiz von anonymer Herkunft [351]) trauen darf, eine grössere Anzahl ausgeführter Rechenbeispiele enthalten war. Schon daraus ist nämlich ersichtlich, dass die Uebertragung des Nicomachus durch Appulejus Nichts weniger als eine blosse wortgetreue Uebersetzung war, sondern dass der römische Bearbeiter höchst wahrscheinlich von dem Seinigen hinzuthat, oder doch noch anderweitige Schriften bei seiner Redaction mitbenutzte. Ob die Rechenbeispiele alsdann in der Weise behandelt waren, dass man daraus das ganze damalige Verfahren kennen lernen konnte, also namentlich das Rechnen auf dem Abacus, darüber finde ich allerdings keine Angabe, möglich ist es immerhin.

Ein Mathematiker, der etwa zur selben Zeit wie Appulejus lebte, von dem aber nicht einmal anderweitige Producte erhalten sind, oder auch nur genannt werden, war Andron von Catanea in

Sicilien, der Lehrer des Kaisers Marcus Aurelius. Als solcher wird er wenigstens von Julius Capitolinus erwähnt, und er muss sicherlich zu den bedeutenden Männern seiner Zeit gezählt werden, wenn die Hypothese richtig ist, die ich anderwärts aussprach,[352]) dass dieser Andron der Lehrer des Zenodorus war, des Ersten, der über isoperimetrische Figuren schrieb.

Nun vergehen reichlich drei Jahrhunderte, bis wieder einige Männer auftreten, die Nennenswerthes in der Mathematik leisteten. Ihre Arbeiten sind uns denn auch erhalten und dienen hauptsächlich als Quellen. Es sind namentlich drei Schriftsteller: Martianus Capella, Boethius und Cassiodorus. Nicht als ob nicht manche Ueberreste noch bekannt wären, welche theils in jene Zwischenzeit, theils wohl schon vorher, etwa in das erste Jahrhundert n. Ch. Geb., fallen mögen, aber es sind das lauter Schriften, welche für mathematische Zwecke ebensogut ungeschrieben geblieben wären. Ich meine nämlich die schon oben kurz erwähnten Abhandlungen römischer Feldmesser. Die A g r i m e n s o r e n oder G r o m a t i k e r, wie jene Feldmesser betitelt wurden, standen sicherlich ihrer praktischen Wirksamkeit nach in ziemlich hohem Ansehen in Rom. Aber grade ihre durch Nichts weniger als geistig anregende Berufsarbeiten in Anspruch genommene Zeit liess es nicht zu, dass sie, mit Ausnahme des Frontinus und vielleicht eines gewissen Archytas, der unsere Aufmerksamkeit noch später in Anspruch nehmen wird, auch noch Leistungen von mathematischem Werthe geliefert hätten. Wenn ich also hier die Männer nenne, deren Schriften wir noch besitzen, einen Balbus, einen oder wahrscheinlicher zwei Hyginus, einen Siculus Flaccus, einen Aggenus und einen Agenius oder wie diese beiden nun zu unterscheiden sein mögen, einen Nipsus, vielleicht noch einen Simplicius, so geschieht dieses mehr um nicht dem Vorwurfe zu verfallen, dieselben unberücksichtigt gelassen zu haben, als weil es für den Leser dieses Buches nothwendig wäre, sich diese Namen zu merken. Ich verwahre mich indessen dagegen, als ob ich überhaupt die Schriften dieser Männer als durchaus werthlos hinstellen wollte. Für den Juristen, den Topographen, auch für den Sprachforscher mögen sie ihre Bedeutung haben. Darüber zu urtheilen, waren gewiss die Männer am competentesten, welche die neuesten Ausgaben der Agrimensoren besorgt haben.[353]) Aber Mathematiker, das wiederhole ich, waren weder die Schriftsteller noch ihre Herausgeber.

Ich sehe mich gleichwohl veranlasst aus Gründen, die erst später dargelegt werden können, noch etwas bei einem Manuscripte zu verweilen, welches die Hauptquelle für die Ausgabe der Agrimensoren geworden ist, und welches selbst eine gut beglaubigte Geschichte besitzt. Ich meine die sogenannte arcerianische Handschrift in Wolfenbüttel. Nach den gelehrten Untersuchungen von Blume und Lange[354]) ist dieses jetzt aus 157 Pergamentblättern im Grossquartformate bestehende Manuscript wesentlich aus zwei Theilen zusammengesetzt, deren Inhalt im Einzelnen sogar oft identisch durch die Schriften der sogenannten Agrimensoren gebildet wird. Der Ursprung der Handschrift fällt in das 7., vielleicht schon in das 6. Jahrhundert, und ist sicherlich in Italien zu suchen. Die ersten bestimmten Nachrichten weisen jedoch erst nach, dass sie um das Jahr 1000 dem Kloster zu Bobbio angehörte, einem jetzt etwa 4000 Einwohner zählenden Städtchen an der Trebbia gelegen, welche unweit Piacenza in den Po mündet. Dort wurde das Manuscript 1494 von Thomas Inghiramius mit dem Beinamen Phädrus aufgefunden und nach Rom gebracht. Es ist für unsere Zwecke gleichgültig zu wissen, wann und in wessen Besitz die Handschrift die Alpen überschritt. Genug in der Mitte des 16. Jahrhunderts gehörte sie dem polnischen Reformator Lasky, der 1555 durch einen unredlichen Verwandten sein Vermögen verlor und sich dadurch genöthigt sah, seine literarischen Schätze zu veräussern, bevor er 1557 nach Polen zurückkehrte. Durch verschiedene Hände gelangte die Handschrift nun nach Gröningen, wo sie durch Johannes Arcerius wahrscheinlich 1566 erstanden wurde, der sie zu einer Ausgabe der betreffenden Schriftsteller benutzen wollte. Er kam indessen nicht über die Vorarbeiten hinaus, obwohl er 38 Jahre hindurch bis zu seinem 1604 in Utrecht erfolgten Tode sein Vorhaben beständig im Auge behielt. Noch mehrere Jahre nach dem Tode des Johannes Arcerius blieb der Codex im Besitze des Sohnes, aus welchem er in die Hände des Petrus Scriverius überging, welcher in einer Beschreibung aus dem Jahre 1607 zuerst den Namen des arcerianischen Codex gebrauchte, der denn auch bis auf den heutigen Tag in der wissenschaftlichen Welt beibehalten worden ist. Aus dem Nachlasse des Scriverius kam endlich 1663 der Codex durch Kauf in die Bibliothek zu Wolfenbüttel, von wo er nur eine siebenjährige unfreiwillige Reise nach Paris 1807 antrat, aber 1814 dem rechtmässigen Besitzer zurückerstattet wieder

in Wolfenbüttel sich befindet, und einen der grössten Schätze der dortigen Manuscriptensammlung bildet.

Ich kehre indessen von der arcerianischen Handschrift und deren Inhalte zu jenen drei Schriftstellern aus dem Ende des fünften Jahrhunderts zurück, welche ich schon als für die Geschichte der Mathematik bedeutsamer bezeichnete. Der Erste derselben Martianus Mineus Felix Capella[355]) war in der ersten Hälfte des 5. Jahrhunderts in Karthago geboren und stieg bis zur Würde eines römischen Proconsuls empor. Sein grosses aus 9 Büchern bestehendes encyclopädisches Werk, Satira betitelt, verfasste er um 470. Die beiden ersten Bücher desselben bilden unter dem Namen der Vermählungsfeier der Philologie mit Merkur auch wohl für sich ein Ganzes, und stellen einen kleinen philosophischen und allegorischen Roman dar, welcher nur zur Einleitung dient. Die späteren 7 Bücher beschäftigen sich mit den sieben freien Künsten, der Grammatik, Dialektik, Rhetorik einerseits, der Geometrie, Arithmetik, Astronomie, Musik andrerseits. Die Geometrie ist eine eigenthümliche Verbindung von einer blossen Aufzählung geographischer Namen und kurzen Beschreibungen historisch interessanter Orte mit einzelnen Definitionen von Linien, Figuren und Körpern meistens nach Euclid. Chasles hat schon auf den eigenthümlichen Umstand hingewiesen, dass bei Martianus Capella die geometrischen Namen in ihren griechischen Formen benutzt sind, während in den nahezu gleichzeitigen Geometrien anderer Schriftsteller dieselben durch lateinische Wörter ersetzt seien. Vollständig ist dieses freilich auch nicht der Fall, wie man nach Chasles apodiktischer Ausdrucksweise vermuthen sollte, sondern grade der von ihm als Beispiel citirte Boethius vermeidet die griechische Sprache nicht durchweg.[393]) Die Arithmetik des Martianus stammt aus derselben Quelle, welcher die des Appulejus berichtetermassen entsprang. Sie ist eine nicht sehr ausführliche Zusammenstellung der zahlentheoretischen Sätze, welche Nicomachus und die Platoniker aufstellten, also wesentlich pythagorisch gleich den Theilen der Geometrie, welche den Namen Geometrie wirklich verdienen. Wieder auf einen ähnlichen Ursprung ist die Astronomie zurückzuführen, da in einem Kapitel, welches ausdrücklich überschrieben ist „die Erde nicht Mittelpunkt für alle Planeten“[356]) die Hypothese ausgesprochen ist, dass Merkur und Venus um die Sonne sich drehen. Diese Behauptung ist aber ihrem negativen Theile nach vollständig pythagorisch, da so-

wohl Philolaos, als Heraclit und der Pythagoräer Ekphantus, endlich Hiketas von Syrakus es aussprachen, dass die Erde nicht Mittelpunkt des Weltsystems sei.[357]) Die Stelle des Martianus Capella übte einen in des Wortes verwegenster Bedeutung erdbewegenden Einfluss aus. Denn sie war es, die Kopernikus auf sein Weltsystem führte,[358]) das heute noch allen astronomischen Rechnungen zu Grunde gelegt wird, und auch wohl nicht wieder verlassen werden wird.

Der dritte der genannten Schriftsteller war Magnus Aurelius Cassiodorus,[359]) der Geheimschreiber des ostgothischen Königs Theodorich. Seine Geburt fällt ungefähr mit der Blüthezeit des Martianus Capella zusammen. Seine wissenschaftliche Thätigkeit bestand theils in der liebevollen Erhaltung und Verbreitung von Werken des classischen Alterthums, theils in eigenen Schriften, deren Abfassung ihn namentlich beschäftigte, seit er 538 ein beinahe 70jähriger Greis sich in ein Kloster des südlichen Calabriens zurückzog. Ausser den Briefen, die er theils im Namen seines Königs wirklich verfasst hatte, theils nachträglich erfand und welche in 12 Büchern als Briefe verschiedenen Inhaltes[360]) mehrfach herausgegeben sind, existirt auch von ihm ein kurzgefasstes encyclopädisches Werk,[361]) welches in derselben Art wie die Sammelschrift des Martianus Capella die 7 freien Künste behandelt. Die von Cassiodor eingehaltene Reihenfolge ist Grammatik, Rhetorik, Dialektik, Arithmetik, Musik, Geometrie, Astronomie. Der sachliche Werth dieses Werkes ist nur sehr gering, die Geometrie z. B. besteht nur aus ganz kurzen Wort- und Sacherklärungen. In historischer Beziehung ist jedoch Cassiodorus von Wichtigkeit, da wir ihm manche Nachricht schon verdanken, und andere noch verdanken werden über Dinge, welche ohne seine Hülfe in vollständiger Dunkelheit begraben lägen.

Weitaus der bedeutendste Schriftsteller dieser Periode ist der der Zeit nach zwischen die so eben Besprochenen fallende Dritte von den früher Genannten, mit dem ich mich etwas genauer beschäftigen muss. Anicius Manlius Torquatus Severinus Boethius[362]) (dessen Name jedoch auch als Boetius ohne h sich findet) stammte aus einer der reichsten und berühmtesten Patricierfamilien Roms, deren Mitglieder längst gewohnt waren, hohe Staatsstellen zu bekleiden, aber auch den Wechsel der Schicksale durch fürstliche Ungnade zu empfinden. Das Geburtsjahr des Boethius

fällt wohl zwischen die Jahre 470 und 475, und kurz darauf verlor er seinen Vater, so dass seine Erziehung von Fremden geleitet werden musste. Wahrscheinlich, und zum Glücke für die geistige Ausbildung des begabten Jünglings, wurde er der Sorge des Patriciers Symmachus anvertraut, der vollständig geeignet war, Vaterstelle an ihm zu vertreten. Man muss sich zwar wohl hüten diesen Symmachus mit seinem um mehr als ein Jahrhundert älteren gleichnamigen Vorfahren zu verwechseln, welcher ungefähr von 340—400 lebte, und durch eine wahrhaft ciceronianische Beredtsamkeit, wie sachverständige und unpartheiische Quellen angeben, sich besonders berühmt machte. Indessen ist auch der hier gemeinte Symmachus mit Recht als ein in jeder Beziehung bedeutender Mann zu betrachten.[363]) Dafür spricht schon die Thatsache, dass als er 485 unter Odoakers Regierung zum Consul ernannt wurde, ihm kein zweiter beigesellt wurde, ein Ausnahmefall, der selbst in damaligen Zeiten wohl nur bei hervorragenden Persönlichkeiten stattfinden konnte. Sein Einfluss auf den jungen Boethius war so günstiger Art und erwarb demselben so frühes Bekanntwerden, dass er schon vor seinem 25. Jahre das Patriciat erhielt und 508 oder 510 zum Consul ernannt wurde. Auch durch enge Familienbande verknüpften sich die Schicksale der beiden von nun an stets zusammen zu nennenden Männer, seit Boethius sich mit der Tochter seines Pflegevaters Rusticiana vermählte, die ihm zwei Söhne gebar, welche nach den beiderseitigen Grossvätern, der Eine den Namen Aur. Anicius Symmachus, der Andere den Namen Anicius Manlius Severinus Boethius erhielt. Theodorich, König der Ostgothen, hatte bekanntlich 493 durch die Ermordung Odoakers und seiner treusten Anhänger die Regierung des damaligen Italiens an sich gerissen. Unter seine Oberherrschaft fallen also die politischen Erfolge des Boethius, und in der That standen beide, Boethius wie Symmachus, in dem grössten Ansehen bei dem Könige, wie aus mehreren Briefen aus des Cassiodor Sammlung zur Genüge hervorgeht. Allein mit der steigenden Bedeutung des Boethius stieg auch sein eifriges Bemühen, die Freiheit und das Ansehen des römischen Senates wieder herzustellen, wodurch er den Höflingen, die schon lange neidisch auf ihn waren, Gelegenheit gab, ihn beim Könige zu verdächtigen. Untergeschobene Briefe mussten die Ansicht begründen helfen, als habe Boethius aus Ehrgeiz sich zum Verrathe an seinem Fürsten verleiten lassen. Schuldig befunden, weil man ihn schuldig wollte, wurde er

seines Vermögens beraubt, seiner Würden entsetzt und wahrscheinlich nach Pavia, dem damaligen Ticinum, verwiesen. Dort wurde er wenigstens nach längerer Gefangenschaft enthauptet, dort soll er auch beerdigt sein. Die Sage giebt als Datum seiner Hinrichtung den 23. October 525 an. Symmachus konnte seinem Schmerze über den gewaltsamen Tod seines Schwiegersohnes nicht gebieten. Seine desshalbigen Aeusserungen, die scharf genug gewesen sein mögen, und mit Recht, wurden dem Könige hinterbracht, der sie ebenso ahndete wie das angenommene Verbrechen dessen, dem die Klagen des Symmachus galten. Symmachus wurde in Fesseln nach Ravenna gebracht und im Gefängnisse getödtet. Auch dafür giebt die Sage einen bestimmten Tag an, den 8. Mai 526. Theodorich, von Gewissensbissen gepeinigt, glaubte die Geister der Erschlagenen bei jeder Gelegenheit vor sich zu sehen. Sein zerrüttetes Nervensystem führte ihn seinen Opfern noch in demselben Jahre 526 nach. Spätere Schriftsteller haben versucht, der Hinrichtung des Boethius religiöse Motive unterzuschieben, indem sie ihn als strenggläubigen Katholiken schildern, der die Veranlassung gewesen sei, dass der oströmische Kaiser Justinus I. den Arianern 524 alle Kirchen entzog, worauf der dieser Sekte angehörige Theodorich Rache an ihm genommen habe. So wurde Boethius zum Märtyrer gestempelt, und vielleicht schon seit dem 8. Jahrhunderte zu Pavia, Brescia und anderen Orten am 23. October als Heiliger verehrt. Trotzdessen scheint nach den Untersuchungen von Hand, an die ich mich in meiner Darstellung durchaus anlehne, festzustehn, dass Boethius sein ganzes Leben durch Heide blieb, und dass also mit seinem Katholicismus auch alle die übrigen an seinen Tod sich knüpfenden Sagen wegfallen müssen.

Was den Bildungsgang des Boethius anbetrifft, so wird vielfach angegeben, er habe lange Zeit hindurch die Schulen in Athen besucht und den Photius als Lehrer gehabt. Man beruft sich zu diesem Zwecke auch wohl auf eine Stelle in der Briefsammlung des Cassiodorus.[364]) Hand dagegen behauptet, Boethius gelangte nie nach Athen, und stützt sich dabei auf denselben Brief Theodorichs. Aus diesen so widersprechenden Angaben folgert man wohl am Sichersten, was die wirkliche Vergleichung der streitigen Stelle noch um so näher legt, dass man es hier mit einer augenscheinlich verderbten Lesart zu thun hat, die einer Correctur gar sehr bedarf und in der Fassung, in welcher sie jetzt in allen Ausgaben gedruckt ist, weder

den einen, noch den andern, sondern gar keinen Sinn giebt. Zum Glück haben wir auch gar nicht nöthig, uns für die eine oder für die andere Alternative zu entscheiden. Wir können den Aufenthalt oder Nichtaufenthalt des Boethius in Athen ruhig dahingestellt sein lassen, das Eine geht aus Allem, was die schriftstellerische Thätigkeit des Boethius hinterlassen hat, mit Bestimmtheit hervor, dass er zwar natürlicher Weise kannte, was von römischen Autoren Bedeutendes geleistet war, dass er aber seine hauptsächliche geistige Nahrung aus griechischen Werken zog, und zwar vielfach aus solchen, aus welchen er pythagorische Mathematik erlernen konnte. Er studirte die Griechen von Nicomachus aufwärts bis zu Euclid, Plato, bis zu Archytas von Tarent.

Es sei mir erlaubt, über diesen letzten Philosophen hier einige Notizen einzuschalten.[365]) Archytas von Tarent war ein eifriger Anhänger der Schule des Pythagoras, in deren Lehren er Plato unterrichtete. Und wenn aus den Kenntnissen des Schülers schon einigermaassen auf die Tüchtigkeit des Lehrers geschlossen werden kann, so stimmen die Nachrichten, welche über Archytas selbst vorhanden sind, darin überein, dass er einer der bedeutendsten Männer der Wissenschaft gewesen sein muss. Nicht bloss dass Horaz ihn in einer berühmten Ode besungen hat, auch bestimmte Einzelheiten werden gemeldet. Archytas von Tarent soll sich mit der Verdoppelung des Würfels beschäftigt haben, jener berühmten Aufgabe, welche im Alterthume vielleicht am Meisten zur Erweiterung der Geometrie beitrug, ähnlich etwa wie im Laufe des 17. Jahrhunderts das Tangentenproblem die Kräfte aller Mathematiker auf's Aeusserste spannte und dadurch die merkwürdigsten Entdeckungen hervorbringen liess. Er soll zuerst die Mechanik auf geometrische Lehren fussend begründet haben, und umgekehrt Anwendung der Mechanik als geometrisches Beweismittel gemacht haben. Er soll eine hölzerne Taube verfertigt haben, welche zu fliegen verstand.[366]) Aber ebenso tüchtig als Feldherr soll er siebenmal seine Mitbürger zum Siege geführt haben. Bruchstücke mancher Art waren unter seinem Namen mit aller Bestimmtheit im ersten Jahrhundert n. Ch. Geb. vorhanden, und wurden damals wie in den nächsten Jahrhunderten niemals angezweifelt. Darin liegt aber für meine Zwecke vollständig genug, und ich bin dadurch der Schwierigkeit überhoben, welcher ich doch nicht gewachsen wäre, mich über die Frage auszusprechen, ob diese Schriften des Archytas ächt sind, ob nicht.

Gruppe, der sich am Eingehendsten mit dieser Frage beschäftigt hat, kommt zu dem Resultate, dass die meisten der sogenannten pythagorischen Fragmente, und unter diesen die dem Archytas zugeschriebenen Stücke, von einem mit griechischer Bildung vertrauten Juden im ersten Jahrhundert n. Ch. Geb. zu Alexandrien gefälscht worden seien. Aehnliche Ansichten, wenn auch nicht in so bestimmter Weise ausgesprochen, finde ich in dem schon früher benutzten Vorlesungskatalog der berliner Universität für den Sommer 1841 von Böckh,[367]) und auch der Neffe dieses Letztgenannten, Herr L. Böckh hat in einer höchst interessanten Beigabe zum Herbstprogramme 1841 des karlsruher Lyceums sich derselben Vermuthung angeschlossen. Der Hauptinhalt seines Programmes besteht aber darin, dass er die Zusammengehörigkeit der sogenannten Archytas-Fragmente nachweist und zu dem Resultate kommt, dass sämmtliche Bruchstücke einem Werke aus drei Büchern angehörten, dass das ganze Werk: Vorträge des Archytas hiess, dass die drei Bücher der Reihe nach kosmischen, mathematischen und ethischen Inhaltes waren. Es ist leicht darin den Parallelismus zu dem gleichfalls aus drei Büchern bestehenden Werke des Philolaos, zu den sogenannten Bakchen zu erkennen.[368]) Mögen nun diese Archytas-Fragmente unterschoben sein, so sehr mein persönliches historisches Gefühl sich gegen diese Annahme sträubt, so viel ist, wie gesagt, allgemein als richtig erkannt, dass um Christi Geburt Schriften existirten, die dem Archytas zugeschrieben wurden, die also jedenfalls solche Dinge enthielten, die nach dem Glauben der damaligen Zeit von einem alten Pythagoriker wie Archytas von Tarent herstammen konnten, und dass diese Schriften noch mehrere Jahrhunderte später als ächt verbreitet waren. Diese Schriften, wiederhole ich jetzt, hat auch Boethius studirt, und führt sie an den verschiedensten Stellen seiner Werke an.

Ich habe jetzt diese Werke selbst näher anzugeben.

XIII. Die Werke des Boethius.

Die Werke des Boethius sind vielfachem Abdrucke unterworfen worden. Man hat sowohl einzelne Schriften für sich herausgegeben als auch Gesammtausgaben veranstaltet, und so liegen meinen Untersuchungen zwei derartige Drucke der Gesammtwerke zu Grunde. Ich hatte die älteste Ausgabe vor Augen, welche 1491 in Venedig erschien, und ferner eine basler Ausgabe von 1570, welche in den mathematischen Theilen von Glareanus besorgt ist, und auch einen auf die Geometrie bezüglichen Brief des Venetianers Judecus enthält.[369]) An den meisten Stellen, auf die ich mich zu beziehen habe, ist vollständige Uebereinstimmung der beiden Drucke vorhanden. Ich werde daher, wenn nicht bestimmt das Gegentheil angegeben ist, immer nur auf den einen mich berufen, und zwar auf den basler, weil er im Gegensatze zum venetianer Drucke mit fortlaufenden Seitenzahlen versehen ist, auch die Augen bei weitem nicht so sehr anstrengt wie die gothischen Lettern jener ersten Ausgabe.

Von den Schriften des Boethius ist dem grossen Publikum dasjenige Werk am bekanntesten, welches er im Gefängnisse zu seiner eigenen Geistesberuhigung verfasste, und welches den Titel führt: über die Tröstungen der Philosophie. Es ist in der That eine auch abgesehen von der directen Veranlassung ihrer Abfassung merkwürdige Schrift, in welcher nach dem Geschmacke der Zeit prosaische und poetische Stellen abwechseln, letztere besonders von einer Reinheit der Sprache, welche an die besten Zeiten der klassischen Literatur erinnert. Den Inhalt bildet ein Dialog zwischen Boethius und der personificirt auftretenden Philosophie, welche ihn im Kerker besucht und ihm Trost zuspricht, indem sie

den Unbestand äusserer Güter nachweist, und ihm das wahre Glück allein in der Tugend zeigt. Ausser diesem philosophischen Werke, welches Jahrhunderte hindurch von tiefeingreifender Wirkung war, finden sich unter den Gesammtwerken noch weitere Abhandlungen von christlich-theologischem Inhalte. Diese müssen nothwendig als untergeschoben betrachtet werden, wenn, wie oben angegeben wurde, Boethius niemals zum Christenthum übergegangen ist. Bei solchen Schriften wesentlich polemischer Natur ist aber auch in der That eine Fälschung erklärlich. Es ist denkbar, dass man eine These dadurch stützen wollte, dass man einen Mann von so allgemein anerkanntem Verdienste, wie Boethius war, zu deren Vertheidiger stempelte, dass man also unter seinem Namen eine Schrift veröffentlichte, welche viele Jahrhunderte später, nach Hand erst im 13. Jahrhunderte, geschrieben war. Aehnlich kann es sich mit solchen Schriften verhalten, welche dazu bestimmt sind, wesentlich Neues so zu verbreiten, dass es mit alter Autorität auftretend leichter und tiefer in die Allgemeinheit eindringe. Ich habe früher ein mögliches Beispiel in den Schriften des Zoroaster genannt. Dass man aber absichtlich fälsche, um Längstbekanntes zum wiederholten Male der Welt vorzuführen und nur einige Neuerungen mit einzuschmuggeln, die man selbst nur zur Hälfte verstand, das wird doch wohl nicht leicht Jemand als baare Münze annehmen, weder hier noch wo später auf diese Sätze zurückverwiesen werden soll.

Ferner sind dann in der Gesammtausgabe solche Schriften veröffentlicht, in denen Boethius nicht selbstständig auftritt, sondern theils als Uebersetzer und Bearbeiter, theils als Commentator erscheint. Ich meine damit die Bearbeitung von mehreren Schriften des Aristoteles und des Porphyr, den Commentar zu den sogenannten Topika des Cicero, d. h. zu jener selbst an aristotelische Vorarbeiten sich anschliessenden Abhandlung über den Beweis; ich meine ferner Schriften über einzelne Kapitel der Logik, welche an jene Bearbeitungen sich anlehnen; ich meine endlich 2 Bücher Arithmetik, 5 Bücher Musik und 2 Bücher Geometrie.

Durch diese für die damalige Zeit ziemlich neue und im höchsten Grade wichtige übersetzende und compilatorische Thätigkeit hatte aber Boethius grade unter seinen Zeitgenossen sich einen bedeutenden Namen erworben noch lange bevor er das Buch der Tröstungen zu verfassen Gelegenheit fand, und insbesondere auf sie bezieht sich der so oft citirte Brief des Theodorich an

Boethius,[364]) aus dem ich hier eine Stelle ausführlicher geben will, als man es gewöhnlich thut, da bisher immer nur einzelne Worte je nach dem Bedürfnisse dessen, der sie anführte, herausgerissen wurden. Gundibald, König der Burgunder, hatte den Theodorich um das Geschenk einer Wasser- und Sonnenuhr gebeten. Theodorich beauftragt nun in dem 45. Briefe des ersten Buches der von Cassiodor herausgegebenen Briefe den Boethius mit der Anfertigung einer solchen Uhr und zählt dabei in pomphafter Sprache die Verdienste auf, welche Boethius zu diesem Geschäfte allein tauglich erscheinen lassen. „In Deinen Uebertragungen, heisst es,[370]) wird die Musik des Pythagoras, die Astronomie des Ptolemäus lateinisch gelesen. Nicomachus der Arithmetiker, der Geometer Euclid werden von den Ausoniern gehört. Plato der Forscher göttlicher Dinge, Aristoteles der Logiker streiten in der Sprache des Quirinals. Auch Archimed den Mechaniker hast Du lateinisch den Sikulern zurückgegeben, und welche Wissenschaften und Künste auch das fruchtbare Griechenland durch irgend welche Männer erzeugte, Rom empfing sie in vaterländischer Sprache durch Deine einzige Vermittlung.“ Vergleicht man diese Zeilen mit den Schriften, welche als dem Boethius angehörend in den Gesammtausgaben vorkommen, so findet man alsbald, dass alle gedruckten Arbeiten unter das Bereich der von Theodorich genannten fallen, dass aber umgekehrt einige Schriften verloren gegangen zu sein scheinen.

Ich brauche wohl kaum hinzuzusetzen, welche ich meine, nämlich die theologischen Schriften nach Plato, die mechanischen nach Archimed, die astronomischen nach Ptolemäus. Ob in Bezug auf die beiden Ersteren sich irgend welche Aufklärung finden lässt, weiss ich nicht. Eine Erwähnung der letzteren Schrift habe ich hingegen gefunden, der man bisher noch nicht die nöthige Aufmerksamkeit geschenkt hat. Gerbert schreibt nämlich in einem wahrscheinlich im Jahre 982 abgeschickten Briefe[371]) an Adalbero Erzbischof von Rheims, er habe in Mantua acht Bände von Boethius aufgefunden über Sternkunst, auch Merkwürdiges über Figuren der Geometrie und anderes nicht minder Bewundernswürdiges. Dieser Fund stimmt jedenfalls mit jener nach Ptolemäus bearbeiteten Astronomie überein.

Auch bei Boethius selbst finden sich Andeutungen darüber, dass er mathematische Schriften in der damals normalen Anzahl

wenigstens zu verfassen gedachte. Am Anfang der Arithmetik bemerkt er,[372]) unter den alten Pythagorikern sei es ausgemacht gewesen, dass das Quadrivium allein zum Gipfel der Philosophie führe; eine Stelle, die beiläufig bemerkt auch desshalb interessant ist, weil in ihr zum ersten Male das Wort Quadrivium, Kreuzweg, gebraucht ist, um die Viertheilung der mathematischen Wissenschaften zu bezeichnen, welche in dem mehrgenannten Briefe des Theodorich noch bildlich die vier Pforten der Wissenschaft genannt werden,[373]) aber das ganze Mittelalter hindurch nur als Quadrivium bekannt sind, denen alsdann als Trivium die drei Wissenschaften Grammatik, Dialektik und Rhetorik gegenüberstehen. In demselben Kapitel fährt Boethius fort die Eintheilung selbst anzugeben: „Die Menge an und für sich betrachtet die Arithmetik in ihrem Ganzen, die auf Etwas bezogene Menge erkennen hingegen die Maasse des musikalischen Wohlklangs. Die Geometrie verspricht die Kenntniss der unbeweglichen Grösse, die Wissenschaft des Beweglichen erklärt die Astronomie für ihr Eigenthum. Der Forscher, dem es an diesen vier Gebieten fehlt, kann das Wahre nicht finden, und ohne Erkenntniss der Wahrheit kann Niemand weise sein. Ist doch die Weisheit die Kenntniss und vollständige Erfassung dessen, was in Wahrheit ist. Wer also dieses verachtet, d. h. diese zur Weisheit führenden Pfade, dem sage ich an, dass er es nicht zu einer richtigen Philosophie bringen werde.“ Genau dieselbe Eintheilung der Mathematik tritt in der Musik wieder auf,[374]) und wurde also von Boethius festgehalten, ebenso wie von allen Vorgängern seit Theon von Smyrna. Wenn nun Boethius auserdem in dem ersten Kapitel der Arithmetik sich noch auf die Untersuchung einlässt, dass die Arithmetik den ersten Theil der Mathematik bilden müsse, wenn er das Kapitel mit den Worten beschliesst:[375]) „Weil, wie es darnach klar ist, der Arithmetik die erste Stelle gehört, so werden wir von ihr aus den Anfang unserer Untersuchung machen“ dann darf ich doch wohl zu den Folgerungen gelangen:

Boethius wollte eine Arithmetik, eine Musik, eine Geometrie und eine Astronomie schreiben. Er wollte die hier genannte Reihenfolge einhalten, weil er sonst in der Einleitung zum ganzen Werke einen logischen Fehler begangen hätte, wenn er eine Reihenfolge angab, die er nicht einzuhalten beabsichtigte. Die Nachrichten des Cassiodorus und des Gerbert endlich bezeugen, dass er sein Vorhaben auch ausführte.

Aus der Reihenfolge, in welcher Boethius die einzelnen Theile der Mathematik behandelte, ergiebt sich weiter, dass in der ersten Abtheilung, in der Arithmetik, keine der folgenden Abtheilungen citirt sein darf; dass die Musik sich nur auf die Arithmetik, nicht aber auf die späteren Theile beziehen darf; dass folglich ebensowenig eine Beziehung auf die Astronomie in dem geometrischen Theile vorkommen darf, wie eine Beziehung auf aus der Geometrie schon Bekanntem in dem arithmetischen und musikalischen Theile; dass hingegen die Geometrie Citate der Arithmetik und Musik enthalten durfte, die Astronomie Citate aus allen drei übrigen Theilen. Damit ist also ein Einwurf beseitigt, der zwar gegen die Existenz einer Geometrie und Astronomie des Boethius meines Wissens noch nicht gemacht worden ist, aber doch vielleicht noch gemacht werden könnte, dass nämlich in den allgemein als ächt angenommenen Büchern der Arithmetik und Musik keiner dieser folgenden Theile jemals citirt ist. Das kann eben logischer Weise nicht anders sein.

Waren die bisherigen Beweise dahin gerichtet, gleichzeitig die Existenz von Arbeiten des Boethius über das ganze Quadrivium festzustellen, so will ich noch etwas näher auf die Geometrie eingehen. Ich will hier noch nicht einmal mit aller Bestimmtheit behaupten, dass in dem angeführten Briefe des Gerbert von der Geometrie des Boethius die Rede sei, wiewohl die Wahrscheinlichkeit dafür schon gross ist. Denn würde die Geometrie, welche Gerbert auffand, einem andern Verfasser zukommen, dem Boethius also nur die Astronomie angehören, so hätte diese ganz allein acht Bände eingenommen, was weniger zu vermuthen ist, als wenn man annimmt, die acht Bände, welche Schriften des Boethius enthielten, hätten aus Astronomie, Geometrie und Anderem eben so Wunderbarem bestanden.

Dagegen erlangen wir volle Sicherheit über die Geometrie des Boethius dadurch, dass Cassiodorus noch ganz besonders bezeugt,[376]) Boethius habe eine solche nach Euclid bearbeitet. Ich sage, Boethius hat den Euclid bearbeitet, nicht bloss übersetzt. An und für sich kann das hier vorkommende Wort „übertragen" beides bedeuten. Für die Richtigkeit meiner Auffassung spricht aber, dass genau dasselbe Wort von Cassiodorus in Bezug auf die Arithmetik des Boethius benutzt wird, welche er eine Uebertragung des Nicomachus[350]) nennt, wie die Geometrie eine

Uebertragung des Euclid. Beides waren also doch wohl Uebertragungen in demselben Sinne des Wortes, und so können wir in der Arithmetik nachsehen, welcher Sinn gemeint ist. Dort heisst es aber in der Vorrede: [377]) „Was Nicomachus weitläufiger über Zahlen angiebt, habe ich mässig kurz zusammengefasst. Was hingegen flüchtig durchlaufen dem Verständnisse weniger Zugang gewährte, das habe ich durch einige Zuthat aufgeschlossen, indem ich zur Deutlichmachung der Dinge auch meine eigenen Darstellungen und Erläuterungen benutzte. Der verständige Leser wird einsehen, wie viele Mühe und Arbeit dieses gekostet hat.“ Mit andern Worten also sagt Boethius selbst, dass er in der Arithmetik zwar vollständig an den Nicomachus sich anlehne, aber doch ihn nicht geradezu übersetze. An manchen Stellen war es eine wörtliche Uebersetzung, das lässt sich durch Vergleichung nachweisen, und solche Stellen wurden sogar von Ast, dem Herausgeber des Nicomachus, als kritische Quelle zur Correctur des Griechischen Textes benutzt. [378]) An anderen Stellen aber war es ein blosser Auszug und wieder an anderen eine ausführlichere Umschreibung mit eigenen Zuthaten. Im Ganzen also müssen wir bei der Geometrie des Boethius gleichfalls an eine derartige Bearbeitung des Euclid denken, und setze ich wieder hinzu, ganz ähnlich wird sich auch seine Astronomie zu den Schriften des Ptolemäus verhalten haben. Ich glaube damit auch die letzten Zweifel darüber zerstört zu haben, dass Boethius eine Geometrie sowie eine Astronomie hinterlassen haben muss, und bemerke nur, dass ein Theil der hier gezogenen Schlüsse auch schon bei Martin sich vorfindet. [379])

Ich gehe nun zu einer weiteren Frage über, deren Beantwortung gleichfalls schon von Martin zum grossen Theile in genügendster Weise vorliegt, ob nämlich diese nothwendig vorhandene Geometrie des Boethius identisch ist mit dem Texte, welcher unter diesem Titel in den Gesammtausgaben abgedruckt ist. Der erste Grund, den ich zur Bejahung dieser Frage anführen kann, ist ein äusserlicher. Es giebt nämlich nicht etwa bloss ein Manuscript, welches als Geometrie des Boethius bekannt ist, sondern eine ziemlich beträchtliche Menge derselben, die bis auf einige noch anzugebende Unterschiede sämmtlich unter sich und mit dem Drucke übereinstimmen. Einige von diesen Manuscripten enthalten überdies nicht nur die Geometrie, sondern auch andere Schriften des Boethius, nämlich die Arithmetik und Musik. Eine Anzahl solcher

Manuscripte hat Bernhard von Montfaucon in seinem 1739 herausgegebenen Handschriftenkatalog genannt, und Heilbronner hat für die Bequemlichkeit der Mathematiker gesorgt, dadurch dass er die bei Montfaucon vorkommenden mathematischen Manuscripte, also auch die von denen ich hier rede, in seinem mehrgenannten historischen Werke anführt. Bei ihm fand ich 8 Codices der Geometrie des Boethius erwähnt.[380]) Zwei derselben führen ausdrücklich den euclidischen Ursprung im Titel, und vier andere enthalten ausser der Geometrie auch noch die Arithmetik und Anderes. Dabei sind aber noch nicht einmal mehrere der ältesten und wichtigsten Codices inbegriffen, welche uns noch ferner bekannt werden sollen, und von denen ich vorläufig nur folgende nenne: die Handschrift von Chartres, welche künftighin kurzweg die Handschrift C heissen soll, die Handschrift von Erlangen, künftighin Handschrift E genannt, beide nicht unter das Jahr 1100 herabreichend, und das Manuscript 842 der Lansdowner Sammlung im britischen Museum, welches sämmtliche Werke des Boethius enthalten soll.[381]) Die Existenz so vieler Handschriften an so verschiedenen Orten beweist zum Mindesten, dass, als man sie schrieb, der Glaube sehr allgemein verbreitet war, es sei allerdings die Geometrie des Boethius, die man copire. Läge also ein gemeinsamer Irrthum in der Bezeichnung aller dieser Handschriften vor, so müsste er sehr früher Zeit angehören, spätestens dem 10. oder 11. Jahrhundert.

Da indessen vorläufig diese wenn auch schwache Möglichkeit noch immer vorhanden ist, so müssen innere Gründe der Aechtheit aufgesucht und Gegengründe, die man vorgebracht hat, oder vorbringen könnte, entkräftet werden. Zunächst frage ich allgemeiner, was war von einer Geometrie des Boethius zu erwarten? und nach dem was wir von lateinischer Mathematik kennen gelernt haben, nach dem was wir ferner speciell über die Quelle des Boethius wissen, darf ich wohl sicherlich die Antwort auf meine Frage gleich dahin formuliren, dass die Geometrie des Boethius erstlich an wissenschaftlichem Interesse der Arithmetik untergeordnet sein wird. Sie wird zweitens im Ganzen theils einen Auszug aus dem Euclid, theils eine Erweiterung desselben darstellen. Wo sie eine Erweiterung ist, wird sie drittens solche Zuthaten enthalten, welche dem Boethius anderweitig bekannt sein konnten, also wahrscheinlich Zuthaten specifisch lateinischer Geometrie, d. h. Sätze aus der Feldmesskunst. Diese drei Voraussagungen bestätigen sich durchaus

aus den Druckwerken. Nun will ich auch hierauf noch kein grosses Gewicht legen. Denn, kann man einwenden, Nichts ist leichter als nachträgliche Voraussagungen machen, welche eine gewisse Scheinbarkeit für sich haben. Ich gehe daher zu Einzelheiten über.

Ich komme dabei nochmals auf die Ueberschrift zurück, welche in den Druckausgaben so lautet: [382]) Der Geometrie des Euclides von Megara übertragen von Anitius Manlius Severinus Boethius erstes Buch; und gleich nach dieser Ueberschrift folgen die Worte: „Da ich, mein Patricius, auf Dein Ansuchen, der Du von den Geometern wohl die meiste Uebung besitzest, auf mich genommen habe, das, was von Euclid über die Figuren der geometrischen Kunst dunkel vorgetragen wurde, auseinander zu setzen und für einen leichtern Eingang zuzubereiten, so glaube ich zuerst den Begriff des Messens erläutern zu müssen.“

Schon diese wenigen Zeilen geben mir Stoff zu einigen Bemerkungen. Die Ueberschrift selbst kann, wenn sie wirklich zu dem Uebrigen gehört, keinen Zweifel obwalten lassen, dass hier entweder die Geometrie des Boethius oder eine absichtliche Fälschung vorliegt. Und lässt sich hier wohl irgend eine Veranlassung zu einem derartigen Betruge denken? hier, wo grade der Fall eintritt, den ich früher hervorhob, dass wesentlich Altes, keinerlei Polemik Unterworfenes mitgetheilt wird? Ich wenigstens kann mir den psychologischen Vorgang nicht erklären, der hier zu einer Fälschung geführt hätte. Also die zweite Alternative muss ins Auge gefasst werden, die ich soeben andeutete; die Ueberschrift ist eine spätere Zuthat zu einem dem Boethius nicht angehörigen Texte. Dergleichen Einschiebungen kommen vor, und wir werden selbst ein Beispiel davon kennen lernen. Ich habe indessen schon bemerkt, wie unwahrscheinlich eine solche Einschiebung in so sehr viele Handschriften ist, und wir kommen zum vollen Bewusstsein ihrer Unmöglichkeit, wenn wir den auf die Ueberschrift folgenden Text vergleichen, dessen erster Satz sowie auch spätere Stellen direct auf den Boethius als Verfasser hinweisen. Ich muss Bestimmtes hervorheben.

Zuerst dass das euclidische Werk als von den Figuren der geometrischen Kunst handelnd bezeichnet wird, während Gerbert in dem oben erwähnten Briefe sagt, [371]) dass er eine Schrift über Figuren der Geometrie aufgefunden habe. Diese beiden ziemlich ungewöhnlichen Ausdrücke decken sich fast vollständig,

so dass einestheils dadurch die früher ausgesprochene Vermuthung gesteigert wird, Gerbert habe den Autornamen Boethius auf die gefundene Geometrie mit bezogen, während anderntheils die Identität mit unserer Geometrie des Boethius wahrscheinlich wird. Martin [379]) hat schon, wenn auch nicht auf dieses übereinstimmende Vorkommen, doch auf die eigenthümliche Wortverbindung „Figuren der geometrischen Kunst“ in den Druckausgaben des Boethius aufmerksam gemacht. Er meint, die geometrische Kunst sei nichts Anderes als die Feldmesskunst. Die Einleitungsworte besagen also, der Verfasser wolle dasjenige aus Euclid hier behandeln, was zur eigentlichen Feldmesskunst unerlässlich sei, also vor Allem keinerlei stereometrische Betrachtungen; und in der That erfülle sich diese Zusage dadurch, dass an einen Auszug aus den vier ersten Büchern des Euclid sich reinweg zur Feldmessung Gehöriges anschliesse. Diese Bemerkung ist jedoch irrig, da am Eingang eben jenes zweiten Buches, welches vollständig auf Feldmessung sich bezieht, diese letztere als Kenntniss der Podismen der im ersten Buche enthaltenen geometrischen Kunst entgegengesetzt wird. [389]) Die geometrische Kunst ist also nichts Anderes als die wissenschaftliche, theoretische Geometrie.

Ferner ist es wohl der Untersuchung werth, wer der angeredete Patricius sein mag, und dabei tritt uns wieder eine Uebereinstimmung entgegen. Die Arithmetik des Boethius ist dem Patricius Symmachus gewidmet. Patricius ist nicht etwa ein Name, sondern der Titel Patricier, welchen jener Symmachus, welchen auch der in unseren Einleitungsworten Genannte besass, und so liegt die Vermuthung gewiss nahe, man müsse schon aus Vorhergehendem wissen, welcher Patricier eigentlich mit der Anrede gemeint sei, weil sonst die Widmung eine anonyme war. Gehört aber die Geometrie dem Boethius an, so folgte sie auf die Arithmetik, und man wusste, der Patricier Symmachus war es, dem der blosse Titel Patricier in der Geometrie galt. Die weitere Frage, wer dieser Patricier Symmachus selbst sei, wurde bisher immer dahin beantwortet, es sei der bekannte Schwiegervater des Boethius. Ich will das nicht grade in Abrede stellen, doch möchte ich darauf aufmerksam machen, dass auch noch eine andere Möglichkeit vorhanden ist. Es ist nämlich ebensogut denkbar, dass Boethius diese mathematischen Schriften für seinen Sohn Symmachus verfasste, welcher sehr frühe schon das Patriciat erlangte. [383]) Zu dieser Ver-

muthung könnte nämlich der Umstand Anlass geben, dass ein Manuscript der Geometrie des Boethius[380a]) ausdrücklich die Widmung an den Sohn enthält.

Ich gehe nun zu späteren Stellen der Geometrie über. Ich habe vorher schon angegeben, in welcher Reihenfolge allein Citate von anderen Schriften des Boethius vorkommen können. Diese Reihenfolge ist in den gedruckten Schriften durchweg eingehalten. Da die Musik nicht angezweifelt wird, oder, wenn es geschehen sollte, ihre Rechtfertigung meine Aufgabe nicht ist, so kommt es hier nicht darauf an, alle Stellen derselben beizubringen, die sich auf die Arithmetik berufen. In der Geometrie hingegen wird, so viel ich sehe, die Arithmetik dreimal, die Musik einmal citirt,[384]) und zwar bei der Arithmetik einmal ein ganz bestimmter Satz, welcher, wenn auch nicht mit den ganz identischen Worten, doch dem Sinne nach vollständig ebenso in der Arithmetik des Boethius vorkommt.[385]) Und so bestätigt auch dieser Umstand die Annahme, der Verfasser, welcher in der Geometrie von seiner Musik, von seiner Arithmetik spricht, welcher also nothwendig zwei solche Werke geschrieben haben muss, sei wirklich Boethius gewesen.

Manches für den Ursprung einer Schrift lässt sich auch häufig daraus erkennen, ob in ihr ein und derselbe fremde Autor citirt wird, von welchem andere Schriften gleichfalls abhängig sind. Dieses Hülfsmittel können wir indessen hier nur in geringem Maasse in Anwendung bringen, wenn auch der erste Anschein eine häufige Benutzung desselben verspricht. Ich habe nämlich schon früher gesagt, dass unter den von Boethius benutzten Autoren Archytas von Tarent eine hervorragende Stellung einnimmt. Ich muss daher einige der Ausdrücke anführen, mit welchen dieser Gelehrte in den verschiedenen Büchern sich erwähnt findet.[386]) In dem ersten Buche des Commentars zu den Kategorien des Aristoteles führt Boethius zwei Bücher des Archytas an, in welchen die 10 Kategorien aufgestellt seien. Er knüpft daran die Frage, ob Archytas von Tarent der Verfasser sei, oder ein gewisser Peripathetiker Archytas, verspart sich aber die Entscheidung auf eine andere Gelegenheit. Vielleicht ist Boethius von der Absicht, eine ausführlichere Untersuchung über diese Frage anzustellen, wieder abgegangen. Denn im 41. Kapitel des 2. Buches der Arithmetik wiederholt er nur die Angabe von der Aufstellung der 10 Kategorien durch Archytas von Tarent und setzt in Klammern hinzu,

einige Leute zweifelten noch daran. In der Musik wird Archytas gleichfalls erwähnt und zwar zu zwei verschiedenen Malen, im 11. Kapitel des dritten Buches und im 16. und 17. Kapitel des fünften Buches. Beidemal stimmt Boethius nicht mit ihm überein, findet aber ausdrücklich nothwendig, ihn zu widerlegen. Das erstemal scheint die Widerlegung Eigenthum des Boethius zu sein, das zweitemal rührt sie von Ptolemäus her und wendet sich nicht nur gegen Archytas, sondern gleichzeitig auch gegen Aristoxenus, bekanntlich die bedeutendste Autorität der Alten über Musik. Ich führe dieses ausdrücklich an, weil Friedlein in dem Tadel, welchen Boethius hier gegen Archytas ausspricht, den Beweis findet, Boethius habe überhaupt wohl keine grosse Meinung von Archytas gehabt, könne ihn daher nicht an einer anderen Stelle als Wegweiser benutzen [387]) und dabei einen trefflichen Schriftsteller nennen. Als ob man z. B. nicht ein warmer Verehrer unseres grossen Göthe sein könnte, ohne an seiner Farbentheorie Geschmack zu finden, als ob man nicht umgekehrt selbst aus der Göthe'schen Farbenlehre, so falsch man sie im Ganzen findet, wieder einzelne Abschnitte citiren könnte, wie den von der sinnlich-sittlichen Wirkung der Farben, der auf feinen psychologischen Beobachtungen beruht, in welchen Göthe Meister war, und nicht auf physikalischen Kenntnissen, denen gegenüber er immer ein Stümper blieb. Zur völligen Beruhigung will ich übrigens noch darauf aufmerksam machen, dass gleichfalls in der Musik, im 30. und 31. Kapitel des ersten Buches, auch ein Satz des Plato durch eine Widerlegung des Nicomachus beseitigt wird, während die hohe Meinung, welche Boethius von Plato besass, dadurch ebensowenig beeinträchtigt wird, als er sich dadurch verhindert fühlte, diesen Schriftsteller auch weiter noch als Wegweiser zu benutzen. So falsch also und unbegründet der Einwurf ist, den Friedlein hier macht, so trifft es sich durch einen eigenthümlichen Zufall doch, dass eine seiner Folgerungen richtig ist, dass nämlich zwei Schriftsteller den Namen Archytas führen, deren Einer dem Boethius in seinen philosophischen Schriften und seiner Musik als Quelle dient, während der Andere in der Geometrie benutzt ist. Das hat übrigens auch Martin schon vermuthet, [379]) wenngleich der Beweis ihm ebensowenig wie Friedlein gelang.

Ich sagte, in der Geometrie komme der Name Archytas vor, [388]) und zwar nicht Archytas von Tarent. Das geht mit Be-

stimmtheit aus der zweiten und namentlich aus der dritten Stelle hervor, wo er sich erwähnt findet. Denn diese Stellen lassen ausdrücklich erkennen, dass ein Archytas gemeint ist, welcher nach Euclid lebte, weil Boethius, oder wer der Verfasser war, sonst nicht schreiben könnte, er wolle noch mittheilen, was überdies nach dem Urtheile des Archytas für das rechtwinklige Dreieck Geltung habe, und was schon vorher durch die Untersuchungen des Euclid hinzuerfunden worden sei. Die vierte Stelle, welche Archytas nennt, lässt an und für sich Nichts erkennen, wird aber doch wohl auf denselben Archytas gehen, wie die dritte, auf die sie unmittelbar folgt, nur durch wenige Zeilen getrennt. Der Verfasser aber musste wissen, dass Archytas von Tarent vor Euclid lebte, also nicht dessen Nachfolger sein kann; dass dieser Nachfolger demnach ein anderer Archytas sein muss. Und das wusste er auch, und macht desshalb gleich das erstemal den Leser aufmerksam, wo er diesen modernen Archytas, der früher noch nicht erwähnt worden war, ihm mit den Worten vorstellt „ein gar nicht unbedeutender lateinischer Schriftsteller.“ Das ist die Bedeutung der ersten Stelle in der Geometrie, in welcher Archytas genannt ist, und welche durch eine fünfte und letzte Stelle noch weiter gestützt ist. Was Martin davon einsah, beschränkt sich auf die Bemerkung, dass ein in lateinischer Sprache schreibender Archytas keinenfalls der Tarentiner gewesen sein könne. Er setzt dann freilich noch hinzu, dieser lateinische Archytas werde wohl einer der alten Agrimensoren gewesen sein, auf welche Boethius am Anfange des zweiten Buches der Geometrie sich beziehe,[389]) und das hat Manches für sich. Denn die erste Stelle, in welcher Archytas genannt ist, steht zwar am Ende des ersten Buches der Geometrie, ist aber nur eine Ankündigung. Alle übrigen Stellen finden sich im zweiten Buche, welches grade an die Feldmesser sich wesentlich anlehnt. Mit den durch Druck veröffentlichten Feldmessern ist die Uebereinstimmung des zweiten Buches, eine einzige Stelle ausgenommen,[390]) nicht bedeutend. Sagt doch sogar Lachmann,[391]) welcher geneigt ist, den Boethius ganz aus der Reihe der römischen Feldmesser zu streichen, dass das zweite Buch weder mit Nipsus noch mit den Uebrigen wörtlich übereinstimme, und dass er sich desshalb (!) enthalten habe, seine Sammlung mit diesem für ihn wenig wichtigen Buche zu beschweren. Eine um so grössere Uebereinstimmung hat Chasles zwischen dem zweiten Buche der Geometrie und einer

Handschrift in Chartres gefunden,[347]) wie schon früher angeführt wurde. Der dort aufgeworfenen Frage darf ich daher jetzt wohl neuen und verstärkten Ausdruck verleihen. Beziehen sich etwa die von Chasles gefundenen Uebereinstimmungen auch auf solche Stellen, für welche in der Geometrie auf Archytas verwiesen ist? Wenn dieses der Fall sein sollte, findet sich dabei nur der Satz oder auch das Citat des Archytas? Endlich findet sich überhaupt der Name Archytas in jener Handschrift? Das sind die wesentlichen Punkte, die bekannt sein müssten, um zu entscheiden, ob nicht das eine Quellenwerk der Geometrie, die Schrift des lateinischen Archytas bis auf den heutigen Tag existirt. Die Lebenszeit dieses Archytas irgend wie näher zu bestimmen, ist natürlich für's Erste unmöglich. Interessant ist aber allerdings, dass wenn er ein Zeitgenosse der anderen Feldmesser war, deren Schriften wir kennen, er in das erste Jahrhundert n. Ch. Geb. fällt, also genau in dieselbe Periode, in welcher die Werke des Pseudo-Archytas zuerst aufgetreten sein sollen.[367])

Diese Erwähnung des Archytas in der Geometrie lässt somit, bei mangelnder Identität desselben mit dem gleichnamigen in anderen Schriften des Boethius genannten Weltweisen, nicht direct auf die Autorschaft des Boethius auch für die Geometrie schliessen. Aber in Verbindung mit unseren früheren Wahrscheinlichkeitsgründen, ist der Umstand doch nicht zu vernachlässigen, dass, wie ich hervorhob, gleich das erste Mal, wo Archytas erscheint, er dem Leser förmlich vorgestellt wird in der Art, wie wenn sonst eine Verwechslung sehr nahe läge. Es ist ferner zu beachten, dass auch die Thatsache jetzt feststeht, dass der Verfasser der Geometrie aus lateinischer Quelle schöpfte, was er als dem Archytas entstammend lehrt, und was uns noch ausführlich beschäftigen soll. Von den übrigen Schriftstellern, welche im ersten und zweiten Buche der Geometrie angeführt sind, ist dagegen Nicomachus[392]) ein solcher, dessen Name auch in der Arithmetik des Boethius gleichmässig vorkommt. Und auch das Wort Heteromekie, mit welchem sein Name in der Geometrie verbunden ist, kommt in der Arithmetik vor, und wird daselbst, wenn auch nicht grade dem Nicomachus, doch den Griechen zugeschrieben,[393]) also keinenfalls in Widerspruch zu dem anderen Citate. Sonst wird in der Geometrie nur noch Euclid vielfach genannt bald schlechtweg, bald mit lobenden

Prädikaten,[394]) und an einer schon früher erwähnten Stelle auch Julius Frontinus.[348]) An diese Stelle wusste Lachmann einen der Trugschlüsse zu knüpfen, die bei ihm nicht gerade zu den Seltenheiten gehören. Er hält sie nämlich für unächt, weil in ihr eine Definition als von Julius Frontinus herrührend angeführt wird, welche er bei Balbus fand.[391]) Nun ist die Lebenszeit dieses letzteren Schriftstellers sehr ungewiss, fällt aber höchst wahrscheinlich später als die des Frontinus. Man ist also vielleicht berechtigt, die Folgerung zu ziehen: Balbus habe somit den Frontinus bei dieser Definition abgeschrieben; keinenfalls jedoch liegt Logik in dem Schlusse: eine Stelle irgend eines Werkes nennt den Frontinus als Verfasser einer Definition, welche auch bei Balbus sich findet, folglich ist die ganze Stelle eingeschoben!

Schliesslich muss ich aus dem ersten Buche der Geometrie noch eine Figur in Erinnerung bringen, auf welche Chasles zuerst aufmerksam gemacht hat, und den beistehenden sehr schwierigen Text zu erläutern wusste.[395]) Es ist nämlich das Sternfünfeck, welches als Lösung der Aufgabe auftritt, in einen Kreis ein gleichseitiges und gleichwinkliges Fünfeck zu beschreiben. Diese Figur findet sich in den beiden von mir benutzten Druckausgaben, in der basler, wie in der alten venetianer Ausgabe. Sie findet sich ferner in der Handschrift C, wie ich den Codex von Chartres bezeichne, und wenn sie im erlanger Manuscripte, meiner Handschrift E, fehlt, so ist das ein Mangel, der zwar auffallen kann, aber keineswegs gegen die Aechtheit der Figur oder einer der Handschriften zum Zeugniss aufgerufen werden kann.

Ich benutze diese Gelegenheit, um in allgemeinerer Weise mich darüber auszusprechen, wie ich mir den Unterschied von Handschriften vorstelle, und wie ich glaube, dass solche benutzt werden müssen. Denken wir uns zuerst das Original, welches also vom Autor selbst oder doch unter seiner unmittelbaren Beeinflussung geschrieben wurde. Von diesem konnten wohl mehrere Exemplare, Ueberarbeitungen oder blosse Reinschriften, vorhanden sein, und die Verschiedenheiten, welche sie wahrnehmen lassen, konnten ziemlich erheblicher Natur sein. Diese Verschiedenheiten sind unbedingt die unbequemsten, weil man selten oder nie in der Lage ist, sie mit Bestimmtheit zu constatiren. Nun bemächtigen sich, vielleicht erst einige Jahrhunderte später, die Abschreiber des alten

Manuscriptes, Leute, die zum grossen Theil von dem Gegenstand wenig oder gar nichts verstanden. Was natürlicher, als dass hierdurch mancher sinnentstellende Schreibfehler sich einschleichen musste, dass manche Stellen, welche unverstandenermaassen absolut nicht geschrieben werden können, weggelassen wurden, und zwar dass der Eine dieses, der Andere jenes, der Eine mehr, der Andere weniger wegliess? Ja es ging noch schlimmer; solche die den Gegenstand halbwegs begriffen, erlaubten sich Aenderungen, und, wie sie wähnten, nothwendige Verbesserungen. Das ist es, was man die Interpolationen, Einschiebungen, nennt, und was, wie ich glaube, bei genügender Bekanntschaft mit dem Stoffe am Leichtesten von dem Kritiker erkannt wird. Wenigstens kann ich mich nur da entschliessen, eine Interpolation anzunehmen, wo die betreffende Veränderung (welche also anderen Handschriften gegenüber immer in einem Mehr, nie in einem Weniger besteht) erstens nicht in sehr vielen gleichzeitigen, also nicht von einander abgeschriebenen, Handschriften vorkommt, welche im Uebrigen das Gepräge der Sorgfalt des Copisten tragen, und zweitens ganz besonders da, wo die betreffenden Stellen nicht im innigsten Zusammenhange mit Früherem und Späterem stehen. Der entgegengesetzte Thatbestand scheint mir ein Beweis der Aechtheit zu sein, ein Beweis, dass in den Weniger enthaltenden Handschriften Etwas wegfiel, aber nicht in den Mehr enthaltenden Etwas zugesetzt wurde.

Bei Anwendung dieser Grundsätze auf das erwähnte Sternfünfeck ist nun einmal von Wichtigkeit, dass, wie wir früher sahen, diese Figur pythagorischen Ursprunges ist, und daher von einem Schriftsteller, welcher in seinem Bildungsgange Lehren aller Art in sich aufgenommen hatte, wohl angewandt werden konnte. Zweitens aber ist das Vorkommen dieser Figur in der jetzt besprochenen Geometrie nicht ein vereinzeltes, sondern ich fand sie auch bei einem anderen römischen Schriftsteller. Die berner Bibliothek besitzt nämlich zwei Handschriften von ziemlichem Interesse für unseren Gegenstand, auf welche Blume schon aufmerksam gemacht hat,[396]) und welche ich im vorigen Sommer bei kurzem Aufenthalte in Bern einen Nachmittag hindurch einzusehen Gelegenheit nahm. Beide Handschriften sind auf Pergament sauber und deutlich geschrieben, die eine im Folioformate, die andere in Quart. Letztere ist für einen später zu berührenden Gegenstand

von Wichtigkeit. Die Foliohandschrift[397]) enthält auf den 8 ersten Blättern „die Geometrie und Arithmetik des Euclid von Boethius aus dem Griechischen ins Lateinische übersetzt.“ Von diesen 8 Blättern enthalten aber wieder die 4 ersten Arithmetisches, sowie einige Namen und Zeichen von Grenzsteinen. Ein Schluss dieses ersten Theiles fehlt. Ebenso fehlen die 6 ersten Zeilen der auf dem 5. Blatte endlich beginnenden Geometrie. Schon die ungemeine Kürze, in welcher hier auf 4 Blättern die Geometrie des Boethius überliefert ist, spricht dafür, dass wir hier jedenfalls nicht die ganze Geometrie vor uns haben, sondern sei es nun einen Auszug, sei es nun die Abschrift eines ersten Entwurfes, einer Disposition. In der That stimmt auch diese Geometrie des Boethius nicht mit der der Druckausgaben überein, indem sie wenigstens zum Theil in Fragen und Antworten gehalten ist und ferner aus fünf Büchern besteht, worauf ich sogleich noch zurückkomme. Nun folgen noch 9 Blätter geometrischen Inhaltes, wahrscheinlich einem römischen Feldmesser entnommen, wiewohl die Kürze der Zeit mir nicht gestattete, eine nähere Bestimmung dieses Schriftstellers durch die nöthigen Vergleichungen auch nur zu versuchen. Und auf dem dritten dieser Blätter entdeckte ich zu meinem freudigen Erstaunen zwar nicht das Sternfünfeck, aber einen in einen Kreis eingeschriebenen achteckigen Stern, also immerhin ein von einem römischen Schriftsteller angewandtes Sternvieleck, das einzige meines Wissens bekannte Analogon aus alter Zeit. Das ganze somit aus 17 Blättern bestehende Manuscript wurde im Jahre 1004, wie es am Schlusse heisst, geschrieben. Ich wiederhole also, dass das Sternvieleck einen Beweis liefert, dass man es mit einem Autoren von pythagorisch-mathematischer Bildung zu thun hat, und dass dieser Umstand gleichfalls uns erlaubt, Boethius als wirklichen Verfasser der ihm zugeschriebenen beiden Bücher Geometrie zu betrachten.

Ich hebe ausdrücklich hervor, der beiden Bücher Geometrie. In den gedruckten Ausgaben ist das nun allerdings nicht Alles. Da schliesst sich vielmehr an das zweite Buch noch ein weiteres Stück an, welches in dem alten Venetianer Drucke als drittes Buch der Geometrie des Boethius bezeichnet ist, in der Basler Ausgabe als Buch der Geometrie des Boethius schlechtweg, während oben an den Seiten die Angabe als zweites Buch noch fortgeführt wird. Dieses Stück ist aber in der Handschrift E und

vielen anderen gar nicht enthalten. In einigen guten Handschriften findet es sich allerdings, wie ja meistens ein und derselbe Codex mehrere Schriften zu enthalten pflegt; aber dann heisst es anonym nur „Beweis der Geometrie", [398]) und dessen Aechtheit wird mit Fug und Recht in Abrede gestellt. Denn einmal ist in dem ganzen Stücke nie auf andere Schriften des Boethius zurückverwiesen. Zweitens sind die überhaupt erwähnten Schriftsteller durchweg andere als die bei Boethius sonst vorkommenden, z. B. Varro, der in diesem Abschnitte der erfahrenste Römer genannt wird, sonst aber nirgends angeführt erscheint, was doch zu jenem Prädicate nur schlecht passt. Drittens ist der ganze Inhalt wenig geeignet, Vertrauen einzuflösen, indem er aus Geometrischem, Arithmetischem, Literaturhistorischem zusammengewürfelt ist. Endlich viertens ist es den Bemühungen verschiedener Gelehrten gelungen, fast jedes Wort dieses Stückes in sonstigen Schriften, wie in denen des Columella, des Boethius selbst und Anderer wieder aufzufinden. Dieses Bruchstück ist somit abzuweisen, und darin stimmen auch alle Gelehrte überein, die sich mit dem Gegenstande beschäftigt haben. Eine noch nicht gelöste Frage ist es, wie man veranlasst wurde, mehr als zwei Bücher Geometrie dem Boethius zuzuwenden? Vielleicht war dessen erster Entwurf auf fünf Bücher berechnet? Diese allerdings nur sehr vorsichtig ausgesprochene Hypothese stützt sich auf das beschriebene berner Manuscript, sowie auf eine florentiner Handschrift, die gleichfalls 5 Bücher Geometrie des Boethius enthält. [399]) Ohne Vorbehalt spreche ich hingegen die Ueberzeugung aus, die beiden ersten Bücher der Geometrie des Boethius sind ächt, und diese Ueberzeugung theilt jetzt hoffentlich mit mir der unbefangene Leser der vorhergegangenen Untersuchung, deren einzelne Beweise, zwar jeder einzelne für sich höchstens Wahrscheinlichkeit, insgesammt aufgefasst aber Gewissheit ergeben. Ich halte es nicht einmal für unmöglich, dass dieser Ueberzeugung ein gewisses Erstaunen darüber sich beimische, dass ich solches Gewicht auf die Aechtheit oder Unächtheit der Boethischen Geometrie lege, eines Werkes, dessen Inhalt, soweit er im Bisherigen angedeutet wurde, eine Anfeindung so wenig wie eine Vertheidigung rechtfertigt. Dieses Erstaunen wäre eben so natürlich als billig.

In der That hätte ich mir diese längere, fast ein ganzes Kapitel füllende Abschweifung nicht gestattet, wenn nicht der Inhalt

der Geometrie des Boethius reichhaltiger wäre, als ich bis jetzt angab. Am Schlusse des ersten Buches und ebenso am Schlusse des zweiten Buches befinden sich nämlich zwei Stellen, welche, wenn ächt, für die Geschichte der Zahlzeichen und des Zahlenrechnens von der grössten Tragweite sind. Auf diese beiden Stellen muss ich jetzt ausführlicher eingehen und mich dabei zugleich auch mit den Handschriften E. und C. beschäftigen, auf welche dabei verwiesen werden muss.

XIV. Die Handschrift E. Multiplication.

Die Erlanger Universitätsbibliothek besitzt eine ausserordentlich schöne Handschrift der Geometrie des Boethius, welche aus der früheren Altdorfer Bibliothek in dieselbe übergegangen ist. Der Erste welcher die Handschrift, die nämliche, die ich durch den Buchstaben E bezeichne, näher untersuchte, war Johann Friedrich Weidler, der bekannte Verfasser der Geschichte der Astronomie. Auf einer Reise durch Altdorf hatte er sie durch Vermittlung vom Professor Köler, dem dortigen Historiker, zu sehen bekommen, und war beim Durchblättern auf gewisse Zeichen aufmerksam geworden, welche ihm von der grössten Bedeutung schienen. Die Frucht dieser Beobachtung war eine im Jahre 1727 in Wittenberg veröffentlichte Dissertation[400]) unter der Ueberschrift: „Ueber die gewöhnlichen Zahlzeichen und die Zeit ihrer Entstehung mit Rücksicht auf alte Belege", welcher Weidler dann noch eine zweite Abhandlung im Jahre 1755 nachfolgen liess, die ich mir aber bisher noch nicht verschaffen konnte. In der ersten Arbeit spricht er sich über die Handschrift dahin aus, dass sie sehr alt sei, mindestens aus dem 8. oder 9. Jahrhundert. Davon weicht die Ansicht späterer Bearbeiter freilich ziemlich erheblich ab. Mannert[401]) gab die ausführlichste Beschreibung in seiner 1801 erschienenen Abhandlung: „Ueber den in Wirklichkeit pythagorischen Ursprung der sogenannten arabischen Zahlzeichen" und sagt dabei etwa Folgendes: „Der Codex ist von Pergament, im Sedez-Format geschrieben von einer Hand des 11. Jahrhunderts. Die Linien, auf welchen geschrieben ist, sind mit einem Stifte, nicht mit Farben gezogen, die Buchstaben selbst sind carolingisch und noch nicht durch die halbbarbarischen Krümmungen späterer Jahrhunderte verderbt. Abkür-

zungen erscheinen nur in sehr geringer Anzahl, und nur bei häufig vorkommenden Wörtern, so dass kein Leser durch Schwierigkeiten der Schrift aufgehalten werden wird. Bei am Ende einer Zeile abgebrochenen Wörtern fehlt ein Trennungszeichen. Ueber dem i ist kein Strichelchen. Die Buchstaben ae werden fast nie durch ein einfaches e ausgedrückt, ausser in sehr seltenen Fällen, wo der Schreiber vergass, das Zeichen des Diphtongen beizufügen. Unter den Abkürzungen erscheint niemals ɔ für con. Die grossen Buchstaben sind noch nicht durch Kreise verkünstelt und entstellt: lauter Zeichen, die mehr für das 10. als für das 11. Jahrhundert sprechen würden, wenn nicht die Schriftzüge namentlich bei dem m und n von der reinen Einfachheit etwas abwichen, länger wären und der Art geneigt, wie das 12. Jahrhundert sie in roherer Weise geformt darbietet. Aus diesen Gründen schreibe ich den Codex dem 11. Jahrhunderte zu mit der Hoffnung, dass Sachverständige mir beipflichten werden."

Da dieses Manuscript das Erste war, welches ich kritisch untersuchte, so konnte ich natürlich nur das Thatsächliche in Mannerts Beschreibung controliren, und in der That kann ich, was er sagt, wörtlich bestätigen mit der einzigen Ausnahme, dass ich an einigen wenigen Stellen, die ich nachträglich jedoch nicht mehr aufzufinden vermochte, beim erstmaligen Lesen einen kleinen Strich über dem i bemerkte. Dem Urtheile hingegen, welches Mannert aus den hervorgehobenen Gründen fällte, fühlte ich mich weder berechtigt beizupflichten, noch zu widersprechen. Glücklicherweise hatte Professor Wattenbach die Güte, die Handschrift in meiner Gegenwart einer Prüfung zu unterziehen, und er kam etwa zu denselben Resultaten wie Mannert. Er glaubt die Entstehung der Handschrift in die Mitte des 11. Jahrhunderts verlegen zu müssen und beruft sich dabei, ausser den von Mannert berücksichtigten Momenten noch ganz besonders darauf, dass am Ende der Wörter stets ein langes s geschrieben ist,[402]) dann auch noch darauf, dass die r immer auf der Linie aufstehen, nicht unter dieselbe herabreichen, und endlich dass die t mit einem schon ganz geraden Querstriche versehen sind. Damit ist also jedenfalls festgestellt, dass diese Handschrift, welche unter der Nummer 288 aufbewahrt wird, zu den ältesten Handschriften der Geometrie des Boethius gehört. Die Handschrift C von Chartres, welche ich bereits früher als von Chasles aufgefunden anführte, enthält gleichfalls die beiden Bücher der Geometrie, wie es scheint in fast wört-

licher Uebereinstimmung mit E, mit welchem sie gleichzeitigen Ursprunges sein soll. Ich werde mich indessen hier wesentlich auf E berufen, welches allein mir zur längeren Benutzung zur Verfügung stand, und somit des Näheren von mir bearbeitet werden konnte.

Als Titel stehen am Anfange der Handschrift Worte, deren deutsche Uebersetzung genau so heisst: „Es beginnt die Geometrie des Euclid von Boethius in's Lateinische klarer übertragen.“ Dann folgt auf 67 Seiten dasjenige was in den von mir benutzten Druckausgaben als erstes Buch bis zu einem im Vorhergehenden noch nicht erwähnten Abschnitte, der selbst die besondere Ueberschrift „Ueber das Verhältniss des Abacus“ trägt, enthalten ist. Manche Unterschiede sind zwar in dem so weit gerechneten ersten Buche vorhanden, indessen sind dieselben doch nicht so wesentlicher Natur, als dass sie nicht als andere Lesarten aufgefasst werden müssten. Im Allgemeinen kann man nicht sagen, dass das Manuscript vor dem Drucke constant den Vorzug verdiene, ebensowenig wie man die entgegengesetzte Behauptung aussprechen darf.[403]) Bald scheint der Druck correkter, wie z. B. in Bezug auf die Figur des Sternfünfecks, welche in E fehlt, bald muss man diesem den Vorzug geben, wo der Druck offenbar mangelhafter ist. Im Ganzen muss also jede einzelne Stelle für sich sprechen, ob sie nach der einen, oder nach der anderen Lesart anzunehmen sei. Der Inhalt dieses ersten grösseren Abschnittes besteht, wie schon früher angedeutet wurde, in euclidischen Definitionen und Lehrsätzen, welche aber ohne Beweis angegeben sind, ganz ähnlich wie in den übrigen lateinischen Geometrien, die wir besitzen. Damit ist jedoch das erste Buch noch nicht abgeschlossen, sondern es folgt, wie gesagt, im Drucke noch ein Abschnitt über das Verhältniss des Abacus, und ganz ähnlich findet sich der ebenso überschriebene Abschnitt[404]) in den Handschriften.[405]) Die Handschrift E ist hier unzweifelhaft an einigen Stellen dem Drucke vorzuziehen. Ich will desshalb, und weil es auf diese Stelle uns ganz vorzüglich ankommt, eine den Sinn möglich getreu wiedergebende Uebersetzung meiner Besprechung zu Grunde legen:

Ueber das Verhältniss des Abacus.

„Männer von alter Einsicht, welche der pythagorischen Schule angehören und als Forscher über platonische Weisheit mit merk-

würdigen Speculationen sich beschäftigten, haben den Gipfelpunkt der ganzen Philosophie in die Eigenschaften der Zahlen gesetzt. In der That wer wird die Maasse des musikalischen Einklanges verstehen, wenn er glaubt, sie hingen nicht mit Zahlen zusammen? Wer wird unbekannt mit der Natur der Zahlen entdecken, wie die planetarischen Körper des Firmamentes sich zu Sternen zusammenballen, oder den Aufgang und Untergang der Zeichen zusammenfassen? Was endlich soll ich von der Arithmetik und Geometrie sagen, die selbst nicht in nichtnennenswerther Gestalt erscheinen, so wie die Eigenschaften der Zahlen verloren gehen? Doch davon ist in der Arithmetik und in der Musik zur Genüge die Rede gewesen, kehren wir daher zu dem zurück, was jetzt zur Sprache kommen soll. [404a])

„Die Pythagoriker haben sich, um bei Multiplicationen, Divisionen und Messungen nicht in Irrthümer zu verfallen (wie sie denn in allen Dingen voller Einfälle und Feinheiten waren) eines gewissen gezeichneten Apparates bedient, welchen sie ihrem Lehrer zu Ehren die pythagorische Tafel nannten, weil die ersten Lehren in den so dargestellten Dingen von jenem Meister ausgegangen waren. Von den Späteren wurde der Apparat Abacus genannt. Sie beabsichtigten damit das, was tiefsinnig erdacht worden war, leichter zur allgemeinen Kenntniss zu bringen, wenn man es gewissermassen vor Augen sähe, und gaben somit dem Apparate die hier folgende merkwürdige Gestalt.“ [404b])

Nach diesen Sätzen, welche wohl keines anderen Commentars bedürfen, als der in der Fortsetzung selbst sich ergeben wird, folgt nun in E die Zeichnung der Tafel (**Figur 39**), und auf diese dann weiter der Text, wie ich ihn sogleich übersetze, wobei ich ausdrücklich bemerke, dass wo ich römische Ziffern habe, auch die Handschrift solche aufweist, dass meine modernen Ziffern hingegen als zum Drucke bequemer statt eigenthümlicher Zeichen (**Figur 40**) auftreten, welche im Manuscripte enthalten sind und nur unbedeutend von den Zeichen der vorhergehenden Tafel abweichen.

„Folgendermassen bedient man sich nun des obengezeichneten Apparates. Man hatte Apices oder Charactere von verschiedener Gestalt. Einige hatten sich derartige Zeichen für die Apices gebildet, dass das Zeichen 1 der Einheit entsprach, das Zeichen 2 der zwei, das dritte 3 der drei, das vierte 4 der vier, folgendes wurde der fünf zugeschrieben 5, dieses der sechs 6, der sieben kam das siebente Zeichen 7 zu, dieses der acht 8 und dieses 9

wurde mit dem Begriffe neun verbunden. Einige benutzten dagegen zur Beschreibung des Apparates die Buchstaben des Alphabets, so dass der erste Buchstabe der Einheit entsprach, der zweite der zwei, der dritte der drei und die übrigen so fort der natürlichen Ordnung nach der naturgemässen Zahl. [Noch Andere haben zu demselben Zwecke nur solche Apices, welche mit der naturgemässen Zahl] von Strichen versehen und beschrieben waren, sich auserwählt. [404c])

„Diese Apices nun hatten sie die Gewohnheit beim Multipliciren und Dividiren bald da, bald dort auszustreuen, wie man es mit dem Staube zu machen pflegt, so dass wenn sie die schon genannten Charaktere unter die Einheit der natürlichen Zahl setzten, und die Ordnung mit berücksichtigten, nichts Anderes als Einheiten entstanden. Ferner bestimmten sie, dass die erste Zahl (also die zwei, denn die Einheit ist, wie in der Arithmetik gesagt worden ist, keine Zahl, sondern Quelle und Ursprung der Zahlen) unter die mit X bezeichnete Linie gesetzt XX bedeuten solle, die drei XXX, die vier XL und die übrigen der Ordnung nach sich folgenden Zahlen, je nach den ihnen eigenen Benennungen. Wenn sie aber dieselben Apices unter die mit der Zahl hundert bezeichnete Linie brachten, so sollte die zwei CC, die drei CCC, die vier CCCC und die übrigen dadurch gesicherten Benennungen entsprechen. Indem sie dieses Verfahren auf die folgenden mit den einzelnen Kolumnen verbundenen Linien fortsetzten, waren sie durch keinen trübenden Irrthum befangen. [404d])

„Nun muss man beim Multipliciren und Dividiren wissen und mit genauer Prüfung beobachten, unter welche Kolumne man die Einer und unter welche die Zehner bringt. Denn ein einheitlicher Multiplicator eines Zehners wird die Einer unter den Zehnern, die Zehner unter den Hunderten erhalten. Wird dieselbe einheitliche Zahl mit einem Hunderter vervielfacht, so kommen die Einer unter Hundert, die Zehner unter Tausend. Vervielfacht sie einen Tausender, so kommen die Einer unter Tausend, die Zehner unter Zehntausend; und vervielfacht sie einen Hunderttausender, so gehören die Einer unter Hunderttausend, die Zehner unter Tausendmaltausend.

„Ein Zehner hingegen, der mit einer Zahl derselben Art vervielfacht wird, stellt die Einer in die Kolumne, welche C überschrieben ist, die Zehner unter die Tausende.“ [404e])

Ich halte es für überflüssig, die Uebersetzung der nächsten Sätze noch beizufügen, da dieselben nur in langweiliger Consequenz die Regeln angeben, wie man in den verschiedenen Fällen sich zu benehmen habe, wenn die Ordnung des Multiplicators sowohl als des Multiplicandus gegeben ist. Die letzten Fälle lehren die Vervielfachung von Hunderttausenden mit Zahlen gleicher Ordnung. Statt dieser Wiederholungen will ich gleich hier das Bisherige zu erläutern suchen.

Das Wichtigste, was zu erklären wäre, ist die Tabelle selbst mit Allem, was auf ihr sich befindet. Indessen kann darauf erst später vollständig eingegangen werden, und so begnüge ich mich hier damit, darauf aufmerksam zu machen, dass diese sogenannte pythagorische Tafel nichts Anderes ist, als eines jener Rechenbretter, deren Besprechung ich zwei besondere Kapitel widmete. Den einzelnen Kolumnen, 12 an der Zahl, sind die Einheiten der verschiedenen Ordnungen, welche sie repräsentiren, als Kopfzahlen beigeschrieben, im Uebrigen aber sind noch verschiedene, für jetzt zu übergehende, Zeichen dargestellt. Diese Zeichnung des Rechenbrettes findet sich sowie in E auch in C und anderen Handschriften der Geometrie des Boethius, und wenn man den Text zu Rathe zieht, so kann es auch nicht zweifelhaft sein, dass hier wirklich nur ein Rechenbrett Platz finden konnte. Die Ueberschrift des Abschnittes kündigt schon im Voraus einen Abacus uns an. Dann die Auseinandersetzungen, welche auf die Figur folgen, schildern, wie man sich zu benehmen habe, um den Zahlen höhere oder niedrigere Werthe zu ertheilen, je nachdem man sie in andere Kolumnen schreibt, schildern ferner die Bestimmung der Ordnung eines Productes, wenn die Ordnungen der einzelnen Factoren gegeben sind. Das sind aber Dinge, von welchen das Letztere zwar auch ohne Rechenbrett verständlich wäre; wir haben das Beispiel davon bei Apollonius kennen gelernt. Das Erstere jedoch kann nur mit Hülfe des Rechenbrettes einen Sinn haben. Es ist mir nicht bekannt, welches Manuscript dem Venetianer Drucke von 1491 zu Grunde liegt, indessen scheint dasselbe auch zu den an dieser Stelle correkteren gehört zu haben. Wenigstens ist in diesem Drucke hier eine halbe Seite leer gelassen, der beste Beweis, dass zwar im Manuscripte sich hier eine Figur fand, aber eine solche, welche der Herausgeber wohl nicht verstand, oder welche die Mittel des damaligen Druckes überstieg. In der anderen von

mir benutzten Ausgabe, in der basler Ausgabe von 1570, ist hingegen keine leere Stelle, auch kein Rechenbrett, sondern die Einmaleins-Tabelle, wie sie auch in späteren Handschriften sich finden soll. Man lese aber den weiteren Text, der sich von dem unserer Handschrift kaum unterscheidet, so wird man zugeben müssen, dass er jetzt ebenso unverständlich ist, wie er vorher bei Zugrundelegung der Figur des Rechenbrettes deutlich war. Sicherlich ist daher diese Einschaltung des Einmaleins irrig, und es wäre nicht der Mühe werth, auch nur mehr als blosse Erwähnung davon, wie von irgend einem anderen Druckfehler zu thun, wenn nicht aus ihm die ziemlich allgemein verbreitete falsche Benennung entstanden wäre, nach welcher noch heute das Einmaleins die Tafel des Pythagoras heisst.

Man könnte freilich einwenden, wenn auch Boethius hier angiebt, die Alten hätten ihrem Lehrer zu Ehren das Rechenbrett die Tafel des Pythagoras genannt, so sei darum die Möglichkeit nicht aufgehoben, dass Pythagoras auch der Urheber der Einmaleinstabelle sei, die gleichfalls nach ihm benannt worden wäre, vielleicht nachdem jene erste Tabelle von den Späteren, wie Boethius ja gleichfalls mittheilt, den Namen Abacus erhalten hatte. Dieser Einwand zerfällt jedoch, indem Nicomachus, welcher gerade die pythagorischen Lehren, so weit sie die Theorie der Zahlen betreffen, uns erhalten hat, im 19. Kapitel des ersten Buches die Einmaleinstabelle mittheilt; [406]) eben dieselbe finde ich auch in der Arithmetik des Boethius. [407]) Aber weder das griechische Original noch die lateinische Bearbeitung nennen Pythagoras als bei der Erfindung dieser Tabelle irgend betheiligt, während keinerlei Grund vorliegt, warum beide versäumt haben sollten, diese Bemerkung einzuschalten. Indem ich also als erwiesen annehme, dass jene Tafel nichts Anderes als das Rechenbrett sein kann, indem ich ferner die Meinung als apokryph betrachte, nach welcher Tafel des Pythagoras auch wohl so viel wie Einmaleins heisst, gehe ich zu Weiterem über.

Schon das Wort Apices fordert einige Erläuterung. Eigentlich heisst dieses Wort Gipfel und bedeutet insbesondere spitze oder doch wenigstens kegelförmige Erhöhungen. Ich glaube daher, dass damit in der That kleine Kegel gemeint waren, [408]) welche mit den betreffenden Zeichen versehen wurden, „welche sich Einige für die Apices gebildet hatten", oder mit anderweitiger Bezeichnung. Wie diese aber war, sagt uns gleichfalls der Text: entweder Buch-

staben des Alphabets, oder so viel Striche wie der Natur der Zahl nach erforderlich waren. So möchte ich wenigstens den einen Satz verdeutschen, welchen Chasles freilich ganz anders auffasst,[409]) indem er nicht von Strichen spricht, deren Anzahl durch ihre Bedeutung nothwendig gemacht wird, sondern von Charakteren, die schon früher zur Bezeichnung der natürlichen Zahlen gebraucht worden waren. Ich wüsste mir bei dieser Uebersetzung nicht recht zu deuten, was die natürlichen Zahlen dabei thun, wenn sie auch im Uebrigen dem Wortlaute nicht so argen Zwang anthäte.

Es sei ferner erlaubt hier einzuschalten, dass die soeben besprochene Stelle[404c]) noch eine ganz besondere Bedeutung dadurch hat, dass sie beweist, dass hier unser Manuscript und ebenso C bei Weitem correcter sind als die Druckausgaben. Die Worte nämlich, welche ich in meiner Uebersetzung in eckige Klammern eingeschlossen habe, fehlen im Drucke. Das ist nun zwar ein sehr leicht erklärlicher Fehler. Denn in E z. B. nehmen diese Worte genau zwei Zeilen ein, deren letzte, wie ich es auch deutsch nachzuahmen mich bemühte, genau ebenso schliesst, wie die denselben vorhergehende Zeile. Wenn also das Manuscript des Setzers ähnlich aussah, so konnte er, oder vielleicht schon der Abschreiber leicht die zwei Zeilen übersehen. So ist der Fehler zwar erklärt doch immer vorhanden, und spricht, wie gesagt, für die an dieser Stelle grössere Zuverlässigkeit der beiden Handschriften E und C.

Wie die Uebereinstimmung dieser beiden Manuscripte an der eben erwähnten Stelle existirt, so sind auch die Charaktere, welche in beiden Texten als zur Bezeichnung der Apices dienend angegeben sind, fast durchaus identisch. Kaum anders sind auch die Zeichen in zwei pariser Manuscripten (**Figur 41**), die ich schon früher veröffentlicht habe,[410]) und endlich der venetianer Drucker hat sich wenigstens in der für die damalige Zeit schwierigen Aufgabe versucht, mitten in den Text solche Zeichen einzufügen. Es ist ihm freilich so schlecht gelungen, dass man ohne Beihülfe der Handschriften, und ohne zu wissen, wie die Zeichen aussehen sollen, kaum erkennen dürfte, was und wo es der Drucker darzustellen wünschte, aber mit dieser Kenntniss ist auch der Beweis geliefert, dass das Manuscript des Venetianers genau die richtigen Zeichen enthielt. Wie es in dieser Beziehung mit der Handschrift sich verhalten haben mag, die dem basler Drucke zu Grunde lag,

wage ich nicht zu entscheiden. Doch ist es immerhin interessant, dass dort mitten im Texte plötzlich ganz moderne Ziffern auftreten. Chasles ist deshalb der Ansicht, das Manuscript werde wohl auch die Zahlzeichen enthalten haben, welche ich, weil sie in unserer Quelle den Pythagorikern zugeschrieben werden, einmal vorläufig pythagorische Zeichen nennen will, freilich ohne dabei mehr als eine kurze Benennung zu beabsichtigen. Ein historisches Urtheil will ich jetzt noch nicht mit dem Namen ausgesprochen haben. Ausser den angeführten Manuscripten der Geometrie des Boethius giebt es noch eine ganze Anzahl derselben, welche jene Zeichen enthalten. Chasles hat eine Zusammenstellung derselben veröffentlicht.[411])

Ich habe oben angegeben, wie ich mir die Apices mit den pythagorischen Zahlzeichen denke. Es ist vielleicht von Nutzen, darauf aufmerksam zu machen, dass deren Einführung dem Rechnen auf dem Abacus viel von seinem früheren rein machinalen Verfahren raubte, und eine wenn auch geringe Anstrengung des Denkvermögens während der Ausführung der einzelnen Operationen in Anspruch nahm. So lange man nämlich einzelne Marken in die Kolumnen legte, und zwar so viele als eben die betreffenden Zahlen erheischten, ergab jedesmal der blosse Anblick, ob und in welcher Weise Veränderungen vorgingen, ob man etwa auf die nächstliegende Kolumne mit Rücksicht nehmen musste. Jetzt war der Anblick nicht mehr genügend. Man musste innerhalb einer Kolumne wirklich rechnen. Damit war in der That etwas Neues erschienen, ein Schritt war geschehen auf dem Wege zur Verallgemeinerung der Wissenschaft der Arithmetik; und wenn wir jetzt hinzudenken, dass die pythagorischen Zeichen auf den Apices fremdartig und unverständlich aussahen, dass also hier neue Denkoperationen in neuem Gewande eingeführt werden sollten, dann wird es erklärlich, wie solche höchst merkwürdig bezeichnete Kegelchen allmälig wieder verloren gingen, vielleicht sogar im grossen Publikum nie eingeführt waren, sondern bei Festhaltung der Methode allgemein bekannten Zeichen den Platz einräumten.

Ich muss in der Reihenfolge meiner Erklärungen jetzt bei den Wörtern Einer und Zehner verweilen, welche ich bei Gelegenheit der Gebrauchsanweisung der Apices[404e]) benutzte. Ich erlaubte mir nämlich zur grösseren Deutlichkeit für solche Leser, welche hier zum erstenmale mit dem Gegenstand bekannt werden, diese moderne Umschreibung einer wörtlichen Uebersetzung vorzuziehen. Wörtlich

genommen hätte ich statt Einer und Zehner Fingerzahl und Gelenkzahl sagen müssen, und je nachdem der diesen Wörtern beigelegte Sinn nachträglich gerechtfertigt werden kann oder nicht, steht oder fällt meine ganze Uebersetzung. Glücklicherweise setzt Boethius selbst die Bedeutung dieser Wörter in's Klare, so dass noch nie an der Richtigkeit der Auffassung, der auch ich folge, gezweifelt wurde. Schon anderthalb Seiten vor dem Anfange des Abschnittes über das Verhältniss des Abacus enthalten die Druckausgaben nebst E, C und anderen Handschriften eine Art von Ankündigung des zu behandelnden Themas. Sie heisst: „Es ist jetzt an der Zeit zur Erörterung der geometrischen Tafel überzugehen, welche von Archytas, einem gewiss nicht zu verachtenden Schriftsteller dem römischen Gebrauche angepasst wurde; vorher ist jedoch auseinanderzusetzen, wievielerlei Linien und Winkel es giebt, sowie Einiges über Endflächen und Begrenzungen." Das setzt dann auch der Verfasser in gewohnter bündiger Weise auseinander, und fährt dann fort, man müsse sich auch davon Kenntniss verschaffen, was eine Fingerzahl und was eine Gelenkzahl sei, was zusammengesetzte und was nicht zusammengesetzte Zahlen, was Multiplicatoren und was Divisoren. Eine Fingerzahl, Digitus, sagt er, nannten die Alten jede Zahl unter der ersten Grenze, und er meint unter dieser Grenze jedenfalls die Zahl 10, da er als Beispiele die Zahlen 1 bis 9 sämmtlich anführt. Gelenkzahlen, Artikel, werden die Zahlen genannt, welche in der Ordnung der Zehner und so fort in's Unendliche sich befinden. Zusammengesetzte Zahlen sind Alle von der ersten Grenzzahl d. h. von 10 bis zur zweiten Grenzzahl d. h. 20 und die übrigen der Reihe nach mit Ausnahme der Grenzzahlen selbst. Nicht zusammengesetzt heissen die Fingerzahlen und ausserdem noch alle Grenzzahlen. Endlich folgt noch die Bemerkung, dass bei der Multiplication jeder der beiden Faktoren der grössere sein könne, dass hingegen bei der Division immer die grössere Zahl durch die kleinere getheilt sein müsse, und daran schliesst sich unmittelbar der Abschnitt über den Abacus, der uns eigentlich beschäftigt. In diesem Vorworte ist also genau die Bedeutung der Finger- und Gelenkzahlen angegeben, welche ich in der Uebersetzung zu Hülfe nahm, um besser verständlich zu sein; es ist ausserdem, wie man erkennt, auch das Wort Grenzzahl, Limes, in gleicher Bedeutung mit Gelenkzahl gebraucht, und das Wort nichtzusammengesetzte Zahl sowohl für die Finger-

zahlen als für die Gelenkzahlen. Die zusammengesetzte Zahl bildet eine dritte Gattung für sich und stellt die Summe einer Fingerzahl und einer Gelenkzahl dar. Wollte man also diese Definitionen noch etwas anders aussprechen, so könnte man sagen: eine Fingerzahl ist eine solche, welche durch irgend einen Apex auf der Einerkolumne dargestellt wird; eine Gelenkzahl drückt man aus, indem man einen Apex auf eine der folgenden Kolumnen von der der Zehner an legt; nicht zusammengesetzt oder einfach ist jede Zahl, deren Darstellung auf dem Rechenbrette nur einen Apex erfordert, in welcher Kolumne es auch sei; die zusammengesetzte Zahl endlich wird durch mehr als einen Apex bezeichnet werden müssen.

Aber das Vorwort lässt noch mehr erkennen. Es spricht nämlich mit dürren Worten aus, dass es *eine fremdländische Erfindung* ist, welche hier unter dem Namen der geometrischen Tafel angekündigt wird, dass Archytas dieselbe nur dem römischen Gebrauche angepasst habe. Dass die Wörter Fingerzahl u. s. w. gleichfalls von Archytas herrührten, wird freilich nicht gesagt, aber der Zusammenhang lässt es doch ahnen, da der Name den Alten zugeschrieben wird. Der Ursprung dieser Wörter liegt in einer wirklichen *Fingerrechnung*, wie sie neben und ausser dem Rechnen auf dem Abacus sowohl den Griechen, als den Römern bekannt war und bis in das 16. Jahrhundert herab mit Bestimmtheit nachgewiesen werden kann. Es war eine eigenthümliche Methode durch *Ausstrecken oder Beugen der einzelnen Finger* bald diese, bald jene Zahl sich für einen Augenblick zu merken, wenn man sich nicht im Stande fühlte, die ganze Operation ohne äusseres Hülfsmittel im Kopfe auszuführen. Auf sie weist eine Stelle des Plutarch hin, welche Böckh gewiss richtig in diesem Sinne gedeutet hat,[412]) dass das griechische Wort für Finger als wirklicher Finger verstanden werden muss, und nicht symbolisch als Fingerzahl. Darauf weisen ferner viele Stellen römischer Schriftsteller hin, welche man in jedem grösseren Wörterbuche z. B. bei Forcellini mit leichter Mühe unter digitus wie unter articulus finden kann. Interessant erschien mir nur eine bisher noch nie beachtete Stelle des Cassiodor,[413]) welche ich weder in einem Wörterbuche noch bei einem der Schriftsteller über unseren Gegenstand erwähnt fand, und welche beweist, dass das Fingerrechnen zur Zeit des Boethius bekannt war. Die Ableitung der Namen Fingerzahl und Gelenkzahl findet sich meines Wissens zuerst in

einer Handschrift, welche um 1200 geschrieben wurde und sei 1843, durch die Bemühungen von Chasles um diesen Gegenstand, allgemein bekannt ist.[414]) Diese Herleitung stimmt mit der hier angegebenen Hypothese überein, und wenn Chasles hinzusetzt, in anderen Schriften des 12. und 13. Jahrhunderts seien noch andere Etymologien versucht, so ist nur zu bedauern, dass er dieselben nicht angab, um eine vergleichende Prüfung der Wahrscheinlichkeiten eintreten zu lassen. Im 16. Jahrhunderte hat Noviomagus, der in einem früheren Kapitel genannte Gelehrte, auch den Zusammenhang von Fingerzahl und Gelenkzahl mit der Fingerrechnung ausdrücklich bestätigt, wie Friedlein hervorgehoben hat.[415]) So interessant dieses Citat ist, welches uns die Sicherheit giebt, dass die Fingerrechnung in einer Zeit, welche der unsrigen so nahe liegt, noch in voller Uebung war, so unrichtig sind die weiteren Schlüsse, welche Friedlein daran knüpft, und welche ich nach der im Obigen schon enthaltenen Widerlegung unberücksichtigt lassen darf.

Wollte Jemand darüber Verwunderung aussprechen, dass die Wörter Fingerzahl und Gelenkzahl in keinem Schriftsteller vor Boethius erklärt sind, so kann man füglich mit der Gegenfrage antworten, wo denn allenfalls eine solche Erklärung vorkommen könnte? Die griechischen Schriften, welche mit praktischer Rechenkunst sich beschäftigten, und nur in solchen konnten derartige technische Ausdrücke definirt werden, sind verloren gegangen. Lateinische Schriftsteller über diesen Gegenstand gab es aber vor Boethius überhaupt nur wenige. Ausser dem Archytas, der Quelle des Boethius, ist vielleicht nur Appulejus noch zu nennen, wenn meine früher ausgesprochene Hypothese richtig ist, dass dieser wirklich über das Rechnen auf dem Abacus schrieb. Einen wenn auch geringen Beitrag zu dieser Annahme finde ich noch in einer Stelle aus einem lateinischen Manuscripte, auf welches Halliwell aufmerksam gemacht hat.[416]) Dort wird nämlich berichtet, Appulejus und nach ihm Boethius hätten die Römer das Zahlenrechnen gelehrt. Aber freilich ist die Sprache jenes Manuscriptes so barbarisch, und was in Bezug auf griechische Quellen ebendarin gesagt ist so falsch, dass kein Gewicht auf die Stelle zu legen ist. Genug jedenfalls ist Appulejus der einzige Autor, welcher möglicherweise jene Kunstausdrücke noch erklärt haben kann, und seine dahin schlagende Schrift ist nicht mehr vorhanden.

Nach diesen ausführlichen und vielleicht langweiligen, aber nicht zu umgehenden Erörterungen einzelner Wörter kann ich über die weitere Uebersetzung des Abschnittes vom Abacus, so viel ich davon bereits angegeben habe, stillschweigend hinweggehen. Die Regeln der Multiplication bieten auch nicht die mindeste Schwierigkeit, auch nicht den geringsten Anlass zu erklärenden Bemerkungen. Um so mehr wird dieses bei der Fortsetzung jenes Abschnittes der Fall sein.

XV. Handschrift E. Division, Minutien.

Die weitere Uebersetzung des Abschnittes über das Verhältniss des Abacus führt mich zu einem mit besonderer Ueberschrift versehenen neuen Kapitel:

„Von der Division."

„Auch die Division wird jetzt der theilweise schon damit bekannt gemachte Leser leicht verstehen können, wenn er Vergnügen daran findet. Ich will daher in Kürze auch davon der Hauptsache nach reden; sollte Etwas dunkel erscheinen, so bleibt es dem fleissigen Leser überlassen, sich durch Uebung hineinzuarbeiten."

„Ist ein Zehner oder ein Hunderter oder eine höhere Zahl durch eine Zahl gleicher Ordnung zu dividiren, so muss man die kleinere von der grösseren so weit hin, als man zu dividiren hat, abziehen. Ist mit einem Einer in einen Zehner, Hunderter, Tausender u. s. w. zu dividiren, oder mit einem Zehner in eine Zahl höherer Ordnung, so muss man mit Hülfe der Differenz operiren."

„Ein Zehner, der mit einem Einer verbunden ist, theilt einen einfachen oder zusammengesetzten Zehner nach zweien oder dreien u. s. w. je nach der benennenden Zahl."

„Kommt nun der fleissige Schüler zur Division eines Hunderter oder Tausender u. s. f. durch einen zusammengesetzten Zehner, wo mit Hülfe der Differenz dividirt werden soll, und so dass jene Ersteren als Artikel betrachtet werden, oder die auftretenden Zahlen an zweiter Stelle aufgeschrieben werden, so mag er wissen, dass diese Division erfolgt, indem man durch die vergrössert darunter gesetzte Zahl theilt." 404 f.)

Die Schwierigkeit dieser Stelle, welche im Deutschen kaum

verständlicher klingt, als im lateinischen Originaltexte, zwingt mich, die Uebersetzung hier zu unterbrechen, und die erforderlichen Erklärungen einzuschalten. Die Nothwendigkeit, von aussen herein Klarheit in diese dunkeln Regeln zu bringen, hat Chasles bereits damals gefühlt, als er in seiner Geschichte der Geometrie zum ersten Male auf die uns hier beschäftigende Abhandlung aufmerksam machte.[417]) Aber eben dieser unermüdliche Forscher hat uns auch seit 1843 die Mittel an die Hand gegeben, zur Verständniss zu gelangen,[418]) und wenn diese sogar unter Leuten, die sich mit dem Gegenstand beschäftigt haben, noch immer nicht allgemein verbreitet sind, so trägt wohl der Umstand einen Theil der Schuld, dass Chasles seiner Interpretation nicht die Abhandlung des Boethius zu Grunde legte, sondern eine ziemlich spät verfasste, aber weit ausführlichere Schrift über den Abacus. Es blieb also immer noch die jetzt freilich leichtere Aufgabe, dieselbe Interpretation auch auf das Kapitel des Boethius zu übertragen, und diese Aufgabe wird hier zum erstenmale gelöst. Die Methode der Division, welche Boethius mit einem Lakonismus auseinandersetzt, der an's Lückenhafte streift, und an welchem, wie ich wohl fühle, meine versuchte Verdeutschung gestrandet ist, diese Methode ist von der noch jetzt gebräuchlichen wesentlich verschieden, ja ist sogar mit sehr geringen Ausnahmen als seit annähernd 600 Jahren verloren gegangen zu betrachten. Es ist eine Division mit Hülfe von Ergänzungen, welche bei Boethius Differenzen heissen, und welche eine Rechnungsweise gestatten ähnlich der, welche die moderne Arithmetik das Rechnen mit dem decadischen Complement zu nennen pflegt.

In den Fällen der ersten Regel, wo irgend eine einfache Zahl durch eine einfache Zahl gleicher Ordnung zu dividiren ist, tritt zwar die Differenzmethode noch nicht auf. Bei solchen Aufgaben wie z. B. 900 : 300, 50 : 10, 8 : 4 genügt die einfache Subtraction. Dagegen erscheint das Bedürfniss, mit Differenzen zu rechnen, so oft der Divisor eine zusammengesetzte Zahl ist, mag nun der Dividend von gleicher oder von höherer Ordnung sein. Einige Beispiele sollen mir dienen, dieses Verfahren zu erläutern. Soll etwa 64 durch 16 dividirt werden, so sagt man: die nächste einfache Zahl zu 16 ist der folgende Zehner nämlich 20, grade so wie etwa zum Divisor 24 der folgende Zehner 30 u. s. w. gehören würde, je nach dem absoluten Werthe der Ziffer, welche die Zehnerstelle ausfüllt.

Mit diesem an die Stelle von 16 tretenden 20 dividirt man nun, und sagt 20 in 64 geht 3 mal, wobei 4 zum Rest bleibt. Dieser Quotient 3 ist unzweifelhaft richtig, und darin besteht der grosse wissenschaftliche Vorzug dieser Methode vor der gewöhnlichen, bei welcher mitunter ein zu grosser Quotient versuchsweise angenommen werden kann. Freilich ist der Quotient 3 nicht der ganze Quotient, und somit ist jetzt weiter zu verfahren und die Differenz 4 in Anwendung zu bringen, um welche 20 grösser ist als 16. Da dieselbe so oftmals zu viel abgezogen wurde, als der gefundene Quotient 3 angiebt, so muss sie jetzt eben so oft dem schon vorhandenen Reste 4 zugefügt werden; d. h. der Rest wird 4 und noch dazu 3 mal 4 oder 12, und in diesem corrigirten Reste 16 ist der Divisor 16 genau einmal enthalten. Der vollständige Quotient ist also 3 und 1 oder 4. Dasselbe Princip ist massgebend, wenn der Dividend höherer Ordnung ist als der Divisor. Der einzige Unterschied besteht darin, dass man jetzt den Divisor, welcher bei der Division unter dem Dividenden steht, denn das erfordert ja die nöthige Subtraction, etwas weiter rückt, oder dass man, wenn alsdann die Division nicht ginge, den Dividenden so verändert auffasst, dass eine seiner Stellen zum Artikel wird. Ich meine so. Wenn mit 16 in 672 dividirt werden soll, so verwandelt man 16 in 20, setzt die 2 unter die 6 von 672 und dividirt in dieser Stellung. Der Quotient ist 3 d. h. 30 und der Rest ist 72. Dazu kommt die Correctur 30 mal 4 oder 120 und verwandelt den Rest in 192. Nun sollte die 2 des vergrösserten Divisors unter die 1 von 192 gesetzt werden. Dabei wird die Division unmöglich. Also setzt man diese 2 unter die 9 von 192 und betrachtet dessen 1 als Artikel, d. h. man dividirt mit 2 in 19, welches 9 mal geht. Der Rest ist 12, die Correctur 9 mal 4 oder 36, der wirkliche Rest also 48. Jetzt kann die 2 unter 4 gesetzt werden. Der Quotient 2 erscheint nebst dem Reste 8 oder vielmehr dem wirklichen Rest 16, nachdem die Correctur von 2 mal 4 oder 8 in Rechnung gebracht wurde. Endlich 16 in 16 geht 1 mal; der Gesammtquotient ist also 30, 9, 2 und 1 zusammengenommen oder 42. Ich hoffe, dass diese Beispiele bei meinen Lesern denselben Zweck erfüllt haben, welchen auch Boethius schon bei seinen Lesern durch Uebung erreicht wissen wollte, dass nämlich die Dunkelheit, in welche er unabsichtlich seine Regeln hüllte, verschwunden und Klarheit an deren Stelle getreten ist. Dann wird aber auch das Bewusstsein von

der Richtigkeit meines vorherigen Ausspruches eintreten, dass nämlich diese Divisionsmethode, wenn sie auch schwieriger ist als die moderne und den Schüler manchen Schweisstropfen gekostet haben mag, wie es bei einem Schriftsteller des 12. Jahrhunderts heisst,[419]) dennoch weit über unserer Methode stand, indem sie den Quotienten zwar nur in Theilen, und das nicht in decimal verschiedenen Theilen, liefert, aber stets ohne Tasten, und so dass zuletzt der ganze richtige Quotient erscheinen muss. Wir werden diese Methode mit Chasles bis in das 13. Jahrhundert etwa verfolgen können. Von da an hört sie meines Wissens vollständig auf. Erst im gegenwärtigen Jahrhunderte hat Crelle in Verfolgung eines selbstständigen Gedankens darauf hingewiesen,[420]) es sei eleganter und bequemer mit Hülfe der decadischen Ergänzung zu dividiren, eine Methode, welche mit der alten zwar nicht vollständig übereinstimmt, aber doch einige Aehnlichkeit mit ihr besitzt. Es ist hier nicht der Ort, näher darauf einzugehen; nur so viel muss ich bemerken, dass man unter der decadischen Ergänzung oder dem decadischen Complemente die Differenz versteht, welche von einer Zahl bis zur Einheit nächst höherer Ordnung existirt. So entsteht also die decadische Ergänzung von 16, indem man diese Zahl von 100 abzieht, sie ist 84, während die Differenz im Sinne des Boethius nur 4 war; und jene 84 spielen bei Crelle eine ähnliche Rolle, wie im Obigen die 4.

Eine Bemerkung kann ich hier nicht unterdrücken, an welche sich eine interessante Frage knüpft. Wir haben gesehen, dass die Multiplication bei Boethius direct, die Division mit Hülfe der Differenz ausgeführt wird. Später dreht sich die Sache höchst merkwürdiger Weise um, so dass die Division direct, die Multiplication mit Hülfe der Differenz vollzogen wird. Ich habe bei anderer Gelegenheit auf diese eigenthümliche, im 16. Jahrhundert existirende Methode aufmerksam gemacht,[421]) welche den Historikern bisher noch nicht aufgefallen war, wenigstens nicht in dem Grade, um sie einer Erwähnung werth zu halten. Die Methode findet ihre Anwendung zunächst bei der Multiplication von zwei Fingerzahlen, deren Summe grösser als 10 ist. Soll etwa 6 mit 8 multiplicirt werden, deren Summe 14 die genannte Bedingung erfüllt, so bildet man die beiderseitigen Differenzen in dem uns jetzt bekannten Sinne, also hier 4 als Differenz von 6 und 2 als Differenz von 8. Das Product dieser Differenzen bildet dann die Einer des wirklich

gesuchten Productes, dessen Zehner erhalten werden, indem man die Differenz des einen Factors von dem anderen Factor abzieht. Hier wären also 2 mal 4 oder 8 Einer und 6 weniger 2 oder 8 weniger 4 d. h. 4 Zehner vorhanden. In der That ist 48 das gesuchte Product, und die Richtigkeit dieses Verfahrens leuchtet auch augenblicklich ein, sobald man es an allgemeinen in algebraischen Zeichen geschriebenen Zahlen ausführt.[422]) Schon Peter Ramus, der diese Regel unter Anderen mittheilt, fühlt in seinem praktischen Sinne das Ueberflüssige derselben, fühlt, dass ein blosses Auswendiglernen der Einmaleinstabelle uns viel bequemer zum Ziele führe. Er macht sich daher mit Recht einigermassen lustig über die Schriftsteller, welche jenes Verfahren in 7 einzelnen Regeln mittheilen. Als Aeltesten derselben nennt er den Verfasser eines anonymen Buches des Algorithmus demonstratus, welcher vielleicht der Astronom Regiomontanus sei.[423]) Es käme also vor Allem auf eine nähere Beschreibung dieses Buches an, welche vielleicht in Aussicht steht. Ende des Jahres 1858 kündigte nämlich das Asher'sche Antiquariatsgeschäft in Berlin ein Exemplar des überaus seltenen Werkes an, welches 1534 in Nürnberg in Quart erschienen war. Bevor ich es jedoch mir aneignen konnte, war es schon in den Besitz des Herrn Professor Gerhardt in Eisleben übergegangen. Meine Bitte an denselben um nähere Auskunft über das Werk oder wenn möglich um leihweise Mittheilung blieb zwar ohne Erwiderung. Ich darf aber wohl voraussetzen, dass der jetzige Besitzer selbst sich vorbehält bei Bearbeitung der Geschichte der Mathematik in Deutschland, die ihm inzwischen übertragen worden ist, das Werk, dessen Wichtigkeit ich hervorhob, einer näheren Besprechung zu unterziehen. Ich möchte desshalb hier öffentlich vorher die Frage aufwerfen, ob etwa im Algorithmus demonstratus noch eine Spur der differenzweisen Division sich findet? und wenn nicht, wie mir sehr wahrscheinlich ist, ob überhaupt ein Werk in irgend einer Sprache existirt, welches die Anwendung der Differenzmethode bei Multiplication und Division gleichzeitig enthält? Es wäre denn doch ein zu merkwürdiger Zufall, wenn die Anwendung des bei der Division so wichtigen, bei der Multiplication so überflüssigen Principes beidemal unabhängig von einander entstanden und verschwunden wäre.

Boethius wendet die differenzweise Division noch in einigermassen modificirter Gestalt an, so dass die Differenz mehr mit dem modernen decadischen Complement übereinstimmt. E'

thut dieses, wenn der Divisor aus Hunderten und Einern ohne Zehner besteht. Die dafür aufgestellten Regeln schliessen sich an das Vorhergehende folgendermassen an:

„Ein mit einem Einer verbundener Hunderter theilt einen Hunderter oder Tausender in folgender Weise. Man nehme eine Einheit von den zu Dividirenden weg und mache das Uebrigbleibende dem Divisor gleich, bewahre aber worum es mehr ist für sich auf."

„Dann ist der Einer, oder wie Andere zu sagen pflegen die Kleinigkeit, mit dem zu multipliciren, was das Grössere völlig gleich gemacht hat, worauf unter die Einer die vollständige Differenz zu setzen ist, für die Zehner aber setze man die unvollständige vor. Und diese Differenzen und was etwa sonst noch nebenbei gestellt worden ist, zeigen den Rest der Division an."

„Dies zum Vorschmack in kurzer Einleitung. Ist es irgend wie dunkel gehalten, so müssen wir, damit das Uebergangene keine unangenehmen Folgen habe, dem fleissigen Leser die Einübung überlassen. Wir schliessen dieses Buch ab, und wenden uns zu den nützlicheren Kapiteln des Folgenden. Es beginnt also das 2. Buch der Geometrie."[404 g)]

Auch hier wird eine Erläuterung keineswegs überflüssig sein. Eine solche hat auch Friedlein in Bezug auf diese letzten Regeln versucht,[424)] und es zeugt für den Scharfsinn, den er dabei entwickelte, wenn ihm Einiges gelang, obwohl er das Ganze wegen der ihm mangelnden Kenntniss der Bedeutung des Wortes Differenz nicht verstand, und nicht verstehen konnte. Prüfen wir die Regel an dem von ihm benutzten Beispiele, so stellte sich das Verfahren so: Man soll 800 durch 206 dividiren. Zuerst nimmt man einen von den Hunderten, welche den Dividenden bilden, vorweg, so dass nur 700 bleiben. In diese 700 dividirt man mit 200 welches 3 mal geht und 100 zum Aufbewahren oder wie es später heisst zum nebenbei zu stellenden Reste gewährt. Jetzt kommt man zu den bisher vernachlässigten 6 Einern, die mit dem Quotienten 3 zu vervielfachen sind, welcher vorher in Bezug auf die grösseren Zahlen aufgetreten war, und so entsteht das Product 18, dessen Differenz, d. h. hier die Ergänzung zu dem ersten vorweg genommenen 100, zu bilden ist. Die Bildungsweise ist für die Einer die, dass man die ganze Differenz (10 weniger 8 also 2) hinsetzt. Für die Zehner muss man die Differenz vermindern. Also man schreibt

nicht 10 Zehner weniger 1 Zehner lassen 9 Zehner, sondern man vermindert diese noch zu 8 Zehnern. Diese beiden Differenzen, nämlich die 2 Einer und die 8 Zehner, zusammen mit dem schon nebenbei gestellten Reste 100 geben den ganzen Rest der Division 182.[425])

Soweit reicht also, was Boethius aus den Schriften des Archytas über das Verhältniss des Abacus entnommen hatte. Das zweite Buch der Geometrie enthält nun, wie schon früher besprochen wurde, wesentlich Feldmessendes [389]) in einer Auswahl, welche dem geometrischen Geiste eines Griechen wenig Ehre machen würde, bei einem Römer aber, der hier nur aus seinen vaterländischen Quellen schöpfen konnte, nicht in Erstaunen setzen darf, indem wir gleichfalls schon wissen, wie schlecht es um die Näherungsformeln der römischen Agrimensoren bestellt war. Nur einige Sätze dürften umgekehrt dadurch überraschen, dass sie interessant und richtig sind, und das sind grade die Sätze, für welche der Autor wieder auf Archytas als deren Urheber verweist. Dann heisst es mit Berufung auf denselben Schriftsteller: „Nachdem nun über die der Feldmesskunst angehörigen Betrachtungen kurz und bündig genug gesprochen ist, bleibt noch, dass wir unser Versprechen lösen und von der Uncial- und Digitalrechnung reden und von der der Punkte und Minuten und den anderen Bruchtheilen und auch die Figur angeben, welche so merkwürdig und für unsere Kunst wie für die anderen Theile der Mathematik nothwendig ist, dieselbe Figur, welche wir aus den Werken des Archytas kennen gelernt haben.“ Auch diese Sätze sind wieder nur eine Ankündigung ganz in der Art, wie die gegen Ende des ersten Buches, und so folgt auch hier wieder in offenbarem Parallelismus der Anordnung ein Kapitel mit der besonderen Ueberschrift: Ueber Minutien, was etwa so viel heisst, wie Bruchtheile, aber eine specielle Nebenbedeutung hat. Dieses Kapitel nimmt in E mit Einschluss einer darin vorkommenden Tabelle, der angekündigten Figur, fünf Blätter ein und lautet folgendermassen.[426])

„Die feinsten Kenner der Geometrie unter den Alten, insbesondere die Pythagoriker pflegten Alles nach bestimmten Grundsätzen des Maasses zu zertheilen, und wenn sie dabei soweit gekommen waren, dass eine wirkliche Theilung oder Zerlegung unmöglich geworden, so theilten sie wenigstens dem Gedanken nach dadurch, dass sie dem in der Natur Untheilbaren gewisse Zeichen und Namen beilegten. So zertheilten sie die Felder zunächst nach Ac-

tus,[427]) Ruthen oder was dasselbe ist Stablängen, Schritten, Graden, Ellen, Fussen, Halbfussen, Handbreiten. Da sie aber dann keinen Maassstab von der Länge einer Handbreite hatten, mittelst dessen sie solche Längen hätten messen können, welche kleiner als die Handbreite, grösser als der Finger waren, so liebten sie den Namen Unze zu gebrauchen. An zweiter Stelle führten sie also den Finger an, an dritter den Stater oder die Halbunze, an vierter den Quadrans, an V die Drachme, an VI den Skrupel, an VII den Obolus, an VIII den halben Obolus, welchen die Griechen Ceratis nennen, an VIIII die Siliqua, an X den Punkt, an XI die Minute, an XII den Moment. Diese Bruchtheile erfanden sie, und legten denselben Namen und mancherlei gestaltete Zeichen bei, die theils griechischen, theils fremdländischen Ursprunges wohl nicht bei unserer lateinischen Auseinandersetzung von Nöthen sind. Wir wollen desshalb einen an sich dunkeln Gegenstand nicht noch in dunkle und unbekannte Zeichen hüllen. Statt dieser Zeichen werden wir uns der lateinischen Buchstaben der Ordnung nach bedienen, so dass a der Unze entspricht, b dem Finger, c dem Stater, d dem Quadrans, e der Drachme, f dem Skrupel, g dem Obolus, h dem halben Obolus, i der Siliqua, k dem Punkte, l der Minute, m dem Momente. Mit diesen eben genannten Buchstaben beschreibe man nun an dieser Stelle die Tabelle der Bruchtheile in folgender Weise:“ Bis zu dieser Stelle sind in C, E und den Druckausgaben die Texte nahezu identisch. Auch die hier folgende Tabelle (**Figur 42**) scheint überall gleich auszusehen. Von da an tritt aber der bedeutende Unterschied ein, dass in den Druckausgaben nach der Figur unmittelbar das sogenannte dritte Buch der Geometrie folgt, welches, wie wir schon sahen, in den Handschriften fehlt und sicherlich unecht ist, während in E und wahrscheinlich wörtlich damit übereinstimmend auch in C[428]) noch einiges Andere sich anschliesst, dessen Uebersetzung ich beifüge. „Bei der Bildung der oben beschriebenen Tabelle bedienten sie sich, wie gesagt, allerlei verschieden geformter Charaktere. Wir tragen indessen keinerlei Sorge dafür, noch andere Zeichen zu einem derartigen Gebrauche in Aufnahme zu bringen, als die wir schon oben bei der Zeichnung des Abacus dargestellt haben. Die erste Linie unserer Tabelle haben wir den Einern zuertheilt, die zweite den X, die dritte C, die vierte $\overline{\text{I}}$, und so haben wir auch die übrigen Linien mit den folgenden Grenzzahlen in Verbindung gebracht. Setzt man nun Apices auf die erste

Linie, so treten sie nur als Einer auf, auf der zweiten Linie als X, auf der dritten als C, auf der vierten als Tausend u. s. w. Weil aber die Momente, Minuten und andere Grössen der Felder, welche am Ende der Tabelle stehen, nicht so wie die übrigen multiplicirt werden können, so habe ich vorgeschlagen von der zweiten Linie an die Zeichen nochmals in Winkelgestalt hinzuschreiben, so dass wenn einer wünscht, eine Verminderung von C oder $\overline{I}$ oder $\overline{X}$ oder $\overline{C}$ Momenten oder Minuten oder Punkten u. s. w. vorzunehmen, man dieses ohne Hinderniss angeben könne. Auch Folgendes ist bei der Theilung dieser Brüche nicht zu übersehen. Man theilte die Unze in XXIIII Skrupeln, den Finger in XVIII Skrupeln, den Stater in XII, den Quadrans in VI, die Drachme in III Skrupeln. Den Skrupel liess man aus VI Siliquen bestehen. Der Obolus wurde durch drei Siliquen gemessen, der Ceratis hatte anderthalb Siliquen. Sonach sollte die Siliqua den vierundzwanzigsten Theil des Ganzen, den sechsten Theil des Quadrans bezeichnen. In dem Punkte nahm man zwei und eine halbe Minute an, in der Minute vier Momente.

Schluss.

Anfang des Epilogs.

„Will sich Einer über Controversen und Arten und Namen der Felder sowie über Begrenzungen und den Zustand der Controversen belehren, so lese er den Julius Frontinus und den Urbicus Aggenus. Wir glauben mit dem bis hierher Besprochenen genug gesagt zu haben.“

Soweit die Handschrift E, indem ich wohl berechtigt bin einige noch folgende Blätter von offenbar später Hand über Kalender und dergleichen ganz ausser Berücksichtigung zu lassen. Die Vergleichung des lateinischen Textes, der in meinen Anmerkungen zuerst vollständig gedruckt erscheint, wird auch ohne dass ich besonders darauf verweise den Leser überzeugen, dass ich fast durchgängig wörtlich übersetzte und nur an sehr seltenen Stellen mir kleine Veränderungen erlaubte, welche theils aus Vergleichung mit den Druckausgaben entstanden, soweit diese den Text enthielten, theils in dem allerletzten Abschnitte augenscheinlich durch den Sprachgebrauch geboten waren. Den Sinn dieses letzten Kapitels hingegen, ich gestehe dieses offen ein, kann ich mir nicht vollständig deutlich machen, und ganz besonders über *den winkelförmig beigefügten Theil der Tabelle*, also über den Zusatz des Boethius bin ich durchaus im Unklaren. Nur um so mehr

glaubte ich jedoch den Abdruck mir gestatten zu dürfen, um Sachverständige auf die Stelle aufmerksam zu machen und sie in den Stand zu setzen, eine Prüfung derselben vorzunehmen, auch ohne das Manuscript E direct zu benutzen. Eine solche weitere Prüfung ist um so nothwendiger, als grade die beiden in diesem und dem vorigen Kapitel übersetzten Abschnitte, wie leicht einzusehen, historisch von der grössten Wichtigkeit sind, und eigentlich erst die Frage in Anregung brachten, ob die Geometrie des Boethius wirklich das sei, als was sie benannt ist. Ich habe diese Frage bejaht, bevor ich diese beiden Kapitel vornahm, und zwar in der Absicht einen noch unbefangenen Leser bei der Prüfung der Frage vor mir zu haben. Ich darf nun freilich nicht verschweigen, dass man grade auf die arithmetischen Abschnitte sich zu stützen pflegt, wenn man die Echtheit der Boethischen Geometrie anzweifeln will; und zwar desshalb weil der Inhalt dieser Abschnitte den gewöhnlichen Ansichten über Zahlzeichen, Positionsarithmetik u. s. w. einigermassen widerspricht, und desshalb für unmöglich gelten muss. Die Gegner meiner Ansicht gehen theils consequent, theils inconsequent zu Wege. Mit den Einwürfen der Ersteren, als deren Repräsentanten ich Böckh nenne, will ich nachher mich beschäftigen. Sie leugnen die ganze Geometrie des Boethius. Die Zweiten behaupten, nur die beiden Abschnitte von dem Abacus und den Minutien seien unecht, während das übrige Werk allerdings eine Geometrie des Boethius sein möge. Mit Diesen ist leicht fertig zu werden. In der That kann von einer Interpolation der sogenannten arithmetischen Abschnitte keine Rede sein. Beide werden vorher angekündigt, im ersten ist eine Anknüpfung an den weiteren Text der Geometrie vorhanden; also ist damit ein Zusammenhang nach vorwärts und rückwärts gewahrt, wie er nur bei Theilen eines Ganzen möglich ist; und der Verfasser der übrigen Geometrie muss sich auch zu der Vaterschaft dieser beiden Abschnitte bekennen, muss ein solcher sein, welcher eine Arithmetik und eine Musik geschrieben zu haben erklärt, ähnlich den gleichnamigen Schriften des Boethius. Er muss ferner jene Abschnitte grade für den Ort seiner Schrift bestimmt haben, an welchem sie sich noch finden. Ich komme darauf noch näher zurück.

Bevor ich die Widerlegung derer unternehme, welche aus dem erwähnten Grunde die ganze Geometrie des Boethius anzwei-

feln, will ich noch einige Folgerungen ziehen, welche das Kapitel der Minutien zulässt, auch ohne dass man es vollständig versteht. In diesem offenbar einem Abschnitte des Werkes des Archytas entnommenen Schlusskapitel [429]) sagt der Verfasser ausdrücklich, er wolle die Zeichen, welche die Alten (also wohl Archytas selbst) für die Bruchtheile der Unze angewandt haben, und welche sehr eigenthümlicher Art seien und fremd aussehen, hier nicht benutzen; ihm sei es genug, die Zeichen aufgenommen zu haben, welche vorher angegeben wurden, als der Abacus abgezeichnet wurde, jene anderen wolle er bei derartigem Gebrauche d. h. also bei rechnender Anwendung durch nicht so dunkle und unbekannte Zeichen, nämlich durch lateinische Buchstaben ersetzen. Es ist unbegreiflich, dass man auf die Wichtigkeit dieser Sätze zur Zeitbestimmung der Abfassung derselben noch keine Rücksicht genommen hat, und ich selbst muss mich in dieser Beziehung ebenso anklagen wie alle Anderen, welche mit dem Gegenstande sich beschäftigt haben. Aus dem Wortlaute geht nämlich unzweideutig hervor, dass als die Geometrie geschrieben ward, sowohl die Zeichen für die Apices, als auch Zeichen sonderbaren Aussehens für Bruchtheile von Unzen zwar von Archytas schon angewandt, aber noch nicht in's grosse Publikum übergegangen waren. Der Verfasser der Geometrie sah ein, zum Rechnen haben solche einfache Zeichen für die Zahlen 1 bis 9 einen besonderen Werth und verdienen eingeführt zu werden; die anderen Zeichen hingegen waren ihm in ihrer noch etwas grösseren Anzahl vollends unverständlich, und desshalb wollte er nicht zu viel der Neuerung auf einmal und ersetzte sie durch Zeichen, die freilich vor ihm von gar Niemand zu diesem Zwecke angewandt worden waren, und somit auch eine Neuerung bildeten, die aber doch, wie er glaubte, leichteren Eingang finden konnten, weil sie die Buchstaben des lateinischen Alphabetes waren. Aus diesen ausgesprochenen Beweggründen des Verfassers der Geometrie können wir daher schliessen, dass er sein Werk schrieb, bevor gewisse eigenthümliche Zeichen für die Uncialbrüche allgemeiner in der wissenschaftlichen Welt bekannt waren.

Und nun finden sich in der That fremd und absonderlich aussehende Zeichen solcher Minutien, wie die Uncialbrüche genannt werden, bei Beda Venerabilis, dem gelehrten englischen Mönche aus dem Ende des 7ten, Anfang des 8ten Jahrhunderts, wo sie, wie wir noch sehen werden, erklärt werden, also wohl für

Laien verhältnissmässig neu sein mochten, aber im Uebrigen, das geht aus Beda's Worten hervor, sehr allgemein verbreitet waren; ja jedenfalls mussten sie schon einer gewissen Verbreitung geniessen, um nur bis nach England zu kommen. Dieselben Zeichen benutzt, wie wir gleichfalls noch sehen werden, Gerbert in seiner Geometrie am Ende des 10ten Jahrhunderts als altbekannt, ohne sie nur zu definiren. Dieselben Zeichen fand ich in einer Handschrift des 10ten Jahrhunderts in Verbindung mit einer dem Abacus ähnlichen Tabelle.[430]) Wenn nun diese Zeichen dieselben sind, welche in der Geometrie erwähnt werden, und ich sehe um so weniger Grund daran zu zweifeln, als Halliwell sie zugleich mit den in der Geometrie vorkommenden Zahlzeichen in einem Manuscripte des 12ten Jahrhunderts entdeckt hat,[430a]) dann ist sicherlich deren Vorkommen bei Beda ein unumstösslicher Beweis dafür, dass die Geometrie ziemlich lange Zeit vor dem 8ten Jahrhundert geschrieben ist, und so rückt sie auch bei Offenlassung der Frage nach dem Autor der Lebenszeit des Boethius nahe.

Verwundern kann uns im ersten Momente der Umstand, dass die Zeichen der Längenmaasse die weite Verbreitung fanden, während die Zahlzeichen nur verhältnissmässig wenig bekannt wurden, wenn beide schon von Archytas beschrieben und nur die letzteren von Boethius aufgenommen wurden. Ich sehe zwei Möglichkeiten dafür. Entweder Archytas lebte kurz vor Boethius, und dann konnte das Eine weitere Verbreitung finden, das Andere nicht, wie auch die Ansicht des Boethius über die Zweckmässigkeit gewesen sein mag. Oder aber, und das scheint mir das Richtige, Archytas lebte mehrere Jahrhunderte vor Boethius. Seine Schrift war dem mathematischen Verständnisse seiner römischen Zeitgenossen weit vorausgeeilt und desshalb fast unbekannt geblieben. Da entriss ihn Boethius der Vergessenheit, und von dem Augenblicke an, dass dieser ihm das Prädicat eines ganz und gar nicht üblen Schriftstellers beilegte, war es bei dem geistigen Einflusse des Boethius erklärlich, dass man auch auf dieses Quellenwerk zurückkam. Jetzt entnahm man demselben die Zeichen für die Längenmaasse und nicht so allgemein die neun Zahlzeichen, weil jene in ihrer Anwendung kein Kopfbrechen und keinen Schweiss verursachten, sofern man die kleine Tafel des Archytas nicht zugleich anwandte. Die Ziffern hingegen fanden ihre nützlichste Anwendung bei Rechnungen, die für die damalige Zeit voller Schwierigkeit wa-

ren, und desshalb kamen sie weniger herum. Mit anderen Worten noch: jene Maasszeichen waren zur Schrift geeignet, sie konnten einer Stenographie von Nutzen sein, und desshalb lernte Mancher sie kennen, der sicherlich vom Rechnen wenig verstand; mit den Ziffern dagegen konnte man nur rechnen, nicht schreiben, so lange die Null nicht erfunden war, so lange also auch kein Stellenwerth der vom Abacus losgelösten Ziffern vorhanden war, und desshalb blieben die Zahlzeichen des Archytas denselben Leuten unbekannt, die seiner anderen Abkürzungen sich bedienten.

Die kleine Tabelle des Archytas und Boethius, wie ich sie nach ihrem Erfinder und ihrem Verbesserer nennen will, lehrt uns aber noch Etwas, wenn wir gleich ihren Gebrauch nicht vollständig verstehen. Da nämlich auch wieder ausdrücklich gesagt ist, dass mit ihr in Verbindung die Apices gebraucht werden, welche man bald auf die erste, bald auf die zweite Linie u. s. w. legt, damit sie eine andere Bedeutung erhalten, so geht daraus hervor, dass diese Apices kleine bezeichnete Marken waren, wie ich es schon im vorigen Kapitel behauptete, Kegelchen etwa wie diejenigen, die heutigen Tages beim Zahlenlotto mit den Nummern 1 bis 90 beschrieben sind. Zu dieser Annahme sind wir jetzt gezwungen, weil das schon übermässig vollgeschriebene Blättchen keine weiteren schriftlichen Zusätze mehr duldete, sondern nur ein mechanisches Darauflegen, und der Zweck der kleinen Tabelle lässt sich dann im Allgemeinen so characterisiren: Sie diente zum Rechnen mit benannten Zahlen.

Nachdem ich die Untersuchung bis hierher geführt, will ich jetzt die Einwürfe betrachten, welche allerdings von dem gefährlichsten Gegner gegen die Autorschaft des Boethius gemacht werden, von einem Manne, dessen Bedeutung in den Sprachwissenschaften jeder von ihm auch nur nebenbei ausgesprochenen Meinung das Gewicht von Gründen beilegt, dessen Ansehen aber glücklicherweise wegen seiner Höhe nicht beeinträchtigt wird, wenn man auch zeigt, dass eine seiner Annahmen unrichtig war. Böckh hat sich in der schon mehrfach angeführten Beilage zum Sommerkataloge 1841 der berliner Universität über die Geometrie des Boethius, wie ich überzeugt bin, in irriger Weise ausgesprochen.[431]) Es sei mir gestattet, die ganze Stelle hier einzuschalten, damit der Leser sich ein unpartheiisches Urtheil über die Meinung Böckh's bilden könne.

„Ueber den Abacus liest man in einem Anhange zu dem Buche des Boethius folgende etwas dunklen Worte: Die Pythagoriker haben sich folgende merkwürdige Gestalt. Wir können kaum zugeben, dass diese Worte von Boethius herstammen, da eine Untersuchung über den Abacus überhaupt nur schlecht mit dem ersten Buche des Boethius zusammenhängt, und sie zudem in Schauder erregendem Style geschrieben ist: dennoch ist unzweifelhaft der Theil des Anhanges, welcher mit Auseinandersetzung des Abacus sich beschäftigt, aus alter und zwar aus griechischer Quelle geschöpft, mag ihn nun der Compilator für seine Zwecke aus irgend einem Buche des Boethius entnommen haben oder aus einem lateinischen in griechischer Literatur bewanderten Schriftsteller. Denn als Eingang zur Untersuchung sagt er: Es ist jetzt an der Zeit zur Erörterung der geometrischen Tafel überzugehen, welche von Archytas, einem gewiss nicht zu verachtenden Schriftsteller, dem römischen Gebrauche angepasst wurde. Nach den Lehren desselben Autors gesteht er auch zu, mit der Tabelle der Brüche bekannt geworden zu sein, welche dem zweiten Buche der dem Boethius zugeschriebenen Geometrie eingefügt ist. Der Abacus stammt daher aus dem sogenannten Buche des Archytas. Wir geben zu, dass dieses untergeschoben ist, wie alles Uebrige dem Archytas Zugeschriebene, mit Ausnahme etwa der von Vitruvius angeführten Mechanik, wiewohl diese, so viel man aus dem Diogenes Laertius entnehmen kann,[432]) einem gewissen Architekten Archytas, nicht dem Pythagoriker zugeschrieben wurde. Jedenfalls aber sind die unter dem Autornamen Archytas cursirenden Schriften nicht jünger als das erste Jahrhundert n. Ch. G. Ferner ist es nicht wahrscheinlich, dass der Abacus von jenem Pseudo-Archytas erfunden ist; er wird wohl schon länger bekannt gewesen und, wie der Verfasser des Anhanges sagt, zur allgemeinen Kenntniss gekommen sein. Dann erst wurde er in die unechte Schrift des Archytas aufgenommen, weil man seine Erfindung allgemein dem Pythagoras oder doch den Pythagorikern beilegte. Es steht daher der Annahme Nichts im Wege, dass der sogenannte pythagorische Abacus zu Plato's Zeiten in Griechenland bekannt war und auch gewöhnlich beim Rechnen diente, zumal er durch Nachahmung jenes instrumentalen Abacus oder des durch die Hand dargestellten[433]) entstanden scheint, dessen sich Ungebildete bei vielen Völkern bedienen. Ob aber in diesem Buche des Archytas indische Zahlzeichen

vorkamen, scheint überaus zweifelhaft. Denn was über diese Charaktere in dem Anhange des boethianischen Buches zu lesen ist, kann von dem Schreiber des Anhanges hinzugefügt sein, wenn auch die Beschreibung des Abacus aus älterer Quelle entnommen ist. Vielleicht wird dieses dadurch wahrscheinlich, dass derselbe Verfasser bei Bildung der Bruchtabelle ausspricht, die Alten hätten sich verchiedenartiger Charaktere bedient, er aber wolle keine anderen gebrauchen, als die er schon bei der Einrichtung des Abacus anwandte. Es kommt hinzu, dass aus den Handschriften sich ergiebt, dass Boethius selbst niemals indische Zahlzeichen anwandte. Andrerseits tritt jene Auseinandersetzung des Abacus in mehreren Manuscripten des Boethius aus dem 11. Jahrhunderte auf, ist also kaum jünger als die im 10. Jahrhunderte verfassten Schriften des Gerbert, und so wird es um so ungewisser, ob Gerbert seine Kenntniss unserer Zahlzeichen.... von den Arabern entnahm."

Böckh spricht sich darnach nicht mit Bestimmtheit dahin aus, dass die ganze Geometrie des Boethius unecht sei, aber er giebt es doch zu verstehen, wenn er meint, jedenfalls müsse man einen Compilator annehmen, der also das Ganze zusammenstellte. Durch diesen sei alsdann die Interpolation der beiden für uns wichtigen Kapitel erfolgt. Ich habe schon mehrfach gezeigt, dass alsdann dieser Compilator zugleich auch Fälscher war, indem er vollständig unter dem Namen des Boethius schrieb, indem er dessen Arithmetik und Musik ebenso als die seinigen citirte, wie er in der Ueberschrift den Namen Boethius sich beilegte. Aber mag auch, was ich selbst nie und nimmermehr glaube, ein solcher Compilator existirt haben, der aus Gedankenlosigkeit solche Sätze wörtlich abschrieb, nun dann ist doch anzunehmen, dass er Alles abschrieb, was er überhaupt geschrieben hat, dass also, wie Böckh zugiebt, vielleicht irgend ein Buch des Boethius ihm vorlag oder ein älteres griechisches Buch, und dann ist mein Process ebenso gewonnen, wie wenn kein Compilator existirte, da es mir am Ende doch nur darauf ankommt den indirect griechischen Ursprung der betreffenden Abschnitte zu erweisen.

Der von Böckh gegebenen Gründe für das Alterthum des Abacus bedarf ich nicht weiter. Wer meinem Buche soweit Aufmerksamkeit schenkte, ist ohnedies hinreichend davon überzeugt. Aber ich muss gegen die Auffassung kämpfen, welche den Abacus für echt hält, und zugleich ausspricht, die Zeichen, welche in dem

Texte unserer Manuscripte vorkommen, könnten dem Boethius unmöglich bekannt gewesen sein. Für's Erste muss diese Verwahrung genügen; ich widme das ganze folgende Kapitel diesen Zeichen und ihren Namen.

Böckh sagt dann, jene Kapitel seien schauderhaft schlecht stylisirt. Ich kann darüber nicht mit ihm streiten. Aber das ist doch Sache des Schriftstellers, mochte er Archytas heissen oder nicht, den Boethius hier benutzte. Zudem möchte ich noch gegen den Onkel den Neffen in's Gefecht führen, welcher in dem gleichfalls schon erwähnten Lycealprogramme über Archytas von Tarent es für eine missliche Sache hält, aus der Schreibart allein auf Identität oder Verschiedenheit des Verfassers schliessen zu wollen, da sie natürlich je nach dem Gegenstande, welcher grade behandelt wird, modificirt werden muss oder kann.

Was Böckh über die Bruchtabelle sagt, beruht wohl auf dem Missverständnisse, als wären unter den beim Abacus angewandten Zeichen, von denen die Rede ist, jene römischen Ziffern I, X, C u.s.w. gemeint, die auf dem Blättchen neben den Buchstaben stehen. Ich habe aber schon oben gezeigt, dass im Gegentheil grade diese Stelle am deutlichsten für mich spricht und beweist, dass Archytas sich kleiner Kegelchen bediente, auf denen jene Zeichen abgebildet waren, welche Böckh indische nennt.

Ein weiterer Gegengrund Böckh's gegen die Authenticität jener Zeichen besteht darin, dass man den Handschriften gemäss wisse, dass Boethius in seinen übrigen Schriften nur römische Ziffern angewandt habe. Auch darin kann ich keine Widerlegung sehen. Denn, wie ich gleichfalls schon gezeigt habe, konnten die Zeichen, die ich pythagorische nenne, dem Boethius nur bei Rechnungen auf dem Abacus dienen, nicht bei schriftlicher Angabe von irgend welchen Zahlen über 9, weil die Null noch nicht existirte, und alle übrigen Schriften des Boethius mit Ausnahme der Geometrie haben mit dem Abacus Nichts zu thun.

Aber hat denn die Geometrie mit dem Abacus zu thun? Das ist der letzte von Böckh's Einwürfen, und er entscheidet sich dahin, dass Abhandlungen des angegebenen Inhaltes überall eher hingehören, als dahin wo sie stehen zwischen zwei Büchern geometrischen Inhaltes und am Ende eines solchen. Dieser Gegengrund ist nun vollends unhaltbar, wie Chasles und Martin gezeigt haben, und wie sogar Friedlein theilweise zugiebt, der im

Uebrigen Böckh's Meinung für die richtige hält.[434]) Die beiden Tafeln, deren Erste am Ende des ersten, die Zweite am Ende des zweiten Buches angegeben ist, hängen auf's Engste zusammen. Die Erste lehrt das Zahlenrechnen überhaupt ausüben, die Zweite übt es an benannten Zahlen aus, und zwar an Längenmaassen, welche ganz besonders den Feldmessern vorkamen, und somit eine geeignete Veranlassung zum Namen geometrische Tafel geben. Beide Tafeln stehen grade da, wo sie stehen müssen. Bis zu der ersten Tafel waren nur Sätze der theoretischen Geometrie vorgekommen, in denen nie gerechnet wurde. Jetzt will der Verfasser sich zur Ausmessung von Flächen wenden, er muss also Multiplicationen ausführen lassen, mitunter auch Divisionen, wenigstens Halbirungen, selbstverständlich auch Additionen und Subtractionen. Was naturgemässer als dass er grade hier die Lehre vom Zahlenrechnen einschiebt? Zwar thut er das nicht ausführlich, so wenig das ganze Buch auf Ausführlichkeit Anspruch macht; es ist eben nur ein Leitfaden, den der Verfasser beabsichtigte, der vielleicht später noch weiter von ihm bearbeitet werden sollte, wenn sein Lebensfaden nicht so plötzlich abgeschnitten worden wäre. Ueber die Stellung der zweiten Tabelle finde ich nirgends eine rechtfertigende Andeutung. Ich erlaube mir desshalb hier mit einer neuen Hypothese aufzutreten, die mir eine grosse Wahrscheinlichkeit hat. Es ist keine Frage, dass die zweite Tabelle sich unmittelbar an die erste hätte anschliessen können. Aber nothwendig war es nur, wenn im zweiten Buche der Geometrie sich irgend Bruchrechnungen vorfanden. Und dergleichen kommen in dessen ganzem Verlaufe nicht vor. Dann war aber auch am Schlusse des zweiten Buches die Bruchtabelle nicht nothwendig, wenn damit das ganze Werk abgeschlossen war, wenn nicht noch Etwas nachkam, wo sie benutzt werden musste. Ist diese Folgerung richtig, dann kann aber auch nicht der geringste Zweifel darüber herrschen, was noch nachkam. Offenbar das, von dem wir anderweit wissen, dass es um das Jahr 1000 vorhanden war, das aber spurlos verloren ging: die Astronomie. Wir haben gesehen, dass die Astronomie des Boethius nach der des Ptolemäus bearbeitet war. Diese kennen wir, und sie enthält auf jeder Seite Bruchrechnungen. Es war unmöglich sie zu verstehen, wenn man nicht mit Brüchen zu operiren wusste. Ferner, wo konnte die Astronomie sich der ganzen Gewohnheit mathematischer Schriftsteller nach sonst anrei-

hen als grade an die Geometrie? Und endlich wird so ein Ausdruck eines einige Jahrhunderte später lebenden Schriftstellers mit einem Beispiele belegt, wenn er sagt,[425]) der Nutzen des Abacus sei doppelter Natur gewesen, er sei die Einleitung zur Astronomie, und das hauptsächliche Instrument der Geometrie gewesen.

Nachdem ich nun die verschiedenen Einwürfe zurückgewiesen habe, die gegen die Ansicht gemacht wurden, welcher ich zustimme, will ich schiesslich selbst noch einen Zweifel erheben. Meine Voraussetzung im Obigen geht dahin, dass Boethius es nicht liebt, Dinge im Voraus anzugeben lange ehe er Gebrauch davon macht, dass seine Werke darin also einen mehr didaktisch gerechtfertigten, als streng wissenschaftlichen Charakter tragen. Dieser Annahme scheint ein Widerspruch entgegen zu treten. Wenige Seiten bevor im ersten Buche der Geometrie die Lehre vom Abacus angekündigt ist, beruft sich der Verfasser auf seine Arithmetik und sagt, es sei gut, wenn man dieselbe studirt habe, bevor man das Nachfolgende durchlese. Wenn nun, kann man sagen, Boethius doch nicht durchweg vermeidet, sich auf weit Vorhergehendes zu beziehen, warum lehrte er alsdann die Verhältnisse des Abacus nicht in der Arithmetik? Ich dürfte darauf nur erwidern, weil er ihn dort noch nicht brauchte. Jene Theile der Arithmetik, auf die er sich in der Geometrie beruft, fanden früher schon ihre Anwendung, und er citirt sie um nicht ein aus anderen Gründen schon Vorhandenes überflüssiger Weise zu wiederholen. Ich gehe aber weiter. Ich sage: in der Arithmetik konnte die Lehre vom Abacus nicht vorkommen. Wissen wir doch, dass bei den Griechen die Arithmetik sich in strengster Weise von der sogenannten Logistik unterschied. Diese behandelte das eigentliche Rechnen, jene und zumal das Mutterwerk des Nicomachus darüber behandelte die Zahlentheorie, wie wir schon früher sahen. Boethius schloss sich aber in seiner Arithmetik eng an Nicomachus an. Dort konnte und musste daher auch die Lehre von den Proportionen vorkommen, welche zum Theil im ersten Buche der Geometrie vorausgesetzt ist. Dort stand auch das Einmaleins, welches zeigt, wie eine Zahl als aus Factoren gebildet zu betrachten ist. Dort konnte aber der Abacus nicht stehen, der zum praktischen Rechnen diente.

Und somit wiederhole ich nochmals den schon einigemal aus-

gesprochenen Satz: Die Geometrie des Boethius, wie sie in der Handschrift E enthalten ist, gehört vollständig diesem Verfasser an. Er kannte die im Texte vorkommenden Zahlzeichen und entnahm sie dem Archytas, welchem er auch darin folgt, dass er dieselben pythagorische Zeichen nennt. Wir müssen nun zur Erörterung der Frage schreiten, ob dieser Name sich rechtfertigen lässt, und damit müssen wir eine Untersuchung über den Sinn und die Herkunft gewisser Wörter verbinden, welche auf der ersten Tabelle des Boethius in den Handschriften E und C sich finden.

XVI. Pythagorische Zeichen.

Ich habe mir bisher noch aufgespart die erste in der Geometrie des Boethius enthaltene Tabelle näher zu beschreiben, wie sie in E und anderen Handschriften sich befindet. Ich habe zwar schon gesagt, dass diese Tabelle im Wesentlichen ein Rechenbrett darstellt, dass sie aus 12 Kolumnen besteht, und dass jede dieser Kolumnen mit einer Kopfzahl überschrieben ist, welche die Rangordnung dieser Kolumne angiebt. Allein ich habe auch hinzugesetzt, dass noch Einiges mehr auf der Tabelle stehe. Dieses muss jetzt erläutert werden, wobei ich aber eine Bemerkung vorausschicke.

Das erlanger Manuscript und ebenso das von Chartres sind etwa um 1050 geschrieben, also jedenfalls Copien von älteren Handschriften des Boethius, die uns verloren gegangen sind, oder im ungünstigsten Falle Auszüge aus solchen. Ich habe schon besprochen, dass dabei Alles im fortlaufenden Texte vorkommende sicherlich echt ist, und dass ebenso die beiden Tabellen, welche dazwischen eingeschoben sind, dem hauptsächlichen Charakter nach mit dem Originale übereinstimmen müssen. Trotzdem ist es bei diesen Tabellen wohl möglich, dass in Bezug auf sie das eintrat, was ich für den eigentlichen Text leugnete, dass I n t e r p o l a t i o n e n vorkamen. Dadurch trete ich keineswegs in Widerspruch zu meinen bisherigen Behauptungen. Denn das liegt auf der Hand, dass ein ungeheurer Unterschied dazwischen ist, ob man einen fortlaufenden Text, der für sich einen vollständigen Sinn gewähren muss, so entstanden denkt, dass man in einen anderen ebenso fortlaufenden Text Etwas einschob, oder ob man zugiebt, dass bei einer Tabelle, bei der stets leerer Platz vorhanden war, die also immer den Anblick eines Unfertigen, Ergänzungsfähigen darbot, später in bester Absicht noch Manches hinzugeschrieben wurde, was man für nothwendig

und nur irrthümlicher Weise vergessen hielt. Dass aber dieses grade hier geschah, dafür sprechen mannichfache Beweisgründe.

Ein Zeugniss dürfte schon darin zu finden sein, dass die beiden Handschriften E und C, welche vorzüglich als Quelle dienen, während ihr Text in den betreffenden Capiteln, so viel ich aus der Uebersetzung von C, so weit sie gedruckt ist, entnehme, wörtlich übereinstimmt, grade in der Zeichnung des Abacus ziemlich verschieden sind. Ich lege dieser Vergleichung die Beschreibung des Abacus in C zu Grunde, wie sie in der deutschen Uebersetzung von Chasles' Geschichte der Geometrie enthalten ist.[436]) Dieser Abacus besteht gleich dem von Erlangen aus 12 Kolumnen.[437]) Uebereinstimmung herrscht auch darin, dass alle Kolumnen römisch geschriebene Kopfzahlen besitzen, deren niederste, die Eins, rechts steht, die anderen nach der Linken zu immer um das Zehnfache fortschreiten. Ueber diesen Kopfzahlen stehen in den ersten 10 Kolumnen von rechts nach links gezählt Zahlzeichen für 1 bis 9 und noch ein zehntes Zeichen. Hier fängt die Verschiedenheit bereits an. Im Texte von E und C waren die Zahlzeichen nahezu identisch (**Figur 40 u. 41**); auch die Zahlzeichen auf dem Abacus in E stimmen sehr nahe damit überein (**Figur 39**); um so mehr weichen davon die Zahlzeichen ab, welche auf dem Abacus in C abgebildet sind (**Figur 43**). Gehen wir höher hinauf, so sind in E alle 12 Kolumnen je mit einem kleinen Kreisbogen abgeschlossen; in C fehlen dieselben, wenigstens giebt sie Chasles in seiner sehr genauen Beschreibung nicht an. Noch höher finden sich über den einzelnen Kolumnen wieder von rechts nach links gewisse Wörter, welche, um es gleich im Voraus zu sagen, als Namen der Ziffern aufzufassen sind, und welche wieder eine Verschiedenheit darbieten. Die 4 ersten Wörter, sowie das 7. und 8. heissen zwar genau übereinstimmend: igin, andras, ormis, arbas, zenis, temenias; aber das 5. und 6. heissen in E: quinas, calctis, in C: quimas, caltis; das 9. und 10. heissen in E: celentis, sipos, während in C diese beiden Namen gemeinsam über der 9. Kolumne stehen, und zwar der letztere über dem ersteren. Noch viel wesentlicher unterscheiden sich C und E abwärts von den römischen Kopfzahlen. In C stehen unter der die Kopfzahlen enthaltenden Zeile drei andere Zeilen, welche in römischen Ziffern andere Zahlen enthalten, welche die Hälfte, der vierte und achte Theil dieser ersten sind. In zwei anderen Zeilen endlich

stehen andere römische Charaktere, welche die Theile der Unze angeben und in einer folgenden sind die Zahlen 1, 2 . . . 12 in römischen Ziffern geschrieben, natürlicher Weise, wenn es auch bei Chasles nicht ausdrücklich angegeben ist, jede Zahl in einer der Kolumnen. Ganz anders verhält es sich bei E, wo das Bestreben zwar nicht zu verkennen ist in drei weiteren Zeilen ebenso wie in C die Hälfte, ein Viertel und ein Achtel der Kopfzahlen anzugeben, aber das Resultat ist missglückt, so dass z. B. die einzelnen Zeichen halbirt sind, wenn das Product derselben nur halbirt sein sollte und dergleichen mehr.

Ich kann also hier mit gutem Gewissen abschreiben, was anderwärts über den Abacus in E gesagt ist,[438]) dass sich hier ein Verfasser verräth, der wenig mathematische Kenntniss besass, der Passendes und Unpassendes zusammen in sein Buch eingetragen hat, dem aber sicherlich die römischen Ziffern viel geläufiger waren, als die seltsamen neuen, die er bei Andern kennen gelernt und desshalb oben auf seine Tafel hingeschrieben hat. Nur eine Veränderung sei mir bei diesen Sätzen gestattet, damit sie meine Ansicht deutlicher enthalten, dass ich nämlich für Verfasser Schreiber setzen darf. Der arme Mönch, welcher die Geometrie des Boethius ins Reine zu schreiben bekam, ohne vielleicht irgend gediegene Kenntnisse der Mathematik zu besitzen, der war es, welcher die einfachere Figur des Abacus aus dem Originale so veränderte, wie er glaubte verbesserte. Sein Wille war dabei so gut, wie der des trefflichen Ballhorn, als dieser auf der letzten Seite seiner Fibel das bis dahin übliche Bild eines an den Füssen gespornten Hahns in das eines ungespornten verwandelte, dem zur Seite er noch ein Paar Eier anbrachte. Nur war unser Mönch bescheidener als sein lübecker Nachfolger im 16. Jahrhundert, der es sich nicht nehmen liess, jenem Bilde das: „verbessert durch Johann Ballhorn“ beizusetzen. Für die Richtigkeit meiner Ansicht spricht auch noch ganz besonders, dass, wie gleichfalls ein Gegner sich ausspricht:[439]) „die Ausführung des Abacus in E nicht die Sorgfalt zeigt, mit der sonst das Manuscript geschrieben und auch die zweite Tabelle ausgeführt ist. Doch sind die Schriftzüge so ähnlich und auch an anderen Stellen finden sich nachlässiger gezeichnete Figuren in solcher Weise, dass dieselbe Hand, nur eilfertiger, zuvor Uebergangenes nachträglich eingetragen zu haben scheint.“ Die Handschrift C zeigt ähnliches Verbesserungsbestreben von einem wie es scheint besser Vor-

gebildeten. Der Schreiber von C wollte den Abacus so ergänzen, wie er zu seiner Lebenszeit den Arithmetikern diente. Denn dass hier Einiges jedenfalls nachgetragen ist, beweisen die letzten in E ganz fehlenden Zeilen, in welchen, so viel ich aus der Beschreibung von Chasles entnehmen kann, jene Minutien abgebildet sind, deren Zeichen, wie ich bewiesen habe, Boethius absichtlich vermeidet. Das kann also im Originalmanuscript nicht vorhanden gewesen sein.

Ich glaube also hiernach gezeigt zu haben, dass es uns nur darauf mit Bestimmtheit ankommen kann, die Möglichkeit zu erweisen, dass Boethius die neun Zeichen des Textes kennen konnte, da durchaus unklar ist, wie viel von dem Inhalte der Tabelle echt, wie viel nachträglicher Zusatz ist. Halten wir uns also zunächst an diese Zeichen, so müssen wir natürlich die Spur verfolgen, welche im Texte selbst angegeben ist, und welche ich schon benutzte um die Zeichen zu benennen, d. h. wir müssen auf die griechischen Pythagoriker zurückgehen.

Dass Boethius überhaupt Zeichen von den Pythagorikern entlehnte, ist eine Thatsache, welche wohl bedeutsam genug ist, um nicht wie von den bisherigen Schriftstellern über meinen Gegenstand mit Stillschweigen übergangen zu werden. Ich meine nämlich die musikalischen Zeichen der einzelnen Tonarten, welche in dem 3. Kapitel des 4. Buches der Musik erläutert sind, und von denen geradezu gesagt ist, sie seien von den alten Musikern erfunden worden, damit die Nothwendigkeit nicht immer vorliege die vollständigen Namen zu schreiben; sie seien Abkürzungen und als solche aus einzelnen griechischen Buchstaben gebildet, die theils verkürzt, theils gedreht erschienen. Er, Boethius, wolle natürlich Nichts an diesen alten Zeichen verändern, sondern überliefere sie, wie er sie selbst lernte.

Wie sollte man nicht fühlen, dass es dazu eine Parallelstelle ist, wenn in der Geometrie von den Zeichen der Längenmaasse gesagt wird,[426]) sie seien theils griechischen, theils fremdländischen Ursprunges, ihre eigentliche Erklärung kenne er nicht und wolle desshalb nicht den schon an sich unklaren Gegenstand durch dunkle Zeichen noch mehr verhüllen. Diese Stelle diente mir schon im letzten Kapitel in erheblicher Weise; auch jetzt gewährt sie mir den Nutzen, dass aus ihr ersichtlich wird, welcherlei Art die Zeichen waren, welche die Pythagoriker einführten, wenig-

stens wie sie schon dem Boethius vorkamen: theils griechischen, theils fremdländischen Ursprunges, ein Gemenge von Reminiscenzen aus verschiedenen Bildungskreisen, wie alle die vielen Kenntnisse, welche in der Schule des Pythagoras ihre Fortpflanzung fanden, dunkel und neu, wie die pythagorischen Lehren in ihrer mysterienhaften Einkleidung es sämmtlich waren. Das ist dasselbe Resultat, zu welchem ich im 10. Kapitel (S. 143) durch aprioristische Betrachtungen gelangte. Es wäre nicht ohne Interesse grade jene Zeichen der Längenmaasse, von denen hier zuletzt die Rede war, und die, wie ich schon gesagt habe, aus späteren Werken vielfach bekannt sind, einer näheren Untersuchung auf ihre mögliche Erklärung zu unterwerfen, einer Untersuchung, die aber freilich die frischen Kräfte eines Forschers erfordert, der ebenso in den orientalischen Sprachen, wie in der pythagorischen Philosophie zu Hause wäre. Vielleicht würde er in Uebereinstimmung mit einer früher angeführten Hypothese von Böckh [62]) auf einen babylonischen Ursprung hin zurückführen können.

Eine dritte Reihe von Zeichen ist also endlich die Reihe der neun Zahlzeichen, welche im Texte der Geometrie vorkommen. In Bezug auf ihre Bedeutung äussert Boethius sich gar nicht, so dass also folgende Meinung begründet ist: Die musikalischen Noten verstand Boethius und konnte sie dem Laien leicht mit ein paar Worten erklären, desshalb that er es auch. Die Zeichen der Minutien waren ihm selbst unverständlich, und er gesteht es offen ein. Die Zahlzeichen verstand er zwar, oder glaubte doch sie zu verstehen, was für ihn dasselbe ist, fühlte aber, wie schwer ihre Erläuterung dem Laien gegenüber sei, und überging daher deren Bedeutung mit Stillschweigen. So viel ich weiss, sind bis jetzt folgende Ableitungen dieser Zahlzeichen angegeben worden, welche mit dem indirect pythagorischen Ursprunge wohl Hand in Hand gehen können.

Hager [63]) hat versucht, einen chinesischen Ursprung der Zahlzeichen zu constatiren, und mit ihm ist Paravey [67]) so ziemlich gleicher Meinung, nur dass dieser nicht immer Alles direct ableitet, sondern mancherlei Uebergänge zulässt, andrerseits aber viel weiter geht, da ihm übereinstimmend mit biblischen Sagen die Ureinheit der menschlichen Bildung Grundhypothese ist, so dass er aus einer einzigen mittelasiatischen Bilderschrift alle Schriftarten, Buchstaben wie Zahlzeichen ableitet, die chinesische, wie die egyptische, wie die phönikische, aus welcher dann die griechische u. s. w.

entstanden. So viel Scharfsinn der Erste, so viel tiefes Wissen der Zweite aufwenden, so kann ich doch unmöglich auf dieses Gebiet ihnen folgen. Nur eine Behauptung von Hager will ich als ziemlich wichtig hier einschalten, eine Behauptung, die freilich Niemandem fremd sein wird, der sich irgendwie lehrend oder lernend mit vergleichenden Sprachstudien zu beschäftigen Gelegenheit hatte. Um Aehnlichkeit von Zeichen zu begründen, ist es nur nöthig, dass die einzelnen Zeichen auf einander hinweisen, ohne dass es auf die Lage derselben, und ganz besonders ohne dass es auf ihren genauen Sinn ankommt. Was namentlich den letzteren Punkt betrifft, so erinnere ich daran wie noch heute das Wort Billion in der deutschen Sprache eine 1 mit 12 Nullen bezeichnet, während dasselbe Wort dem Franzosen nur eine 1 mit 9 Nullen bedeutet. Ich mache ferner auf die zwei Manuscripte des Maximus Planudes aus der Bibliothek San Marco in Venedig aufmerksam (**Figur 17**), in welchen die sieben des einen grade so aussieht wie die acht des anderen, und die zwei und drei das einemal stehend, das andremal liegend auch dem ersten Theile der Behauptung zur Illustration dienen. Unter diesen Voraussetzungen ist es allerdings wahr, dass die Zeichen, welche Hager für eins, zwei, drei, fünf, acht, neun angiebt, die grösste Aehnlichkeit mit den Zeichen darbieten, welche in E in der Bedeutung eins, zwei, drei, acht, sieben, vier vorkommen. Aber ich möchte daraus doch nicht auf die unbedingte Richtigkeit seiner Behauptungen schliessen, da ich nicht im Stande bin, seine zum Ausgangspunkte dienenden Zeichen gleichmässig als altchinesisch anzuerkennen, wie es doch nothwendig wäre. Soviel nur ist hervorzuheben, dass bei einer, ich möchte sagen, eklektischen Benutzung von Zahlzeichen, wie sie nicht unmöglich ist, einige Elemente chinesischen Ursprungs sein konnten.

Eine zweite Erklärung hat Piccard in seinem Vortrage in der waadtländer naturhistorischen Gesellschaft gegeben.[114]) Er findet in den Zeichen des Boethius der Hauptsache nach die neun ersten Buchstaben wieder, wozu er verschiedene Alphabete in Contribution setzte, welche mehr oder weniger direct aus dem phönikischen sich ableiten (**Figur 44**). In dem ersten Zeichen sieht er das griechische iota, welches ursprünglich 1 und erst später 10 bedeutet habe, eine Hypothese, der wir schon öfters begegnet sind. Das zweite Zeichen ist ihm ein beth in verschiedenen Varianten. Das dritte ist genau das koptische gamma, dem das auf einer farnesis chen In-

schrift einigermassen ähnelt. Das vierte Zeichen ist die Verdoppelung von zwei; das fünfte ist entweder ein byzantinisches *v*, welches ja bei den Römern fünf bezeichnete, oder wahrscheinlicher ein samaritanisches he, der fünfte Buchstabe des Alphabets in der Gestalt, wie die Figur sie zuletzt zeigt. Das sechste Zeichen beruht wieder auf conventioneller Einführung ähnlich dem vierten. Es ist nämlich die Umkehrung der fünf, oder vielleicht ein chaldäisches vav mit veränderter Stellung, oder endlich ein verdoppeltes gamma. Das siebente Zeichen kommt von zeta in seinen verschiedenen Varianten, das achte von cheth, das neunte von dem ebensovielten Buchstaben des phönikisch-samaritanischen Alphabetes oder von dem griechischen theta. So weit die Hypothesen Piccards, die ich zwar nicht vollständig zugeben, aber noch weniger vollständig verwerfen möchte. Auch in den von ihm aufgestellten Analogien erkenne ich einige der Elemente, aus denen man die Zeichen sich bildete.

Dass nämlich eine nicht absolut einheitliche Herkunft anzunehmen sei, stimmt mit den Ansichten auch der beiden Gelehrten überein, welche einen dritten jetzt zu erwähnenden Erklärungsversuch aufstellten. Vincent[440]) ist deren Urheber und hat zuerst 1839, dann ausführlicher 1845, sie veröffentlicht, Martin[441]) hat nur wenig Neues noch hinzugefügt. Vincent geht dabei von zwei Stellen des Aristoteles aus,[442]) deren eine angiebt, bei einigen Philosophen seien Ideen und Zahlen von derselben Natur, während die andere die Anzahl beider durch die Zehn begrenzt. Er beruft sich ferner auf ein von Porphyr uns aufbewahrtes Fragment des zu Neros Zeiten lebenden Pythagorikers Moderatus,[443]) aus welchem er den Beweis schöpft, dass die Arithmetik der Pythagoriker mit einem Systeme hieroglyphischer Zeichen zusammenhing, durch welche sie die Ideen über die Essenz der Dinge darstellten. Ich kann dieser Meinung nicht beipflichten und halte es daher für unnöthig, das ganze Fragment hier mitzutheilen, in welchem ich Nichts weiter sehe, als eine Anspielung auf die Zahlensymbolik der Pythagoräer. Gleichwohl ist auch ohne eine besondere Berufungsstelle sehr gut möglich, dass die weiteren Folgerungen von Vincent richtig sind. Es ist in der That nur wahrscheinlich, dass die späteren Pythagoräer, die sogenannte alexandrinische Schule, wie sie musikalische und andere Noten erfand, auch die Zahlzeichen, die sie schon besass, so auffasste, dass sie mit der zahlensymbolischen Bedeutung

der einzelnen dargestellten Zahlen wirklich zusammenhingen, und dass man dabei den armen Begriff, wenn er nicht allsogleich passte, so bearbeitete wie die Reisenden, welchen Prokustes eine verrätherische Gastfreundschaft gewährte.

Einige Beispiele mögen zeigen, wie man bei Etymologien und Erklärungen unbekannter Wörter auch in späteren Zeiten umzuspringen pflegte. Bekanntlich wird in der Trigonometrie das Wort Sinus gebraucht um die Länge einer gewissen Linie in dem Kreise von dem Halbmesser 1 zu bezeichnen. Das Wort kommt zuerst einmal in einer Uebersetzung des arabischen Astronomen Albatenius durch Plato von Tivoli vor am Anfange des 12. Jahrhunderts und von da an häufiger, zuletzt allgemein. Die Entstehung des Wortes kam aus dem Gedächtnisse, und so ersann Godin in der Mitte des vorigen Jahrhundert eine sehr geistreiche Etymologie. Er nahm nämlich die Verdoppelung jener Linie, welche als Sinus bezeichnet wird und machte darauf aufmerksam, dass man so die Sehne erhalte, welche dem doppelten Centriwinkel, also dem ebensogrossen Peripheriewinkel wie der vorher betrachtete Centriwinkel gegenüberliege. Man habe es also eigentlich mit der Hälfte einer Sehne zu thun, Hälfte heisse semissis, Sehne inscripta, die Zusammensetzung sei daher semissis inscriptae, abgekürzt s. ins., und daraus endlich sei sinus geworden. Man war allgemein erfreut in dieser Weise das Räthsel so manchen Jahrhunderts endlich gelöst zu sehen. Und doch beruht die ganze Sache auf einem Irrthum. Sinus ist vielmehr nichts Anderes als die wörtliche Uebersetzung von dschaib, der Busen, wie jene Linie bei arabischen Schriftstellern, wenn auch noch nicht bei Albatenius, genannt wird,[444]) und seit man dieses weiss, ist zwar der eigentliche Ursprung, warum jene Linie dschaib hiess, wieder so räthselhaft als vorher der Sinus es war, aber man ist doch wenigstens die halbe Sehne wieder los geworden. Ein zweites Beispiel wird uns durch Lucas Paccioli geboten, wenn er das Wort Abacus aus modus Arabicus, Arabische Methode ableiten lässt.[445]) Ein drittes Beispiel werden wir noch in dem Worte Algorithmus kennen lernen, an welchem man lange genug herumgekünstelt hat, bis Reinaud die richtige Abstammung entdeckte. Wenn ich endlich aus den bisherigen Untersuchungen die Erklärungen der römischen Zahlzeichen durch Priscian in Erinnerung bringe, die der indischen durch Abenragel, dann wird die Möglichkeit sicher einleuchten, dass die jetzt anzugebenden Erklärungen zwar nicht

den eigentlichen Ursprung der Zahlzeichen uns enthüllen, aber in sehr früher Zeit gegeben werden konnten, und dann ein Beweis für die damalige Existenz der Zeichen bilden.

Von diesem Gesichtspunkte aus lassen sich also die Hypothesen von Hager, von Paravey, von Piccard je nach individueller Ansicht festhalten; man kann mit Martin darauf aufmerksam machen, dass die pythagorischen Zeichen für 1, 2, 3, 4 und 9 grosse Aehnlichkeit mit den gleichwerthigen hieratischen Ordnungszahlen (**Figur 4**) besitzen, welche mit den Monatstagen verbunden auf egyptischen Inschriften vorkommen; man kann, und das ist meine persönliche Meinung, an einen Eklekticismus denken, der die Zahlzeichen ursprünglich aus aller Herren Länder zusammenraffte, ähnlich wie es wohl mit den astronomischen Zeichen der Planeten geschehen ist, und kann mit allen diesen Hypothesen es vereinigen, dass die Zahlzeichen zuletzt von den Alexandrinern, ich möchte sagen, pythagorisch gestempelt wurden. Dieses nachträglich aufgedrückte Gepräge zu erkennen, dazu gehörte freilich eine Bewandertheit in der pythagorischen Zahlensymbolik, wie Vincent sie besitzt, und deren Anwendung dann auch noch eine schwierige war, da eben jene Zahlensymbolik eine sehr wechselnde war und mit derselben Zahl zu verschiedenen Zeiten andere Ideen verband, auch wohl die vorgestellte Idee zu einer anderen Zahl übergehen liess. So ist auch Röths in einem früheren Kapitel gerühmte Darstellung der pythagorischen Symbolik[189]) noch nicht ganz vollständig, da nur wenige der hier zu nennenden Gedankenverbindungen bei ihm vorkommen, der sich allerdings zumeist mit der Symbolik der alten Schule beschäftigte. Es ist daher nur zu bedauern, dass Röth die hier einschlagenden Arbeiten von Vincent offenbar nicht kannte; denn nur er hätte den vollständigen Nutzen aus ihnen ziehen können, den sie gewähren können, oder wäre befugt gewesen, ihnen zu widersprechen.

Die drei ersten Zahlzeichen lassen eine so leichte Erklärung durch Verbindung von 1, 2, 3 Strichen zu, dass man gleich zu Anfang wohl am Meisten erstaunt, wenn man Vincent's Hypothese liest, diese Zeichen seien als charakteristische Körpertheile der Frau sowie des Mannes und dann drittens als deren Vereinigung gedeutet worden. Und doch lässt diese Annahme sich sehr wohl vertheidigen. Die Pythagoräer sahen in der Einheit den Ursprung, die Quelle aller Zahlen, das wissen wir aus den verschiedensten Schriftstellern, z. B. aus Boethius. Die Eins war darnach die Mutter

der Zahlen, was auch Horapollo bestätigt,[19]) indem er ihr freilich gleichzeitig auch Zeugungskraft beilegt. Auch der Gegensatz spricht dafür, dass es Zeiten gab, in welchen man die Eins als das weibliche Princip auffasste, indem die Zwei als mit Männlichkeit versehen aus mathematischer Quelle bekannt ist,[446]) und ebenso von einem Mathematiker grade ihr Zeugungsfähigkeit zugeschrieben wird.[447]) Dass aber die Drei als die harmonische Verbindung der beiden ersten Principien bei allen Pythagorikern galt, geht aus den verschiedensten Quellen hervor, von denen ich nur den mir am Nächsten liegenden Theon von Smyrna[448]) nennen will, und somit ist in der That die Möglichkeit der Vincent'schen Deutung der 3 Zeichen dem Sinne nach und augenscheinlich auch dem Bilde nach vorhanden.

Die Vier trägt den Schlüssel der Natur in sich,[449]) lässt Photius alte Pythagoriker sagen, und so konnte man sie in Gestalt eines Schlüssels darstellen. Den erkennt denn auch Vincent in dem pythagorischen Zeichen und bringt damit das Henkelkreuz der Hieroglyphen in Verbindung, welches er als Schlüssel zur zukünftigen Welt auffasst, und welches bei geneigter Lage oftmals wie eine moderne Vier aussehe. Diese Aehnlichkeit kann ich nicht in Abrede stellen, glaube aber doch, dass man die 4 eher als die Verdoppelung der umgedrehten 2 ansah, wofür der Beleg nachgeliefert werden wird.

Für die Zahl fünf steht wieder, was natürlich am Angenehmsten ist, eine pythagorisch-mathematische Quelle zu Gebot. Denn in einem derartigen Werke finden sich folgende Bemerkungen:[450]) Wenn man die Zahlen 1 bis 9 in einer Zeile schreibe, so stehe 5 in der Mitte; vergleiche man daher die Reihe der 9 Zahlen mit einem im Gleichgewicht befindlichen Wagebalken, so stelle die 5 den Aufhängepunkt dar, und desshalb habe man ihr den Namen der Zahl der Gerechtigkeit gegeben. Wenn nun damit übeinstimmend Photius die 5 die Zahl des Gleichgewichts nennt,[451]) so kann man sich wohl veranlasst fühlen in dem pythagorischen Zeichen für 5 den Haken zu sehen, an welchen eine Wage aufgehängt zu werden pflegt.

Die Erklärung der Sechs durch Vincent ist weitaus am Scharfsinnigsten, und wenn sie auch zunächst künstlich erscheint, so werden wir doch sehen, dass grade sie am festesten steht und unserer ganzen Lehre von den im Besitze des Boethius gewesenen pytha-

gorischen Zeichen zur ganz besondern Stütze dient. Vincent hält nämlich von den verschiedenen Varianten, in welchen das Zeichen vorkommt, diejenige für die normale, bei welcher rechts von einem kleinen Vertikalstrich ein kleines Quadrat steht, und erläutert das Bild dahin, dass es die Einheit des Gewichtes und des Maasses, die Unze bedeute. Dem Augenscheine nach ist dieses möglich; aber die Wahrscheinlichkeit wächst fast bis zur Gewissheit, wenn Vincent uns auf eine Stelle des Cassiodorus [452]) aufmerksam macht. Er hätte nur noch hervorheben müssen, dass der 10. Brief des ersten Buches der Briefsammlung, in welchem jene Stelle vorkommt, überdies an Boethius gerichtet ist, wodurch die Bedeutsamkeit in meinen Augen wenigstens gar sehr erhöht wird. Der Briefsteller drückt sich nämlich dort so aus: „Die Sechs hat das gelehrte Alterthum nicht mit Unrecht die vollkommene Zahl genannt und als Unze bezeichnet, welche die Einheit des Maasses ist." Und mit diesem einen Satze rechtfertigt sich sowohl die Auffassung von Vincent, als mein eigener früherer Ausspruch, dass Boethius den Zahlzeichen einen ganz bestimmten Sinn beilegte, der freilich zu complicirter Natur war, um ihn in der Kürze mitzutheilen, welcher er der ganzen Natur seines Buches nach nicht ungetreu werden durfte.

Wenn ich soweit die Ansichten von Vincent in der nicht genug hervorzuhebenden Beschränkung eines nachträglich Hinzugekommenen und mit Ausnahme der 4, welche ich als verdoppelte 2 auffasse, mit voller Ueberzeugung unterschreiben möchte, so ist dieses weit weniger der Fall in Bezug auf eine andere von ihm ausgesprochene Meinung, welche ich indessen jedenfalls mittheilen muss. Er beruft sich auf eine Stelle aus dem der pariser Bibliothek angehörigen noch unedirten Commentare des Olympiodor, jenes berühmten Philosophen aus der ersten Hälfte des 6. Jahrhunderts zum platonischen Phädon, in welcher angegeben ist, [453]) man habe insbesondere zwei Triaden von Ideen unterschieden: Güte, Gerechtigkeit, Schönheit und Grösse, Gesundheit, Kraft. Diese beiden Triaden, meint nun Vincent, hätten ihre Darstellung in den Zahlzeichen von 4 bis 9, und schlössen sich an die erste Triade 1, 2, 3 dadurch an, deren Zusammenhang schon dargestellt wurde. Es sei hier eine unverkennbare Uebereinstimmung mit den gleichfalls in Gruppen von je dreien auftretenden Sephiroth oder Numerationen der Kabbala. [454]) Was nun weiter die Triade 4, 5, 6 betreffe, so sei 4 schon anderweitig in Beschlag genommen, könne

daher den Begriff der Güte nicht näher repräsentiren, 5 hingegen sei die Gerechtigkeit, 6 die Schönheit oder was damit ziemlich zusammenfalle die Vollkommenheit, als deren Repräsentant die erste vollkommene Zahl besonders geeignet erscheine.

Für die nichtmathematischen Leser dieser Schrift ist es wohl nothwendig, die letzten Worte noch etwas zu erläutern. Vollkommen nennt man nämlich seit der Zeit der griechischen Mathematiker eine Zahl, welche der Summe aller ihrer Faktoren gleich ist. So sind 1, 2, 3 die sämmtlichen Faktoren von 6, d. h. die sämmtlichen Zahlen, durch welche 6 ohne Rest theilbar ist; ferner sind 1, 2, 4, 7, 14 in demselben Sinne die sämmtlichen Faktoren von 28. Da nun die Summe von 1, 2, 3 gleich 6, die Summe von 1, 2, 4, 7, 14 gleich 28 ist, so nennt man 6 und 28 vollkommene Zahlen. Solche Zahlen sind überaus selten, unterhalb 100 Millionen giebt es deren nur vier, wovon die 6 die erste ist.[455])

Dass man nun diese Eigenschaft der 6 als vollkommene Zahl berücksichtigte, geht allerdings aus jenem Briefe des Cassiodorus hervor; gleichwohl möchte ich, von meinem Standpunkte aus, die in sich abgeschlossene und fest zusammenhängende Hypothese von Vincent nicht annehmen, denn an einen derartigen vorexistirenden, die Bildung der Zahlzeichen beeinflussenden Gedanken glaube ich überhaupt nicht, und dass die Alexandriner eine so einheitliche Nacherklärung erfunden hätten, die sämmtliche Zahlzeichen umfasste, ist unwahrscheinlich genug. Man wird einwerfen, dass was einmal geschah, auch mehrmals geschehen konnte, dass eine Erklärung, die Vincent im 19. Jahrhundert erdachte, auch für das erste oder zweite Jahrhundert keine Unmöglichkeit war. Dieser Einwand hat in der That einige Berechtigung, trotzdem ist er nicht unbedingt gültig, da Vincent zur Bildung seiner Hypothese noch andere Hülfe als die blosse Gestalt der Zeichen zu Gebote stand.

Hat indessen Vincent die Wahrheit getroffen, so ist 7 das Symbol der Grösse, 8 das der Gesundheit, 9 das der Kraft, und dem entsprechend sieht er in dem Zeichen von 7 einen Zirkel, in dem von 8 eine Schlange, in dem von 9 einen Ithyphallus, welcher ihn nöthigt als Normalform die Gestalt anzusehen, welche in der Handschrift C auf dem Abacus sich findet (**Figur 43**).

Mit dieser letzten Erklärung bin ich einverstanden, wozu mich aber der zweite Grund veranlasst, welchen Vincent neben seiner Berufung auf Olympiodorus gleichfalls andeutet. Neun ist nämlich,

als drei mal drei, die Quadratzahl jener ersten Vereinigung des graden und ungraden Zahlenelementes, oder wie Theon von Smyrna besonders hervorhebt:[456]) neun ist die erste Quadratzahl unter den Ungraden. Das Quadrat aber oder die zweite Potenz wird bei den Griechen fast immer Potenz im engeren Sinne genannt, mit griechischem Namen dynamis d. h. Kraft und somit ist das angegebene Symbol vollständig geeignet den Begriff der Zahl darzustellen.

Die Bedeutung der Zeichen für Sieben und Acht fasse ich dagegen anders. Sieben ist die Anzahl der Himmelskörper und trägt den symbolischen Namen der Zeit, des Zeitmaasses.[457]) Sollte darin nicht Grund liegen, auch das Zeichen so aufzufassen, dass es die Zeit symbolisire? Und dieses könnte in doppelter Weise geschehen, deren keine dem Bilde widerspricht. Es gleicht ebensowohl einer Sense, als einem Gnomon, mit dessen Hülfe Sternbeobachtungen gemacht wurden, doch möchte ich lieber das Letztere darin sehen.

Endlich in acht Kugelsphären bewegen sich die kreisförmig rollenden Himmelskörper,[458]) und darnach ist vielleicht in dem Zeichen der acht die Verbindung mehrerer Kreise gelesen worden. Ich gebe diese Vermuthungen natürlich nur als solche, und glaube gern, dass wohl bessere und ungezwungener dem Bilde sich anschliessende ausfindig gemacht werden können. So viel jedoch dürfte aus dem hier Angegebenen hervorleuchten, dass der Möglichkeit Nichts im Wege steht, die Zeichen, welche ich früher schon als pythagorische benannte, mit Hülfe pythagorischer Ideen zu deuten, und dass die Gestalt der alten Sechs ganz vorzüglich darauf hinweist, dass Boethius die Zeichen kannte und eine von der unseren nicht abweichende Erklärung derselben ihm zu Gebote stand.

Es ist jetzt auch wohl in Erinnerung zu bringen, dass bei Montfaucon eine Handschrift eines Werkes des Boethius in zwei Büchern „über die Zahlen" erwähnt wird,[459]) welche in dem Vatican sich befinde. Chasles hat bereits, aber wie es scheint bisher vergebens, auf diese Notiz aufmerksam gemacht, und so möchte ich an Alle, die dazu Gelegenheit haben, die Aufforderung erneuen, sich dafür zu interessiren „dass dieses Manuscript, welches für die Geschichte der Wissenschaft von Nutzen sein könnte, aus dem Staube der Bibliothek hervortreten möchte."

Als ich im Anfange dieses Kapitels den Abacus der beiden

wichtigen Codices E und C beschrieb, erwähnte ich der fremdartig klingenden Wörter, welche sich zwar auf demselben, aber nicht in dem eigentlichen Texte der Geometrie angegeben finden. Dieselben Namen finden sich nun auch in anderen Handschriften des 11. Jahrhunderts in vielfach abgeänderten Varianten. Chasles hat die acht ersten und den zehnten in einem anderen Stücke des Manuscriptes C als in der Geometrie des Boethius wiedergefunden. Sie sind dort in lateinischen Versen enthalten, welche zur Erläuterung der Namen dienen, und diese Erläuterungen dienten Vincent zur Aufstellung einiger seiner Hypothesen für die symbolische Deutung der Zeichen, ebenso wie einige derselben meinen von Vincent abweichenden Meinungen zur Unterstützung dienen. Damit ist hinlänglich angedeutet, dass diese Verse ihrem Sinne nach indirect pythagorischen Ursprunges sein können. Sie heissen etwa folgendermassen. [460])

Igin führet das Zeichen in erster Stelle zum Namen.
Auf den zweiten der Plätze erhebet Andras den Anspruch.
Dann als erste einfache Zahl folgt Ormis auf jene.
Zweimal zeiget die Zwei das jetzt nachfolgende Arbas.
Quimas bildet die Fünf mit ausersonnenem Namen.
Ihrer Vollkommenheit freut sich die Calcis an sechsester Stelle,
Siebenfältiger Ehre erglänzet am Würdigsten Zenis.
Und die glückselige Acht zeigt nur Termenias einzig.
Aehnlich gestaltet dem Rade ist was hier Sipos ich nenne.

Offenbar fehlt hier ein Vers für das Wort Celentis, welches wie Chasles angiebt im Verlaufe der Schrift als Name der 9 noch vorkommt. Vergleichen wir diese Erklärungen der Namen mit unseren vorhergehenden Erklärungen der Zeichen, so findet bei der 4 Uebereinstimmung mit der von mir als wahrscheinlich vertheidigten Hypothese statt. Der Vers für 6 stimmt dem Sinne nach durchaus mit der Annahme von Vincent, für welche auch der Name eine nicht geringe Bestätigung liefern wird. Der für 7 hat wieder eine leichter verständliche Fassung, wenn die sieben Himmelskörper in meiner Weise beigezogen werden, als wenn das Zeichen einen Zirkel darstellt. Endlich die übrigen Verse mit Ausnahme des letzten, den ich nachher noch bespreche, sind mir, ich gestehe es, in jeder Weise noch dunkel, oder bieten mir wenigstens keinen Grund mich für eine bestimmte Deutung der Zeichen zu erklären.

Ich komme zu dem eigentlichen Wortlaute der zehn Namen.

Vier davon, nämlich Arbas, Quimas, Zenis, Termenias, wie sie in den angeführten Versen heissen, sind unzweifelhaft orientalisch, wie schon Huet bemerkt hat, der Erste, welcher überhaupt mit diesen Namen sich beschäftigte, die ihm von Graevius aus einem alten Manuscripte des Boethius mitgetheilt worden waren.[461]) Er erkannte bereits in ihnen Verunstaltungen der hebräischen Zahlwörter für vier, fünf, sieben, acht, und darin stimmt ihm Nesselmann[462]) im Ganzen bei, wiewohl dieser Forscher das Wort Termenias vielmehr als aramäisch charakterisirt. Statt dieser Wortform findet sich indessen in einem Manuscripte des britischen Museums[463]) auch die Lesart Zementas, welche mehr auf die hebräische Form zurückzudeuten scheint. Zugleich mit den hebräischen Formen theilt übrigens Nesselmann auch überall arabische ähnlich klingende Parallelwörter mit. Prof. Gildemeister[464]) geht sogar so weit, ausdrücklich zu erklären, es seien nicht hebräische, sondern nur arabische Wörter, die zu Grunde liegen; dagegen Prof. Spiegel[465]) dieser Meinung nur für das zehnte hier noch nicht in Betracht kommende Wort beipflichtet, im Uebrigen auch einen nichtarabischen Ursprung zugesteht.

Die Wörter Ormis, Calcis, Celentis hat ausser Vincent jeder bisherige Forscher als unerklärlich zugestanden. Igin und Andras haben dagegen Nesselmann und Gildemeister zu deuten versucht. Der Erstere vom Hebräischen aus, indem er die Stammwörter echad eins und achar der Andere annimmt; der Zweite aus dem Persischen und Arabischen, indem er sie als Verstümmelung von Yagân, dem persischen Eins, und Annadir, arabisch der entgegengesetzte Punkt, auffasst.

Vincent hat nun sowohl diese beiden Wörter, als auch die drei, welche die Bemühungen aller anderen Gelehrten zu Nichte machten, aus dem Griechischen erklärt, und zur wesentlichen Unterstützung seiner von mir getheilten Ansicht der alexandrinischen Entstehung der Namen muss es dienen, dass wie er hervorhebt die vier Zahlwörter barbarischen Ursprunges eben nur Zahlwörter aus fremden Sprachen in mehr oder weniger verderbter Form sind, während die griechischen Namen sämmtlich auf die symbolische Bedeutung sich beziehen, welche sein Scharfsinn den betreffenden Zahlen zuzuweisen vermochte. Er erklärt nämlich der Reihe nach Igin als entstanden aus he gyne, das Weib. Andras hängt ebenso mit andres, die Männer zusammen, und dann folgt von selbst Ormis aus

horme, die Begierde. Sechs heisst in den angegebenen Versen Calcis. Statt dieses Wortes kommen sehr verschiedene Lesarten vor, Caltis, Calctis, in dem schon erwähnten englischen Manuscripte[463]) Chalcus. Diese Lesart hält nun Vincent sicherlich mit Recht für die beste, und erklärt sie mit Bezug auf Pollux, der sich dahin ausspreche,[466]) das Wort Unze sei sikylisch und ihm stehe in griechischer Sprache Chalkous gegenüber. Darnach ist also diese Benennung synonim mit der, welche in dem Briefe an Boethius ausdrücklich dem gelehrten Alterthume zugeschrieben wird. Endlich das Wort Celentis, welches der 9 entspricht und den Begriff der Kraft enthalten soll, erklärt Vincent als aus athelyntos, nicht weibisch, entstanden. Er giebt selbst zu, dass es für das erste Ansehen passender erscheine, das Wort thelyntos, weibisch, zum Ausgangspunkte zu nehmen, welches fast genau wie celentis ausgesprochen wurde, da das griechische th dem englischen th ähnlich klang. Allein wenn thelyntos philologisch sehr gut passt, so widerspricht es sowohl dem Bilde, als der dem Bilde, wie wir erfuhren, innewohnenden symbolischen Bedeutung. Das Wegfallen des anfänglichen a habe hingegen auch philologisch keine so gar grossen Bedenken; sei doch auf ähnliche Weise der Name Memnon aus Amenophis, Boutique aus Apotheke entstanden. Er setzt noch eine anderweitige Hypothese hinzu, welche dieses Verschwinden auch eines wirklich bedeutsamen Buchstabens, wie hier des verneinenden a, begreiflicher macht. Er glaubt nämlich, dass sämmtliche Zahlwörter nicht direct aus dem Griechischen in die Form übergingen, in welcher sie in jenen lateinischen Versen enthalten sind, sondern auf dem Umwege durch hebräische Vermittelung, also durch gelehrte Juden, etwa durch Anhänger der Kabbala. Dann freilich ist es gleichfalls natürlich, dass die in griechischer Form überkommenen Wörter symbolisch sind, dass hingegen, wo jene Formen verloren gingen, die einfachen hebräischen Zahlwörter an ihre Stelle traten. Dass aber zwischen Pythagoräern und Kabbalisten Anknüpfungspunkte existirten, ist, wie Vincent in Erinnerung bringt, so wenig neu aufgestellte Vermuthung, dass schon Reuchlin in seinem Werke über die Kunst der Kabbala sich des Ausdruckes bedient,[231]) Kabbalisten und Pythagoräer seien aus einem Teige geknetet.

Wenn es ein Kennzeichen historischer Wahrheit ist, dass sie Niemanden ganz verhüllt bleibt, der mit ehrlichem, eifrigem Stre-

ben nach ihr forscht, mag er auch von entgegengesetzten Standpunkten ausgehend nach Entgegengesetztem gerichtet die Wahrheit nur als Kreuzungspunkt mit anderen Systemen erreichen, so darf ich hier wohl darauf aufmerksam machen, dass Gerhardt in einer ziemlich wenig bekannt gewordenen Abhandlung[365]) über die Enstehung und die Ausbreitung des decadischen Zahlensystemes gleichfalls in Alexandrinern und Kabbalisten die Vermittler findet, welche die Zeichen kannten, die ich als pythagorische benannt habe. Er meint nämlich,[467]) dass jener Fälscher pythagoräischer Fragmente, welchen er mit Gruppe in der Person eines im ersten Jahrhundert n. Chr. Geb. in Alexandrien lebenden Juden annimmt, den Pythagoräern den Gebrauch besonderer, von den griechischen verschiedener Zahlzeichen zugeschrieben habe. Demselben habe die Sage nicht unbekannt sein können, dass Pythagoras Reisen im Oriente und nach Egypten gemacht habe. „Es lag mithin nahe, fährt Gerhardt fort, bei der Fälschung irgend ein Zahlensystem Egyptens oder des Orientes zu gebrauchen, ebenso wie er bei der Fälschung der Fragmente der pythagoräischen Philosophemen religiöse Vorstellungen der Juden beimischte. Er griff zu den arabischen Gobâr-Ziffern, die wegen der uralten Verbindung zwischen Juden und Arabern ihm nicht unbekannt sein konnten, und die wegen ihres Namens Gobâr (Staub) zu dem ursprünglich im Sande gezeichneten Abacus trefflich passten. Da nun die ersten Anfänge der Religionsphilosophie der Juden, der sogenannten Kabbala, bis in das 2. Jahrhundert nach Chr. sich verfolgen lassen, und da pythagoräische Lehren vorzugsweise darin verwebt wurden — es entstand sogar die Mythe, dass Pythagoras der Erfinder der Kabbala sei — so ist nicht zu verwundern, wenn die von dem Fälscher den Pythagoräern beigelegten Ziffern in der Kabbala Aufnahme fanden, und dass ähnlich wie bei den Pythagoräern die Zahlen in der Kabbala gebraucht wurden, um etwas Geheimnissvolles, Mystisches auszudrücken, sowie auch als astrologische Figuren. Diese jüdische Geheimlehre fand unter den Christen viele Anhänger, und so wurden denselben jene Zahlenzeichen bekannt, womit aber nicht gesagt sein soll, dass die Christen nur auf diese Weise mit den Gobâr-Ziffern bekannt geworden sind.“ Ich will mir einen Augenblick Gewalt anthun und das Alles für richtig halten. Dann folgt daraus genau dasselbe, was ich bisher behauptet habe. Der Fälscher, jener schreckliche Mensch, der alten wie modernen Gelehrten ein Kuckuksei untergelegt hat, an wel

chem sie noch heute ausbrüten, hat den Pythagoräern die Gobar-Ziffern zugeschrieben. Ich habe von diesen Zeichen im nächsten Kapitel zu reden, vorläufig mag die Angabe genügen, dass sie (**Figur 45**) den pythagorischen Zeichen in der That ähnlich sehen. Also jedenfalls kannte der Fälscher diese Zeichen, und er wird doch wohl nicht der einzige Bewohner von Alexandrien gewesen sein, der diese Kenntniss besass. Es werden doch wohl auch später nicht grade Alle, die seine gefälschten Fragmente lasen, die Seiten jedesmal überschlagen haben, die von den Ziffern handelten. Es wird vielmehr der mathematische Leser grade diese Stellen mit besonderem Interesse betrachtet haben, und so konnten die Zeichen nicht bloss auf Boethius kommen, es wäre vielmehr unbegreiflich, wenn sie nicht auf ihn gekommen wären; fast ebenso unbegreiflich wie die Folgerungen, welche Gerhardt weiter zieht, indem er unmittelbar an das schon Citirte anschliessend hinzusetzt: „Für die Wahrscheinlichkeit unserer Annahme, dass nämlich die in der fraglichen Stelle des Boethius vorkommenden Zahlzeichen arabischen Ursprunges sind, sprechen noch die Namen, die diesen Zahlzeichen daselbst beigelegt werden; sie lassen sich sämmtlich auf arabische Formen zurückführen und liefern mithin einen neuen Beitrag zu der Behauptung, dass die damit bezeichneten Ziffern als unterschoben betrachtet werden müssen.“ Ich erlaube mir ausser den schon gemachten Einwänden, welche in den Schlüssen bestehen, die ich auf Gerhardt's Prämissen baute, noch ausserdem an der Wahrheit dessen zu zweifeln, was er in Bezug auf die Namen sagt. S ä m m t l i c h e Namen hat noch Niemand auf arabische Formen zurückgeführt.

Ich kehre wieder zu Vincent's Hypothesen zurück. Sind dieselben, wie ich glaube, im Ganzen richtig, so hat Boethius unzweifelhaft die pythagorischen Zeichen gekannt, welche alsdann auch diesen Namen befugtermassen tragen; so waren ihm aber ebenso unzweifelhaft jene Wörter unbekannt, welche ursprünglich griechisch, e r s t h e b r a i s i r t, dann latinisirt wurden. Man verstehe mich recht. Es ist möglich und wahrscheinlich, dass Boethius griechische Namen der Zahlzeichen kannte, welche mit deren symbolischer Bedeutung zusammenhingen; aber die Namen, welche in den erwähnten Versen vorkommen, welche auch auf der ersten Tafel der Handschriften E und C geschrieben erscheinen, die kannte er keinenfalls. Diese sind somit auf jener Tabelle nothwendig interpolirt, sie sind

vom Abschreiber in ihm selbst nur halbwegs verständlicher Weise zugefügt.

Zu derselben Annahme sehe ich mich auch noch durch einen weiteren Grund veranlasst. Denn nur so erklärt sich das zehnte Zeichen, welches noch vorhanden ist, nebst seinem Namen und dem auf ihn sich beziehenden Verse. Das Zeichen befindet sich über der 10. Kolumne und besteht aus einem kleinen Kreise, in welchen in der Handschrift C ein kleines a, in der Handschrift E ein kleines Dreieck eingezeichnet ist. Der Name lautet Sipos, und wiewohl dieser Name in C gemeinsam mit Celentis über der 9 steht, so lässt doch der Vers, welcher dem Sipos die Gestalt eines Rades beilegt, keinen Zweifel darüber aufkommen, dass in der That das zehnte Zeichen damit gemeint ist. Es kommt also darauf an, dessen Bedeutung zu erklären, wozu der Name mit wird dienen können. Nesselmann[468]) hält ihn für arabisch aus sifr entstanden, dem aus safira, leer sein, abgeleiteten Namen der Null. Martin[469]) nimmt als Urwort das griechische psephos, welches einen Rechenpfennig bedeutet. Endlich Vincent[470]) geht auf das hebräische saph zurück, welches Gefäss bedeute und auch mit dem Begriffe der Leerheit zusammenhänge. Alle nehmen daher die Bedeutung des Sipos als Null. Ist dieses richtig, so muss zwischen jenen drei Etymologien eine Wahl getroffen, oder eine vierte aufgestellt werden. Letzteres scheint mir vorläufig noch nothwendig, wenn auch meine eigenen Sprachkenntnisse nicht dazu ausreichen. Müsste ich aber eine Wahl treffen, so brauche ich wohl kaum zu sagen, dass ich die Nesselmann'sche Ableitung von vorn herein verwerfe, da ich mit Martin der Ansicht bin, dass arabische Beeinflussung hier unter keiner Bedingung stattgefunden haben kann, und dass diese aprioristische Behauptung dadurch ganz deutlich unterstützt wird, dass später unter arabischem Einflusse das Wort sipos durch cifra ersetzt wurde, also jedenfalls die Nichtidentität dieser beiden Wörter evident wird, deren Letztes nur von sifr herstammen kann, deren Erstes also eine andere Etymologie haben muss. Die Ableitung Martin's halte ich auch nicht für richtig, weil ich eben nicht glaube, dass die Alexandriner schon die Null kannten, und das müsste der Fall sein, wenn das Wort und mit dem Worte das Zeichen griechisch wären. Bei einer Wahl muss ich also schliesslich bei Vincent's Annahme stehen bleiben, und so wenig mir das Wort behagen will, aus welchem er Sipos ableitet, so gut passt

eine hebräische Abstammung zu meinen schon mehrfach erörterten Ansichten: „Die Alexandriner besassen neun Zahlzeichen für die 1 bis 9. Sie legten denselben mancherlei Namen bei, welche symbolischen Bedeutungen entsprachen, die sie in ihre Zeichen hineinlasen. Mit diesen Zeichen, vielleicht auch mit den Namen machte etwa im ersten oder zweiten Jahrhundert n. Chr. Geb. ein gewisser Archytas die Römer bekannt; seine Schrift wurde indessen kaum gelesen, bis Boethius sie dem gelehrten Publikum empfahl. Inzwischen waren dieselben Kenntnisse in kabbalistische Schulen eingedrungen und hatten sich dort mit der unterdessen wohl in Indien erfundenen Null zu zehen Zeichen vereinigt. Die Namen waren theils geblieben, theils verschwunden, für das zehnte Zeichen war vorher noch gar kein Name vorhanden gewesen. Um den Mangel zu ersetzen mussten also einige hebräische Wörter eintreten. Als jetzt von hier aus Zeichen und Namen wieder in den Occident wanderten, da stiessen sie dort plötzlich auf alt Verwandtes, aber doch nicht mehr ganz Uebereinstimmendes, und die Schreiber des 11. Jahrhunderts, erstaunt so Aehnliches von so verschiedenen Seiten her zu erhalten, dachten das Eine mit Hülfe des Anderen zu ergänzen und zu verbessern."

So erklären sich jene Interpolationen. Ich muss später nochmals auf dieselben zurückkommen, da für jetzt meine Aufgabe mehr die war, sie der Kenntniss des Boethius und somit der gegenwärtigen Besprechung zu entrücken, als Alles zu erörtern, was auf sie Bezug hat. An jener späteren Stelle werde ich dann ganz besonders noch von der Anwendung des Sipos theils als Null, theils in anderer Weise zu reden haben.

XVII. Die Zahlzeichen der Araber.

Schon einigemal war ich im Verlaufe dieses Buches genöthigt, das Volk der Araber zu erwähnen, und meine Leser haben sich vielleicht nur darüber gewundert, dass es nicht häufiger geschah, und dass ich die den gewöhnlichen Ansichten entsprechende Möglichkeit, wonach die Araber die Einführung der modernen Ziffern in Europa von Indien her allein vermittelten, so kurz von der Hand wies, wie ich es im letzten Kapitel gethan habe. Es ist schwer von Meinungen und Lehren sich frei zu machen, welche man als Knabe schon eingeprägt bekam, und selbst die Gewissheit, dass Boethius die pythagorischen Zahlzeichen kannte, die mit unseren modernen Ziffern so sehr nahe übereinstimmen, wird bei der noch gewisseren Thatsache, dass Boethius unmöglich aus arabischen Quellen schöpfen konnte, auf zweifelsüchtige Seelen genug stossen, die, wenn sie meinen Beweisen Nichts anhaben können, sich vielleicht schliesslich in dieselbe Festung des Unglaubens zurückziehen, welche seit lange her die letzte Zuflucht war, und in welcher sie hinter der Behauptung sich verschanzen, Boethius könne und könne jene Geometrie nicht geschrieben haben, er sei[471]) „in den mathematischen Wissenschaften zu gut bewandert und überhaupt zu philosophisch gebildet gewesen, als dass er ein solches elendes Machwerk, wie diese Geometrie ist, zusammengetragen haben sollte.“ Es kann meine Aufgabe nicht sein, immer wieder auf diese Vorurtheile zurückzukommen. Was ich einmal bewiesen zu haben glaube, das steht der Widerlegung eines Jeden zu Gebote, aber allgemeine Redensarten können mich nicht veranlassen, eine Silbe davon als zweifelhaft gelten zu lassen.

Die von mir angestrebte, wenn auch lange nicht erreichte Vollständigkeit allein nöthigt mich, auf die Araber und deren Zahlzeichen und Rechenmethoden besonders einzugehen. Leider kann ich dieses nicht so weit, wie ich selbst es wünschte, da ich mit der arabischen Sprache durchaus unbekannt bin, und Uebersetzungen der für meinen Gegenstand wichtigsten Schriften kaum existiren. Noch immer gilt daher der Satz, den Chasles mit Bedauern aussprach,[472]) dass man an eine wirkliche wissenschaftliche Geschichte der Araber nicht denken könne, dass für den Augenblick Nichts weiter möglich sei, als einige hauptsächliche Thatsachen und einige zerstreute Data zu sammeln.

Wenn der Leser darnach in diesem Kapitel weniger finden wird, als er wohl zu wissen wünscht, so wird er andrerseits hier durch einige Untersuchungen überrascht werden, welche nur darin eine Analogie zu dem in der Ueberschrift Angegebenen besitzen, dass auch sie auf Völker des Orientes sich beziehen. Ich gebe zu, dass diese Notizen vielleicht besser in einem anderen Kapitel untergebracht worden wären, bemerke aber zugleich, dass ich keinen solchen passenderen Ort finden konnte, und so wird der Leser wohl so freundlich sein, ein kritisches Auge zuzudrücken und mir die erbetene Freiheit zu gewähren, auch nicht vollständig hierher Gehöriges behandeln zu dürfen.

Schon bei Gelegenheit der Darstellung der Zahlzeichen der Griechen bemerkte ich, viele Schriftarten, welche mehr oder weniger direct von den Phönikern sich herleiten, hätten den Gedanken zur Ausführung gebracht, die 22 Buchstaben des Alphabetes zu Zahlzeichen zu verwenden, so dass die 9 ersten Buchstaben zur Bezeichnung der Einer, die 9 folgenden zur Bezeichnung der Zehner dienten; dass man dann auch die Hunderte noch zu bezeichnen wünschte, dass aber für diese nur 4 Buchstaben noch übrig waren, die darnach nicht weiter ausreichten, als bis zur Bezeichnung von 400. Die weiteren Hunderte 500, 600, 700, 800, 900 machten bedeutende Schwierigkeiten, welche an verschiedenen Orten verschieden gehoben wurden, und darin auf eine individuelle Fortbildung hinweisen, während die vorhergehende Bezeichnung als Stammeigenthum zu betrachten ist und Allen gemeinsam war.

Die Griechen, um es in Kürze zu wiederholen, hatten überdies von den 22 ursprünglichen Buchstaben noch einen ganz verloren; sie reichten daher in der Bezeichnung nur bis 300. Dage-

gen bildeten sie ziemlich frühe fünf neue Buchstaben, welche im phönikischen Alphabete noch nicht vorhanden waren, und welche die Bedeutung 400 bis 800 annahmen, und endlich für das letzte noch übrige Zahlwort für 900 führten sie conventionell das Zeichen des Sanpi ein. Anders verfuhren die Völker, welche im Oriente selbst Schrift und Sprache weiter ausbildeten. Im Hebräischen behalf man sich [473]) ziemlich lange mit Zusammensetzung der 22 vorhandenen Zeichen (**Figur 46**). Man schrieb also 400+100 für 500, 400+200 für 600 und bedurfte demnach dreier Buchstaben, etwa 400+400+100, um 900 zu schreiben. Später substituirte man statt dieser Zusammensetzungen besondere Zeichen, die sogenannten Finalbuchstaben. Fünf Buchstaben des hebräischen Alphabetes, diejenigen nämlich, welche den Zahlenwerthen 20, 40, 50, 80, 90 entsprechen, besitzen zweierlei Gestalt, in welcher sie geschrieben werden, je nachdem sie am Anfange bezüglich in der Mitte eines Wortes auftreten, oder an dessen Ende; eine Eigenthümlichkeit, welche die deutsche Sprache einmal, bei dem Buchstaben ſ s, gleichfalls aufweist. Die fünf Schlusszeichen nun, oder wie die Grammatiker sagen die fünf Finalbuchstaben wurden als Ersatz der Hunderte 500 bis 900 verwandt (**Figur 47**). Um die Tausende zu bezeichnen kehrte man wieder zum Anfange des Alphabetes zurück, indem jeder Buchstabe durch zwei über ihn gesetzte Punkte den tausendfachen Werth erhielt. Auf diese Weise war es möglich, alle Zahlen unter einer Million zu schreiben, ob aber höhere Zahlen überhaupt in Zeichen geschrieben wurden, finde ich nicht angegeben. Die Buchstaben als Zahlen konnten im Hebräischen noch viel leichter als im Griechischen mit Wörtern verwechselt werden, da man gewohnt war Vokale, die nicht besonders angezeigt waren, in Gedanken zu ergänzen und hinzuzulesen. Es war also um so nöthiger ein Unterscheidungszeichen zu besitzen. Dasselbe bestand darin, dass man über den letzten Zahlbuchstaben zwei kleine Häkchen machte, oder auch diese Häkchen zwischen dem letzten und vorletzten Zahlbuchstaben anbrachte. Die Reihenfolge, in welcher man die Zahlbuchstaben schrieb, beruhte auf demselben Principe wie bei den Griechen. Der Haupttheil der Zahl sollte zuerst gelesen werden, die kleineren Theile in der durch ihr decadisches Niedrigerwerden bedingten Folge. Da aber die ganze Schrift die entgegengesetzte Richtung wie die griechische hatte, so konnte dieses Princip nur bei scheinbar entgegengesetzter Schreibart der

Zahlen gewahrt bleiben. Somit stehen die Tausende am weitesten rechts, die Einer am weitesten links.

Kaum wesentlich verschieden von dieser hebräischen Bezeichnungsweise der Zahlen war die der Araber[474]) seit der Zeit, in welcher sie die älteste der genauer bekannten arabischen Schriftarten, die sogenannte kufische Schrift ausbildeten, das heisst etwa seit dem 7. Jahrhundert n. Chr. Geb. Nun kann allerdings keine Rede davon sein, dass damals erst die Araber der Schrift überhaupt theilhaftig geworden wären. Ein Volk, welches im Jahre 2500 v. Chr. Geb. unter der Dynastie der Hamyariten ein Reich gründete, das zweitausendjährigen Bestand gehabt haben soll, ein Volk, welches jedenfalls ein halbes Jahrtausend v. Chr. Geb. so sehr im Rufe der Gelehrsamkeit und der Bildung stand, dass der biblische Geschichtsschreiber, um Salomons Weisheit zu erheben, sie mit der der Egypter und Araber vergleicht,[475]) ein solches Volk muss auch eine Schrift besessen haben. Allein schon die geringen Ueberreste, welche von dieser alten Schrift erhalten sind, reichen aus, um zu beweisen, dass sie keinerlei Aehnlichkeit mit den Zügen besitzt, welche die eigentliche sogenannte arabische Schrift in allen ihren Varianten darbietet, dass sie vielmehr in ihren groben, starken, geradeaufstehenden Zeichen den Namen einer gestutzten, säulenartigen Schrift verdient, welchen arabische Autoren späterer Zeit ihr beizulegen pflegen. Ob die Zahlen in dieser Schrift durch besondere Charaktere dargestellt wurden, oder vielmehr ob dergleichen erhalten sind, ist mir nicht bekannt. Dagegen weiss man von Zahlzeichen, die einer altsyrischen Schrift angehören, und die uns einigermaassen zum Ersatze dienen können, wenn es wahr ist, dass Altarabisches und Altsyrisches sich so nahe standen, wie Manche vermuthen.

Die Zeichen, die ich hier im Auge habe, sind die der palmyrenischen Inschriften. Diese Inschriften wurden in der Mitte des vorigen Jahrhunderts wieder aufgefunden und alsbald von Swinton entziffert,[476]) dessen Uebersetzungen bis auf den heutigen Tag der Hauptsache nach als richtig anerkannt werden. Auch diese Inschriften sind verhältnissmässig neu, die älteste reicht nicht über das Jahr 2 hinaus,[477]) die jüngsten gehen bis zur Mitte des dritten Jahrhunderts herab. Allein wir müssen uns mit dem zufrieden geben, was einmal vorhanden ist, und Analogieschlüssen ihr Recht angedeihen lassen.[478])

Die palmyrenischen Ziffern, in zweierlei Formen erhalten, sind die merkwürdigsten, welche mir bekannt geworden und verdienen sicherlich grössere Aufmerksamkeit, als ihnen bisher zugewandt wurde. Sie bestehen aus nur vier Elementen, welche vereinzelt die Zahlenbedeutungen 1, 5, 10, 20 besitzen, in ihren Combinationen aber jede beliebige Zahl darzustellen vermögen. Unterhalb 100 ist die Benutzung der Zeichen eine rein additive mit Festhaltung des Gedankens, dass jede Zahl durch so wenige Zeichen als möglich angeschrieben wird, und dass die Richtung der semitischen Gewohnheit nach von dem höchsten Zeichen rechts zum niedrigeren links hinführt. Auffallen könnte soweit nur die Rolle, welche 20 spielt, da ein eigenthümliches Gruppenzeichen für diese Zahl ausser hier nur bei den Azteken vorzukommen scheint,[479]) welche zu diesem Zwecke eine Fahne benutzen, die je nachdem sie halb, zu dreiviertel oder ganz colorirt ist, 10, 15 oder 20 bedeutet. Eine sprachliche Rolle spielt zwanzig allerdings häufiger, wofür ich nur an die Ueberreste keltischer Sprache im Französischen und an das Baskische erinnern will.[480]) Bei der Zahl 100 beginnt nun die palmyrenische Bezeichnung (**Figur 48**) plötzlich einem neuen Systeme zu huldigen. Sie setzte eine 1 rechts vor eine 10. Diese Methode erinnert uns einigermaassen an die Art, wie in der Keilschrift die einem höheren Zahlzeichen vorgesetzte Einheit dasselbe in erhöhter Bedeutung multiplicirte. Aehnlicherweise lässt sich die Sache hier so auffassen, dass die Einheit die ihr folgende Zehn zehnmal nehmen lässt, und dass diese Auffassung richtig bezeugt sich dadurch, dass die übrigen Einer dem so Begonnenen treu bleiben. Zwei vor zehn vervielfacht es zwanzig mal zu 200, drei vor zehn bringt 300 hervor u.s.w. Tausend hätte man darnach durch Nebeneinandersetzung von zwei Zehnern darstellen können, wobei keinerlei Verwechslung etwa mit 20 möglich gewesen wäre, weil ja für diese Zahl ein besonderes Zeichen existirte. Trotzdem zog man vor den zwei Zehnerzeichen noch eine Eins rechts vorzusetzen, und so eine neue Folge von Bezeichnungen zu beginnen, die auch wieder bis zum Neunfachen also bis zu 9000 durchgeführt wurde. Die Tausende mussten übrigens noch mit einem darüber gezogenen Horizontalstriche versehen werden, widrigenfalls hier eine Verwechslung mit dem gleichhohen Hunderter nebst zehn eintrat. Denn das Zeichen der 4 gefolgt durch zwei Zehner hiess ja zunächst offenbar 410 und wurde nur durch den Horizontalstrich

in 4000 umgewandelt. Bei Zehntausend fügten sie wieder eine Zehn links bei u. s. w.

Diese Schreibart scheint den Volksstämmen, welche der syrischen Sprache sich bedienten, ziemlich lange beigeblieben zu sein. Offenbar mit Recht hat Rüdiger eine in syrischen Handschriften des 6. und 7. Jahrhunderts oft vorkommende Bezeichnung damit in Verbindung gebracht.[481]) Diese letztere (**Figur 49**) geht indessen nur bis zu 100, wird wenigstens nicht weiter angegeben. Bis dahin aber ist die Aehnlichkeit mit den palmyrenischen Zahlzeichen augenfällig sowohl in der Art der Zusammensetzung als in den einzelnen Elementen; neu ist nur die Vereinigung von zwei Strichen zu einem einzigen Zuge einem um einen rechten Winkel gedrehten modernen Zweier ähnlich.

Aber neben diesen Zahlzeichen bedienten sich die Syrer noch einer Schreibart mittelst der Buchstaben ihres Alphabetes,[482]) welche der bei den Hebräern gewöhnlichen nahe steht. Die 22 Buchstaben, welche ihr Alphabet gleichfalls enthält, mussten auch wieder als Zeichen für 1 bis 400 dienen. Dann aber wurden 500 bis 900 durch die Buchstaben dargestellt, welche ursprünglich 50 bis 90 waren, indem man nur noch einen Punkt über sie setzte, der sie sonach verzehnfachte, wie wenn wir heute zu Tage rechts von einer Zahl noch eine Null beifügen. Tausende schrieb man durch Einer mit unten angefügtem Komma, welches bei noch hinzutretenden kleineren Zahlen auch weggelassen werden konnte, weil alsdann die Stelle an der der Buchstabe sich befand seinen erhöhten Werth hinreichend kennzeichnete. Zehntausendfachen Werth ertheilte den Einerbuchstaben ein kleiner daruntergesetzter Horizontalstrich; endlich vermillionfacht oder tausendmal vertausendfacht wurden diese Charaktere durch doppeltes Komma, von denen aber wohl zur grösseren Deutlichkeit das Eine von links nach rechts, das Andere von rechts nach links geneigt ist. Auch eine Unterscheidung der Zahlen von Worten war nothwendig und leicht durchführbar, indem man zu Zahlzeichen nur die Schlussformen anwandte, deren im Syrischen jeder Buchstabe eine besitzt, nicht bloss einige Buchstaben, wie wir es vom Hebräischen wissen. Dass aber die Benutzung der Finalbuchstaben genügte, um die Zahl als solche hervorzuheben, ist an sich klar, da unmöglich ein Wort aus lauter Finalbuchstaben bestehen kann.

Ich kehre nun wieder zu den Arabern zurück. Neben einer alten Schrift, die wie gesagt fast spurlos verschwand, entwickelte sich bei ihnen eine neue Schrift um die Mitte des 7. Jahrhunderts, welche zunächst dazu angewandt wurde, den Koran zu schreiben. Die Schreibkunst gelangte bei diesem heiligen Zwecke bald zu höherem Range, Abschreiber von Profession entstanden, und da diese besonders zahlreich und geschickt in dem 639 am Euphrat erbauten Kufa sich ausbildeten, so erhielt die Schrift den Namen der kufischen. Am Anfange des 10. Jahrhunderts veränderte sich diese doch immer noch grobe und rohe Schrift, welche man mit einem Stifte oder einer ungespaltenen Röhre zu schreiben pflegte, besonders unter dem Einflusse des Ebn Mocla von Bagdad zu jener flüchtigen Currentschrift, welche heute noch im Oriente dient und in Druckwerken nachgeahmt wird. Sie führt den Namen Niskhi-Schrift oder Schrift der Abschreiber, und wurde, seit man sich gespaltener Rohrfedern zu ihrer Darstellung bediente, immer feiner und eleganter, bis sie unter den Händen kunstfertiger Kalligraphen eine Menge Abarten hervorbrachte, welche zum Theil sehr bedeutend von einander abweichen. So hörte die Schreibkunst fast auf, eine Kunst zu sein und erweiterte sich zu einer besonderen sorgfältig cultivirten Wissenschaft, die in der encyclopädischen Uebersicht der Wissenschaften voran steht. Ja ein arabischer Schriftsteller Ibn-el-abwab hielt es für einen seiner Muse nicht unwerthen poetischen Stoff, ein Lehrgedicht über die Kunde der Schreibmaterialien zu verfassen.

Die Buchstaben des arabischen Alphabetes waren ursprünglich die nämlichen 22, welche wir schon einigemal kennen lernten, und wurden ganz ebenso geordnet, eine Ordnung, der man den Namen Abudjed durch Verbindung der drei ersten Laute beilegte, in ähnlicher Weise wie man Abece und Alphabet sagt. Als die Niskhi-Charaktere sich bildeten, verliess man jedoch diese alte Reihenfolge, um die Buchstaben kalligraphisch zu ordnen, d. h. so dass die einander ähnlichen Schriftzeichen neben einander gestellt wurden. Der Araber besitzt dadurch eine doppelte Folge der Buchstaben, eine moderne und eine alte, welche, wie wir sogleich sehen werden, bei der Bezeichnung der Zahlen noch von Wichtigkeit ist.

Dass die Schreibart der Zahlen bei den vielfachen Veränderungen der ganzen Schrift auch verschiedene Phasen durchmachte, ist nicht mehr als natürlich. Vor Allem liebten es die

Araber, *die Zahlwörter selbst vollständig zu schreiben*, und sie sollen diese Methode, wenn man das eine Methode nennen kann, besonders bei solchen Zahlen oft anwenden, die das erste Tausend überschreiten.[473]) Aus ihr wohl entstanden die sogenannten *Diwani-Ziffern*, welche Silvestre de Sacy einem arabisch-persischen Wörterbuche entnahm,[483]) und welche nur abgekürzte Zahlwörter sein sollen. Am klarsten stelle sich dieses durch den Umstand heraus, dass bei Zahlen, die aus Hunderten, Zehnern und Einern bestehen, die Einer zwischen den Hunderten und den Zehnern ihren Platz finden, wie es in der Aussprache auch sei, und wie etwa das deutsche drei hundert sieben und vierzig u. s. w. uns klar machen kann.

Ausserdem bedienten sich die Araber ihrer *in der Reihenfolge Abudjed geordneten Buchstaben* in derselben Weise wie die übrigen Semiten, um die Zahlen von 1 bis 400 darzustellen. So blieb auch ihnen die Schwierigkeit der Hunderte von 500 an zu überwinden. Zum Theil halfen sie sich so wie anfangs die Hebräer, sie benutzten zwei auch drei Buchstaben zugleich. Später und vielleicht erst vom 11. Jahrhundert an[484]) ersann man ein neues Mittel. Wie nämlich im Hebräischen gewisse Buchstaben existiren, welche in zweierlei Aussprache mit und ohne Aspiration vorhanden sind, so giebt es auch im Arabischen sechs Charaktere von doppelter Lautbedeutung. Man unterscheidet sie durch Punkte, welche desshalb *diakritische Punkte* genannt werden, und die auch in anderen Sprachen ihre Analoga besitzen. Ich erinnere an die kleinen Buchstaben ſ und i der deutschen Currentschrift, welche im Grunde auch nur durch einen solchen diakritischen Punkt sich unterscheiden. Die sechs neuen arabischen Buchstaben wurden nun den 22 schon vorhandenen beigefügt, und lieferten in dieser Weise nicht nur Zeichen für die Hunderte 500 bis 900 sondern, da jetzt ein Zeichen überschüssig war, auch noch für 1000. Die Zahlen wurden selbstverständlich nach derselben linksläufigen Weise geschrieben, wie ich es gleichfalls schon an verschiedenen orientalischen Beispielen auseinandersetzte, und um Zahlen und Wörter zu unterscheiden, nahm man entweder zu einem die Zahlen überdeckenden Horizontalstriche seine Zuflucht, wie es die Griechen thaten, oder man folgte dem Beispiele der Syrer und benutzte lauter Finalbuchstaben, deren die Araber auch für jedes Lautzeichen einen besitzen.

Es ist auffallend genug, dass zu der Zeit, in welcher diese Bezeichnung der Zahlen bei den Arabern sich mehr und mehr vervollkommnete, eine andere Bezeichnung sich bereits bei ihnen eingebürgert hatte, deren der Wortschrift entgegengesetzte Richtung von der Linken zur Rechten absteigend hinlänglich beweist, dass hier in der That ein Fremdländisches vorliegt. Diese Bezeichnungsweise ist aber keine andere als die der Positionsarithmetik. Man hat sich mit Recht Mühe gegeben, einige Sicherheit darüber zu erhalten, wann dieselbe bei den Arabern zuerst auftrat. Libri erzählt, der Chalif Welid I habe im Jahre 699 das Verbot ergehen lassen, griechische Schriftzüge zu benutzen, und habe dabei nur eine Ausnahme bei den Zahlzeichen gestattet, wegen der Schwierigkeit, welche die alte arabische Arithmetik darbot.[485]) Das ist nun allerdings nicht ganz genau berichtet, allein der von Libri angegebene Sinn liegt doch nahezu in den von ihm citirten Autorenstellen, und so kann man wohl die Folgerungen ziehen, dass um das Jahr 700 die Araber weder die Zahlbezeichnung durch Buchstaben ihres eigenen Alphabetes besassen, wie es uns nach dem bisherigen Inhalte dieses Kapitels gar nicht in Erstaunen setzen kann, noch auch die Zeichen der Positionsarithmetik; oder dass diese letzteren wenigstens nicht Volkseigenthum waren; dass dagegen griechische Buchstaben als Zahlzeichen bekannt waren, dass also höchst wahrscheinlich auch griechische Rechenkunst mit der griechischen Schreibart der Zahlen eingedrungen war. Freilich ist auch hierbei von keinem Eindringen in alle Schichten des Volkes im Entferntesten die Rede, denn sonst könnte Theophanes bei der Erwähnung jenes Verbotes nicht hinzugesetzt haben, dass christliche Schreiber zum Zwecke der Buchführung immerwährend unentbehrlich waren. Haben wir nun damit nur eine negative Angabe gewonnen, so drängen sich die positiven Mittheilungen seit dem Anfange des 9. Jahrhunderts.

Massoudi, der, wie im 4. Kapitel (S. 57) erzählt wurde, um das Jahr 900 lebte, schreibt den Indern die Erfindung dieser Ziffern zu.[106]) Fast ein Jahrhundert früher verfasste Mohammed ben Musa Alkharezmi am Hofe Al-Mamuns eine Algebra[486]) und eine Schrift über Arithmetik,[487]) in welchen beiden die Positionsarithmetik, d. h. also die neun Zahlzeichen nebst der Null in ihrer stellenausfüllenden Anwendung benutzt werden. In der Mitte desselben neunten Jahrhunderts schrieb Alkindi eine Arithmetik

und ausserdem eine Abhandlung über den indischen Calcül und gleichzeitig mit ihm ist die ebenso betitelte Schrift des Sind ben Ali.[488]) Diese übereinstimmenden Berichte zusammen mit vielen anderen, die ich theils schon früher anführte, theils für überflüssig halte bei dem allgemein verbreiteten Glauben an das, was sie enthalten, beweisen nun in der That, dass die Araber Zahlzeichen von den Indern kennen lernten. Für mich war das Zusammentreffen vieler Berichte allerdings nothwendig, da mir Massoudis Mittheilung durchaus nicht genügt hätte. Scheut sich dieser in seinem Enthusiasmus für indische Wissenschaft doch nicht den Almagest des Ptolemäus für das Werk eines Inders auszugeben, welches Almagist heisse.[489]) Aber jedenfalls scheint auch in dieser späteren Zeit das indische Ziffernsystem weit mehr Eigenthum einiger Gelehrten als der Gesammtheit gewesen zu sein, da sonst die Entwicklung der vorhin besprochenen Zahlschreibung durch Buchstaben, die ihrer ganzen Natur nach eine volksthümliche gewesen sein muss, nicht erklärlich wäre. Mit dieser nur vereinzelten Verbreitung stimmt es auch überein, wenn Avicenna um das Jahr 1000 noch[490]) von seinem Vater zu einem mit dem indischen Calcül bekannten Oelhändler geschickt wurde, um bei ihm sich darin zu unterrichten,[491]) nachdem er bei einem anderen Lehrer schon in anderen Gegenständen wunderbare Fortschritte gemacht hatte; der beste Beweis dass also jener erste Lehrer den Rechenunterricht zu ertheilen nicht verstanden haben muss, weil sonst doch kein Grund vorhanden war, ihn zu verlassen.

Betrachten wir jetzt die Charaktere (**Figur 50**), welche als indische Ziffern von den Arabern selbst benannt werden, so erstaunen wir, solche Zeichen zu finden, welche mit den von uns aus Indien her kennen gelernten (**Figur 21, 22 u. 23**) kaum irgend eine Aehnlichkeit besitzen,[492]) die dagegen eine Vergleichung aushalten sowohl mit arabischen Buchstaben einestheils als mit den Zeichen des Boethius, also mit pythagorischen Zeichen anderntheils. Wenn man nun den Namen indischer Ziffern nicht in Abrede stellen kann, wenn aber die Ziffern nichts weniger als indisch aussehen, so muss sich wohl die Frage aufdrängen, ob es nicht möglich wäre, eine Erklärungsweise zu finden, die beiden Eigenthümlichkeiten des Namens und der Gestalt gerecht wäre. Bei der zu Anfang dieses Kapitels schon bedauerten Mangelhaftigkeit meines Wissens habe ich gewiss

nicht das Recht, auch nur den Versuch einer solchen Erklärung zu wagen. Nur soviel erlaube ich mir, jene Frage in dieser öffentlichen Weise allen wirklichen Sachverständigen zur Beantwortung vorzulegen und noch einige weitere Fragen daran zu knüpfen. Ist es wahr dass, wie mitunter angegeben wird, die sogen. indischen Ziffern der Araber aus Persien ihnen zukamen? Ist es nicht möglich, dass diese persischen Ziffern ebensowohl von Buchstaben stammten, wie wir dieses von anderen Zahlzeichen wissen und dass dadurch die Analogie mit den pythagorischen Zeichen darauf beruht, dass auch diesen ein babylonisch-persischer Ursprung zugeschrieben werden müsste? Oder ist es gar möglich, dass arabische Gelehrte auf dem im letzten Kapitel angedeuteten Wege von Alexandrien aus mit den pythagorischen Zeichen bekannt geworden wären?

Lässt irgend eine von diesen beiden Alternativen sich näher begründen, dann wäre es sehr wohl denkbar, dass aus Indien die Null noch hinzutrat, welche alsdann in Verbindung mit den schon vorhandenen Zeichen und mit den indischen Rechenmethoden allmälig Volkseigenthum wurde, und dass der Name indische Ziffern sich mehr auf die Rechenmethoden bezieht, welche mit ihnen und nur mit ihnen bekannt wurden. Nur dann, also nur wenn die Null zu den schon vorhandenen 9 anderen Zeichen hinzutrat, mochte dieses in Persien oder Arabien geschehen sein, begreift man, wie die Null bei ihrem Uebergange ihre Gestalt veränderte, so dass sie aus dem ursprünglichen Ring in einen Punkt sich verdichtete, weil eben der Ring schon vorweggenommen war durch das Zeichen für fünf. Nur so erklärt sich ferner, dass die Null oder der sie vertretende Punkt von den Arabern zwar stets in Verbindung mit den 9 andern Zahlzeichen aber nicht immer in der Verbindung angewandt wurde, welche den Indern die einzig bekannte war. Ich meine damit die Ausnahme, welche die sogenannte Gobarschrift oder Staubschrift darbietet. In ihr stehen über jeder Ziffer so viele Punkte, als wir heute ihr Nullen nachsetzen würden, um ihre Stelle zu definiren, und diese Punkte schrieb man auch dann noch, wenn die Zahl nicht bloss aus einer einzigen Ziffer bestand. Die Gobarschrift, deren den pythagorischen Zahlzeichen ähnliche Ziffern ich schon früher mittheilte (**Figur 45**), stellte also z. B. 1436 so dar, dass sie die 3 mit einem Punkte, die 4 mit zwei, die 1 mit drei Punk-

ten bedeckte, während die Richtung, in welcher diese Ziffern nebeneinander standen, die dem semitischen Gebrauche zuwiderlaufende war. Silvestre de Sacy entdeckte die Gobarschrift in einem Manuscripte der pariser Bibliothek und machte sie 1810 in seiner noch immer mustergültigen arabischen Grammatik zuerst bekannt.[483]) Dann widmete ihr Alexander von Humboldt, wie er selbst sagt,[493]) seit 1818 seine ganze Aufmerksamkeit. Leider hat er nicht angegeben, ob irgend welche Resultate seine Forschungen belohnten. Vorläufig ist sowohl die Zeit, zu welcher, als auch der Ort, an welchem die Gobarschrift in Gebrauch war, durchaus unbekannt. Wenn also Friedlein[494]) lieber glaubt, der Gobar habe in Spanien sich gebildet, und sei bis in das 10. Jahrhundert und vielleicht noch später dort gebraucht worden; wenn dagegen Gerhardt[495]) angiebt, die jüdischen Commentatoren der Kabbala und die jüdischen Mathematiker des frühen Mittelalters schienen sich vorzugsweise der Gobarziffern bedient zu haben, so schwebt die eine Annahme ebenso in der Luft wie die andere, nur für mich mit dem Unterschiede, dass wenn denn doch die Wahl frei steht, die Gerhardtsche Hypothese mir besser gefällt, weil sie zu meinen übrigen Ansichten passt. Jedenfalls aber muss uns die Gobarschrift in der Ueberzeugung bestärken, dass als die Null den Arabern bekannt wurde, oder wer sonst jener Schrift sich bediente, die 9 anderen Zeichen schon landesüblich waren, denn sonst hätte die indische Null mit indischen Ziffern in der Anwendung bekannt werden müssen, in welcher sie eine eigentlich leere Stelle ausfüllt und in derselben Zeile wie die eigentlichen Werthziffern geschrieben wird, nicht aber in einer so heterogenen Verwendung, welche viel mehr Aehnlichkeit mit jenen multiplicativen Punkten besitzt, die wir bei den griechischen, den lateinischen, den hebräischen Zahlzeichen, zuletzt noch verzehnfachend also genau der Gobarschrift entsprechend bei einigen syrischen Zeichen kennen lernten.

Man hat die Meinung zu rechtfertigen gesucht, die Schreibweise der Zahlen, wie sie im Gobar vorkommt, sei noch ziemlich lange beibehalten worden. Noch im 14. Jahrhunderte[496]) sei sie von dem Mönch Neophytus in einem durch Humboldts Veröffentlichung[497]) bekannt gewordenen Scholion benutzt. Das hat allerdings seine Richtigkeit, aber gleichwohl sehe ich nicht ganz, welcherlei Folgerungen man daraus ziehen will. Am allerwenigsten

darf man aus den Worten des Neophytus schliessen, dass wirkliche Inder jemals diese Schrift besassen. Denn gleichzeitig wie er jene Schreibart indisch nennt, findet er auch in Tsyphra ein indisches Wort, während es, wie ich am Schlusse des vorigen Kapitels schon angab, arabisch ist. Neophytus kann also unter indischen Ziffern nur solche meinen, welche bei den Arabern unter diesem Namen bekannt sind, kann nur aus diesen secundären Quellen geschöpft haben.

Da also die Zeichen selbst und die Schriftsteller, welche von ihnen erzählen, wie gesagt, in einem Widerspruche stehen, den zu lösen ich mich nicht berechtigt fühle, so bleibt mir nur eine Betrachtung noch übrig, die zwar über den Ursprung nicht entscheiden kann, aber um so bessere Einsicht in die Fortpflanzung uns gewährt; ich meine die Betrachtung arabischer Rechenkunst, so weit das geringe mir zu Gebote stehende Material sie ermöglicht.

XVIII. Arabische Rechenkunst.

Seit Almansur[498]) gegen 770 Bagdad auf den Trümmern des alten Babylon erbaute, ward diese Stadt zum wiederholten Male der Sitz einer hochaufstrebenden Bildung. Schon unter seiner Regierung sammelten sich in der Stadt des Friedens, wie die neue Residenz genannt wurde, Gelehrte aus den verschiedensten Gegenden. Theils waren es gelehrte Inder, welche, wie Reinaud berichtet, Werke über Astronomie seit 773 mitbrachten, theils waren es aber auch nestorianische Christen,[499]) welche in der Stellung als Leibärzte der Khalifen gar bald zu hohem Ansehen gelangten und ihren Einfluss zum Besten wissenschaftlicher Entwicklung auf griechischer Grundlage verwandten; denn es ist unzweifelhaft, dass auch Werke griechischer Sprache schon damals in's Arabische übersetzt wurden. Dieselbe Richtung wurde unter Almansurs Nachfolgern, insbesondere unter den beiden nächsten Khalifen beibehalten. Ist es doch allgemein bekannt, dass Harun-al-Raschid Dichter und Dichtkunst liebte und hegte, dass auch sein Eifer für die Wissenschaft kein geringer war, dass er Verbindungen mit dem fernen Westen anknüpfte und in gegenseitigen Geschenken mit Karl dem Grossen solche Werke austauschte, die für den Standpunkt der Mechanik und der Astronomie in der damaligen Zeit von Interesse sind. Begnügte er sich doch nicht mit diesen theils politischen, theils wissenschaftlichen Gesandtschaften, sondern liess 300 Gelehrte auf seine Kosten reisen, damit sie neues Wissen mitbrächten. Al-Mamun brachte alsdann während der zwanzigjährigen Dauer seines Khaliphats von 813 bis 833 die bisher schon blühende Wissenschaft zur Reife. Er gründete eine Akademie in Bagdad, Schulen in Bassora, Kufa und Bokhara. Er verlangte von dem griechischen

Kaiser Theophilus den damals berühmten Philosophen und Mathematiker Leo, den ihm zwar jener nicht überliess, aber der Wunsch des Khalifen schon bezeugt, wie hoch er grade griechische Bildung schätzte. Unter seiner Regierung fing man an in systematischer Weise Bücher aus fremden Sprachen ins Arabische zu übersetzen, und wenn Massoudi unter Anderen auch von aus dem Indischen übertragenen Büchern spricht,[500]) so stimmen alle Zeugnisse überein,[501]) dass unter Al-Mamun griechische Mathematik bei den Arabern mehr und mehr sich verbreitete. Aristoteles, Euclid, Archimed, Apollonius, Ptolemäus wurden jetzt übersetzt, und es ist bekannt genug, dass einige dieser Schriften dem Occidente erst durch Rückübersetzungen aus dem Arabischen wieder in Erinnerung gebracht wurden.

Wenn aber grade auch Schriftsteller der alexandrinischen Schule von den Arabern studirt wurden, kann dann ein gerechter Zweifel obwalten, ob die Araber mit pythagorischen Zeichen bekannt wurden? Ich muss gestehen, mir käme es sehr wunderbar vor, wenn die Araber grade daran vorbeigegangen wären, und so bestärkt mich Alles in meiner subjectiven Meinung, dass die Araber die neun Zahlzeichen entweder von den Alexandrinern oder aus direct orientalischen Quellen schon besassen, als die indische Arithmetik zu ihnen drang. Ich könnte noch auf eine Stelle des Mohammed ben Musa mich berufen, von der bald die Rede sein wird,[514]) sowie auf eine fast gleichlautende des Albyruny,[502]) wo er sagt, in den verschiedenen Provinzen Indiens sähen die Zahlzeichen verschieden aus, und nun hätten die Araber aus allen diesen Zeichen eine Auswahl getroffen und nur die passendsten genommen. Man sieht auf den ersten Blick, wie unwahrscheinlich dieses ist. Wenn man ganz Neues lernt, so hat man nicht die Unbefangenheit einer Wahl. Man nimmt in sich auf, was einem eben vom Lehrer mitgetheilt wird. Albyrouny suchte sich offenbar nur zu erklären, wie es kam, dass arabische Ziffern und wirklich indische Ziffern so ganz verschieden waren, und doch der Name indischer Ziffern auch für jene volksthümlich geworden war. Er giebt überdies seinen Erklärungsversuch nur ganz nebenbei, und meint gleich darauf, auf die Gestalt der Zeichen komme es überhaupt nicht an, wenn man sich nur gegenseitig verstehe. Zudem stünde es gar nicht vereinzelt da, wenn der Name indischer Ziffern wirklich daher rührte, dass die Ziffern zugleich mit der Null und

mit indischer Rechenkunst in's Volk drangen. Solche eigentlich falsche Benennungen kommen vor. Bei den Arabern selbst heisst ein griechisches, dem Proklus entnommenes astronomisches Instrument der indische Kreis,[503] die Regeldetri heisst chataische, d. h. vielleicht chinesische Rechnung,[504] während die Proportionenlehre in jenen griechischen Werken in grösster Vollständigkeit vorhanden war, also sicherlich wohl dorther bekannt wurde, bevor der chinesisch-arabische Verkehr bedeutenderen Aufschwung nahm. Ja ich möchte den in Deutschland gangundgeben Namen der arabischen Ziffern selbst als ein Analogon falscher Benennung anführen, zu dem man kam, weil die eigentliche Positionsarithmetik, welche mit den vorher schon vorhandenen Ziffern geübt wurde, durch arabische Vermittelung nach Europa gelangte.

So bin ich wieder bei dem Gegenstand angekommen, den ich eigentlich in diesem Kapitel besprechen wollte, bei der arabischen Rechenkunst. Leider stehen mir dabei nur drei Schriften zu Gebote, die aber vom Zufalle glücklich genug gewählt sind; eine Abhandlung aus dem Beginne der arabisch-mathematischen Literatur, eine zweite welche die Fortschritte der Rechenkunst bei den spanischen Arabern kennen lehrt, eine dritte welche denselben Zweck für die im Mutterlande gebliebenen Araber erfüllt.

Ich habe früher gesagt, dass Mohammed ben Musa zu Anfang des neunten Jahrhunderts am Hofe des Khalifen Al-Mamun zu Bagdad lebte und auf dessen Geheiss zwei Schriften verfasste, deren eine die Algebra, die andere die Arithmetik zum Gegenstande hatte. Jene,[486] beiläufig bemerkt das älteste Buch welches den Titel Algebra führt, hat mit eigentlichem Zahlenrechnen nur wenig zu thun; um so wichtiger war für diesen Zweck die zweite Schrift.[487] Nicht bloss dass Casiri sie die kürzeste und leichtverständlichste Darstellung indischer Methoden nennt, wir haben auch Beweise, dass die gesammte spätere arabische Rechenkunst diese Schrift als Musterwerk anerkannte, ja dass sie mit derselben Autorität die spätere europäische Rechenkunst beeinflusste, nachdem einmal arabische Schriften bekannt geworden waren. Und zwar finde ich diese Beweise theils in dem Namen des Verfassers, theils in dem Inhalte seines Werkes.

Mohammed ben Musa war in Kharizm geboren, und führte desshalb unter seinen Landsleuten den Namen Alkharezmi.[505] Als später dieser Name in den Uebersetzungen latinisirt wurde, er-

fuhr er mancherlei Umlaute. Bald findet man Alchoarismus,[506]) dann wieder Alkauresmus, ja sogar das barbarische Alchocharithmus[507]) kommt vor. Alle diese Aussprachen erinnern bald mehr bald weniger an das Wort Algorithmus, mit welchem die moderne Mathematik jeden Rechenmechanismus zu bezeichnen liebt. Ursprünglich war aber die Bedeutung dieses Namens eine viel enger umschriebene.[508]) Man verstand darunter wirklich die Rechenmethoden, welche Mohammed ben Musa Alkharezmi gelehrt hatte, oder kurz gesagt man verstand darunter die Positionsarithmetik. Der Ursprung des Namens war allerdings seit früher Zeit verloren gegangen, und schon seit dem 13. Jahrhundert etymologisirte man auf's Künstlichste an demselben herum. Chasles hat eine Anzahl solcher sprachlichen Taschenspielereien gesammelt,[509]) welche er in Manuscripten der verschiedenen pariser Bibliotheken auffand, und auch in den von Halliwell herausgegebenen englischen Manuscripten ist Material genug vorhanden.[510]) Da sagt Einer, das Wort kommt von alleos fremd und goros Betrachtung, weil es eine fremde Betrachtungsweise ist. Nein, sagt der Zweite, es kommt von argis griechisch und mos die Sitte, es ist eine griechische Sitte. Der Dritte kommt zu ares die Kraft und ritmos die Zahl. Ein Vierter sieht in algos ein griechisches Wort, welches weissen Sand bedeute, und daher der Name, denn die Rechnung ritmus wurde auf weissem Sande geführt. Einer legt sich das Wort recht bequem auseinander in algos die Kunst und rodos die Zahl. Wenn man diese Ableitungen liest, da wird man so genügsam, dass man schon über diejenigen sich freut, welche wenigstens so viel noch wissen, dass das Wort Algorithmus von einem Männernamen abstamme. Freilich ist ihnen jener Mann bald ein gewisser Algorus aus Indien, bald ein König Algor von Castilien, bald ein berühmter Philosoph mit Namen Algus. Diese letzte Meinung fand ich auch in einem wahrscheinlich eben jener Zeit angehörigen Manuscripte der Darmstädter Hofbibliothek ausgesprochen.[511]) Die moderne Zeit nahm nicht ohne Anschein des Rechtes ihre Zuflucht zu dem arabischen Artikel al, der in Alchimie, Almagest und ähnlichen Wörtern eine Rolle spielt. Dieser nebst dem griechischen arithmos, die Zahl, sollten bei der Zusammensetzung auf eine allerdings nicht recht erklärliche Weise ein g zwischen sich genommen haben und so zu Algorithmus geworden sein. Ueber diese letzte Schwierigkeit glaubte man sich hinaussetzen zu dürfen in Betracht der sonstigen gleich

räthselhaften Verketzerungen, welche nachweisbar arabische Wörter erlitten, wie z. B. semt al râs, Gegend des Kopfes, welches im Laufe der Jahrhunderte in Zenith sich verwandelte. [512]) Bei dieser Etymologie beruhigte man sich, und so war es eine allgemein überraschende und vielfach mit Unglauben aufgenommene Entdeckung, als Reinaud im Jahre 1845 die richtige Ableitung des Wortes Algorithmus von dem Beinamen des Mohammed ben Musa nachwies. [505])

Vollständig gesichert wurde diese Entdeckung erst seit 1857, seitdem durch die Bemühungen des Prinzen Boncompagni eine bis dahin noch unbekannte Handschrift der cambridger Bibliothek dem Drucke übergeben wurde. [513]) Jetzt musste auch der Zweifelsüchtigste sich gefangen geben, indem in jener Handschrift der arabische Gelehrte selbst redend eingeführt wurde, so dass jeder neue Absatz mit den Worten beginnt: „Sprach Algoritmi:“ Die Reinaud'sche Ableitung des Wortes Algorithmus ist aber nicht bloss philologisch interessant. Sie ist noch weit wichtiger in historisch mathematischer Beziehung, weil sie den Beweis liefert, dass dasjenige richtig ist, was ich oben sagte, dass nämlich die Rechenkunst des Mohammed ben Musa als Muster für viele Jahrhunderte galt, dass sie etwa eine ähnliche Beeinflussung ausübte, wenn auch nicht ganz in demselben Maassstabe, wie die Geometrie des Euclid. Es wäre sonst undenkbar, dass die Positionsarithmetik grade mit dem Namen Algorismus so enge verwachsen wäre, als es geschah.

Die wichtigste Frage wäre jetzt zunächst, welchem Verfassser man jene von Boncompagni herausgegebene Abhandlung zuzuschreiben habe. Chasles, welcher sich diese Frage stellte, findet den Inhalt der Abhandlung so übereinstimmend mit dem Urtheile, welches Casiri über die Arithmetik des Mohammed ben Musa fällt, [487]) dass er nicht ansteht sich der Meinung hinzugeben, hier liege eine wörtliche Uebersetzung jener Arithmetik vor. Ja er geht noch weiter und findet in dem Umstand, dass die Uebersetzung bisher nur in Cambridge aufgefunden wurde, sowie in der Thatsache, dass Atelhart von Bath, jener englische Mönch, welcher um 1120 die erste Uebersetzung des Euclid aus dem Arabischen unternahm, auch eine Uebersetzung von Mohammed ben Musas astronomischen Tabellen verfertigte, Wahrscheinlichkeitsgründe genug, um wenigstens hypothetisch denselben Atelhart als Urheber der kleinen arithmeti-

schen Abhandlung anzusetzen. Ich bin sehr geneigt, beiden Annahmen beizupflichten,[513a]) und bin jedenfalls davon überzeugt, dass wenn wir keine wörtliche Uebersetzung des Mohammed ben Musa vor uns haben, es mindestens eine nur sehr unbedeutend veränderte Bearbeitung ist, welche im Cambridger Manuscripte sich darbietet. Allerdings sind dieses nur subjective Meinungen, und eine Vergleichung des arabischen Originals bleibt darum nicht weniger wünschenswerth, aber dennoch glaube ich, dass diese Meinungen auch jetzt schon für die Leser dieses Buches plausibel werden, wenn ich den *Inhalt der lateinischen Abhandlung* etwas näher angebe.

Sie füllt im Drucke 23 Seiten. Nach ächt arabischem Preisen und Anrufen des Lenkers der Dinge wird die Numeration gelehrt, welche die Inder mit Hülfe von 9 Charakteren ausführen, die dazu dienen, die grösste wie die kleinste Zahl darzustellen, und so die Arbeit und Mühe zu erleichtern. In Bezug auf die Zeichen herrscht Verschiedenheit unter den Menschen,[514]) eine Verschiedenheit, welche zumal bei der 5, der 6, der 7 und der 8 auftritt. Alle Zahlen sind, wie es schon in des Verfassers Buche von der Algebra eröffnet wurde, auf Grundlage der Einheit zusammengesetzt. Die Einheit selbst ist Wurzel jeglicher Zahl und ausserhalb der Zahl. Die 9 Zeichen können nun an verschiedenen Stellen sich befinden, welche *Differenzen* genannt werden. Soll eine Differenz leer bleiben, so zeigt man dieses durch einen kleinen Kreis an, ähnlich dem Buchstaben o, um zu erweisen, dass keine andere Zahl an dieser Stelle auftritt. Diese Darstellungsweise der Zahlen ist alsdann noch an Beispielen mit solcher Weitläufigkeit erörtert, dass volle 7 Seiten dadurch in Anspruch genommen werden, ein sicheres Zeichen, dass hier ein verhältnissmässig Neues, noch Ungewohntes erläutert wurde.

In dem soweit Angegebenen sind, wie mir scheint, neben der überraschenden Anwendung des Wortes Differenz noch drei Momente besonders bemerkenswerth. Erstens *das Citat der Algebra*, indem hierdurch die Identität des Verfassers des arabischen Originals festgestellt wird. Ausser Mohammed ben Musa führte nämlich auch *Albyrouny* den Beinamen Alkharezmi[505]) und war Verfasser einer Arithmetik. Man konnte daher im Zweifel sein, ob der erste oder zweite Alkharezmi der vorliegenden Abhandlung zum Originale diente, und dieser Zweifel wird aufs Gründlichste durch die Anfüh-

rung der Algebra beseitigt. Eine solche schrieb nur Mohammed ben Musa von den beiden Genannten. Zweitens war mir die Stelle interessant, dass die Inder der neun Zeichen sich bedienen, dass aber in Bezug auf die 9 Zeichen selbst unter den Menschen Verschiedenheit herrsche. Ich habe Aehnliches aus Albyrouny schon hervorgehoben, und wenn meine Grundhypothese richtig ist, so haben wir hier ein hübsches Beispiel vor uns, wie richtige Ansichten allmälig verschwinden können. Mohammed ben Musa könnte darnach noch gewusst haben, dass ausser bei den Indern auch noch bei anderen Völkern neun Zeichen existirten, dass nur die Methode, welche er erläutern wollte, indisch war. Albyrouny hingegen kannte nur jene nicht abzuleugnende Verschiedenheit der Zeichen, wusste aber über deren Vaterland nicht mehr das Nähere anzugeben und hielt sie sämmtlich für indisch. Endlich drittens wird die der Einheit eingeräumte Sonderstellung nicht zu übersehen sein. Sie beruht auf einer durchaus pythagorischen Ansicht, wie schon mehrfach hervorgehoben wurde; sie findet sich, und das ist vielleicht von Wichtigkeit für den Weg, den diese Lehren einschlugen, genau in derselben Form bei den Anhängern der jüdischen Kabbala; sie zeigt also wie die Araber in den Anfängen ihrer mathematischen Litteratur nicht auf Indisches allein sich zurückbeziehen.

Es folgt nun in der Abhandlung die Addition und die Subtraction. Bei Ersterer wird wie nothwendig ein besonderes Gewicht auf den Fall gelegt, bei welchem die Summe der Ziffern an einer Stelle 9 übersteigt. Dabei heisst es, man müsse die Zehner der folgenden Stelle zurechnen und an der ursprünglichen Stelle nur das schreiben, was unterhalb 10 noch übrig bleibt. „Bleibt Nichts übrig, so setze den Kreis, damit die Stelle nicht leer sei; sondern der Kreis muss sie einnehmen, damit nicht durch ihr Leersein die Stellen vermindert werden und die zweite für die erste gehalten wird.“ [515]) Bei der Subtraction wie bei der Addition soll man bei der höchsten Stelle, also links anfangen, dann zur nächstfolgenden übergehen, weil dadurch die Arbeit, so Gott will, nützlicher und leichter wird. Die dritte Operation ist das Halbiren, welches in der umgekehrten Ordnung bei der niedersten Stelle zu beginnen hat, das Verdoppeln hingegen, die vierte Operation, beginnt wieder von oben. Hierauf lässt der Verfasser die Beschreibung der Multiplication folgen, welche an Ausführlichkeit Nichts zu wünschen übrig lässt. Von deren Richtigkeit

kann man sich durch die Neunerprobe überzeugen. Dieses Verfahren, welches auch heute noch in Lehrbüchern der Rechenkunst sich findet, wenn auch die praktische Anwendung nur selten gemacht werden dürfte, besteht darin, dass man die beiden mit einander zu multiplicirenden Factoren durch 9 theilt, die dabei auftretenden Reste mit einander multiplicirt, deren Product wieder durch 9 theilt und alsdann zusieht, ob dieser letzte Rest genau derselbe ist, welcher entsteht, wenn man das zu prüfende vollständige Product der beiden anfänglichen Factoren durch 9 theilt.

So gelangen wir zur Seite 13, auf welcher die Lehre von der Division erscheint. Ich war, als ich die Abhandlung zum erstenmale las, am begierigsten auf dieses Kapitel, und meine Leser theilen vielleicht diese Begierde zu wissen, ob hier diejenige Methode gelehrt wird, welche Boethius besass. Von vorn herein war dieses zweifelhaft. Wenn die Araber Anderes von den Griechen entlehnten, und dass sie dieses thaten ist unbedenklich zu bejahen, so konnten sie ebenso gut auch eine Divisionsmethode sich aneignen, welche nach meiner Annahme bei einigen, vielleicht bei einem Griechen zu finden war. Es ist alsdann noch gar Nichts gegen die Ansicht vom griechischen Ursprunge der Geometrie des Boethius bewiesen. Als mächtiges Gewicht für diesen Ursprung fällt dagegen in die Wagschale, wenn der arabische Schriftsteller, der allen folgenden als Muster diente, jene Methode nicht kennt, und das ist der Fall. Es ist doch wohl nicht anzunehmen, dass der Uebersetzer unserer Abhandlung grade eine Methode weggelassen hätte, welche, wie wir noch sehen werden, im christlichen Europa damals weit verbreitet war, und bei allen Autoren des 11. Jahrhunderts sich findet. Diese Methode hätte er, wenn sie im Originale sich fand, ganz gewiss mit besonderer Vorliebe behandelt. Statt dessen findet sich in unserer Abhandlung die Division nur nach der auch heute noch gewohnten Methode gelehrt, die an mehreren Beispielen geübt wird.

Im Anschlusse an die Division kommt der Verfasser zu den Brüchen und bemerkt, die Inder hätten sich der sechzigtheiligen Brüche bedient, sie hätten die Einheit in 60 Minuten, die Minute in 60 Secunden, jede von diesen wieder in 60 Tertien zerlegt, und in dieser Weise fortfahrend wären sie zu immer kleineren Bruchtheilen gekommen. Wir wissen aber, dass diese selbe Sexagesimaltheilung den Alexandrinern diente, dass Ptolemäus sie bei seinen astronomischen Rechnungen zu Grunde legte. Also

wieder ein Beispiel, dass von arabischer Seite den Indern zugeschrieben wird, was diese selbst aus griechischer Quelle erhielten, was auch den Arabern zugleich durch Griechen bekannt geworden sein konnte. Hier nämlich wird wohl nicht leicht an eine selbstständige Doppelerfindung zu denken sein, da die Zahl 60 eine künstliche, nicht eine von der Natur gegebene ist, wie etwa die Zehnzahl der Finger.[516]) Die letzten Seiten der Abhandlung sind nun der Rechnung mit diesen Sexagesimalbrüchen gewidmet, wobei aber nichts besonders Bemerkenswerthes mir auffiel.

Wiederhole ich nun das Hauptresultat, welches die Betrachtung des Inhaltes dieser Abhandlung mir lieferte, so besteht es in der freilich negativen aber nicht weniger wichtigen Thatsache, dass Mohammed ben Musa die complementäre Division, wie ich sie der Kürze wegen nennen will, ohne Missverständnisse zu befürchten, nicht kannte, wenigstens sie nicht beschrieb. Nun wäre noch immer möglich, dass diese Methode zu den Fortschritten gehörte, welche arabische Rechenkunst im 9. und 10. Jahrhunderte wohl sicherlich machte, und diese Möglichkeit verlangt nähere Beachtung. Die arabische Wissenschaft bildete sich an zwei Orten gleichzeitig weiter, im Mutterlande und, worauf es uns besonders ankommen muss, in Spanien.[517]) Hier war seit 755 eine arabische Herrschaft unter der im Oriente untergegangenen Dynastie der Ommaijaden entstanden. In unaufhörlichen Kämpfen gegen die westgothischen Christen sowie gegen afrikanische Araber erhob sich diese Dynastie bei dreihundertjährigem Bestande zu unsterblichem Ruhme, rieb sich aber auch vollständig auf. In die Zeit der Ommaijaden fällt die Enstehung aller jener glänzenden Ueberreste maurischer Baukunst, die noch heute den Anschauer mit Bewunderung erfüllen sollen, und die nach den Berichten solcher Schriftsteller, welche sie in ihrer ganzen Pracht sahen, die Wundermährchen der Tausend-und-eine-Nacht zur Wahrheit stempelten. Besonders Abderrhaman III. und sein Sohn Hakem II., welche von 912 bis 976 regierten, fanden Freude an der Herstellung solcher Denkmale ihres Glanzes und der hohen Vollkommenheit, bis zu welcher arabische Baukunst gelangt war. Es ist aber unmöglich, dass die Architektur rein empirisch sich entwickle. Man kann vielmehr im Voraus sagen, dass wo Bauwerke grossartiger Natur vorhanden sind, die nicht grade einem früheren Schema nur nachgebildet sind, auch die theoretische Mathematik und deren

sonstige Anwendungen vielfach gehegt worden sein müssen. So war es auch bei den spanischen Arabern.

Wöpcke hat Auszüge aus einer in dortiger Gegend verfassten Algebra veröffentlicht,[518]) welche in der Notation weit über andere gleichzeitige Schriften sich erhebt; und wenn diese Bruchstücke auch erst aus der zweiten Hälfte des 15. Jahrhunderts datiren, so führt doch Wöpcke ihren Ursprung auf Ibn-Albannâ zurück, welcher um 1200 lebte, und welcher selbst aus den noch älteren Ibn-Almon'am und Alahdab schöpfte. Andrerseits ist Ibn-Albannâs Zeitgenosse Geber von Sevilla genügend bekannt, dessen Name sogar mit der Erfindung der Algebra wegen der Aehnlichkeit des Wortlautes in Verbindung gebracht zu werden pflegte. Es ist das beiläufig ein ganz interessanter Gegensatz, wie man das Wort Algebra von einem Namen herzuleiten sich bemühte, während es einen ganz bestimmten Wortsinn hat;[519]) dem Worte Algorithmus hingegen suchte man einen Wortsinn unterzuschieben, während es ein Name ist. Ueber das Zahlenrechnen und dessen Fortschritte bei dem spanischen Arabern können wir nun in einem zweiten von Boncompagni zum Drucke beförderten Manuscripte uns Rathes erholen,[513]) welches einer pariser Bibliothek angehört.

Die Ueberschrift desselben giebt an, dass es die praktische Arithmetik des Algorismus von Johannes von Sevilla sei. Dieser Gelehrte,[520]) sonst auch Johann von Luna genannt, war aber ein jüdischer Schriftgelehrte des 12. Jahrhunderts, der auf die Bitte Raimunds, des Erzbischofs von Toledo, in Gemeinschaft mit Dominicus Gondisalvi einige arabische Bücher, die sich auf aristotelische Philosophie bezogen, übersetzte, so dass zuerst eine castilianische Bearbeitung und von dieser aus erst wieder eine lateinische erfolgte. Bei solchem Umwege konnten nun leicht manche Mängel der Sprache erscheinen. Ich meine nicht grade philologische Sprachschnitzer, wiewohl auch diese vorgekommen sein mögen; ich meine vielmehr den Mangel, dass bei der in zwei Tempi erlangten Uebersetzung die Herrn Bearbeiter, wenn sie zum lateinischen Texte kamen, mitunter den arabischen Urtext aus den Augen verloren hatten, dass sie jetzt nur das Castilianische möglich getreu wiedergaben, und sich dabei solcher Wörter bedienen wollten, die in ursprünglich lateinisch geschriebenen Abhandlungen ähnlichen Inhaltes auch vorkamen. Ich bin freilich nicht im Stande, diese Behauptung an jenen philosophischen Schrif-

ten zu belegen, aber grade in der vorliegenden arithmetischen Abhandlung tritt die Erscheinung sehr häufig hervor, dass entweder Wörter gebraucht werden, die höchst wahrscheinlich im Urtexe nicht vorkamen, oder dass bei buchstäblicher Uebersetzung mancher Stellen gewisse Wörter auftreten, welche in gleichzeitigen arithmetischen Werken eine ganz andere technische Bedeutung erlangt hatten. Zu den ersten Einschiebungen, wie ich es nennen möchte, gehören die Wörter Finger und Gelenkzahl, welche statt Einer und Zehner gesetzt werden.

Was mich nämlich verleitet, diese Ausdrücke als durch nicht wörtliche Uebersetzung hinzugekommen zu betrachten, ist hauptsächlich der Umstand, dass sie weder in der vorher besprochenen Uebersetzung der Arithmetik des Mohammed ben Musa noch auch in späteren orientalischen Werken vorzukommen scheinen. Ich berufe mich zu diesem Zwecke auf die dritte Schrift von arabischem Ursprunge, die ich zu vergleichen Gelegenheit hatte. Es ist ein Rechenbuch von Beha-eddin und heisst die Essenz der Rechenkunst.[521]) Der Verfasser dieses Werkes, wahrscheinlich ein gelehrter Perser, lebte zwar erst am Ende des 16. Jahrhunderts,[522]) wenn man aber bedenkt, dass zu dieser Zeit in Europa jene Ausdrücke noch gang und gebe waren, so kommt man zur Vermuthung, dass der so stabile Orient sie wohl auch noch besessen hätte, wenn sie ihm jemals angehört hätten, und insofern ist das Nichtvorkommen derselben bei Beha-eddin wichtig.

Ich sagte ferner, dass ich bei Johann von Sevilla gewisse Wörter in einem ganz anderen Sinne gebraucht finde, als in gleichzeitigen arithmetischen Schriften des übrigen Europas. Ich nenne als erstes das Wort Differenz, welches auch hier wie in der ersten kleineren Abhandlung statt Stelle gesagt wird, und z.B. bei der Division nur in diesem Sinne auftritt, wie man sich wohl merken muss, um nicht bei Kenntniss der Divisionsmethode des Boethius momentan in den Irrthum zu verfallen, als bezeuge das hier aufgenommene Wort, dass die Methoden analog seien, was durchaus nicht ist. Johann von Sevilla geht in keiner Beziehung über die Division des Mohammed ben Musa hinaus. Ferner finde ich in der Bearbeitung des Johann von Sevilla das Wort Benennung, welches bei Boethius die Bedeutung des Quotienten besitzt.[404f]) Hier wird es dem modernen Sprachgebrauche weit mehr sich nähernd als Nenner eines Bruches definirt.[523])

Die Null heisst auch hier wieder kleiner Kreis, und das Rechnen mit derselben wird etwas ausführlicher auseinandergesetzt, als es bei Mohammed ben Musa geschah. Von sonstigen wesentlichen Zusätzen wüsste ich, da die Ausdehnung der Neunerprobe auf Addition und Subtraction, wie sie übrigens auch von Beha-eddin gelehrt wird, höchst unwichtig ist, nur einen zu nennen, der aber freilich sehr bedeutsam dasteht und Vieles zu denken giebt.

Johann von Sevilla lehrt nämlich die nährungsweise Ausziehung der Quadratwurzel mit Hülfe von Decimalbrüchen[524]) genau in der Weise, wie ich sie bei Hieronymus Cardanus aufgefunden habe, und damals für die älteste Spur des Rechnens mit solchen Brüchen hielt,[525]) eine Vermuthung, die so weit gerechtfertigt ist, als zu der Zeit, wo ich sie aussprach, die Arithmetik des Johann von Sevilla noch nicht gedruckt war. In dieser selbst ist nun die erwähnte Methode vorgetragen und zwar im Anschlusse an die Ausziehung der Quadratwurzeln mit Hülfe von Sexagesimalbrüchen, welche ganz ebenso ausgeführt wird, wie bei jenem jüngeren Theon, der zu Ende des 4. Jahrhunderts einen Commentar zum Ptolemäus schrieb.[526]) Also auch hier sogar liegt ein griechischer Gedanke zu Grunde, welcher nur auf die durch die Araber übermittelte neue Schreibart der Zahlen mit Nullen übertragen ist, und die Frage wäre noch zu beantworten, wer jene Ausdehnung zuerst sich erlaubte? Ich bin natürlich auch bei dieser hochwichtigen Frage nicht im Stande eine Beantwortung wenn auch nur anzudeuten, und muss derselben vielmehr von Seiten solcher Gelehrten gewärtig sein, denen die Sprache der Araber sowohl, als auch Material in dieser Sprache zu Gebote steht.

XIX. Isidor, Beda, Alcuin.

In den letzten beiden Kapiteln habe ich den so weit ziemlich chronologischen Gang meiner Untersuchungen unterbrochen. Ich glaubte es grade an der Stelle am ehesten mir erlauben zu dürfen, wo ohnedies ein Ruhepunkt gewonnen war, von dem aus weitere Forschung erst möglich war, wenn die Einwürfe gegen das zur Kenntniss der Mathematik des Boethius gesammelte Material selbst verschwanden; und zur Beseitigung dieser Einwürfe dienten, wie wir sehen, wenigstens indirect auch die beiden letzten Kapitel. In ihnen zeigte sich, dass arabisches Rechnen und das Rechnen des Boethius weit verschieden sind, dass sowohl die Grundgedanken beider Methoden nicht übereinstimmen, als auch darin ein gewaltiger Unterschied liegt, dass Boethius sich fortwährend des Abacus bediente, während die arabischen Rechenmeister seit Mohammed ben Musa die Null anzuwenden verstanden, welche nicht etwa wie bei der Gobârschrift über die Ziffern gesetzt wurde, sondern in die Reihe der geschriebenen Zahl eintrat. Es lässt sich daher mit Bestimmtheit behaupten: Erstlich wer das Rechnen von den Arabern erlernte, muss nothwendiger Weise die Null, sei es nun als Punkt oder als kleinen Kreis, mit kennen gelernt haben; und zweitens die Geometrie des Boethius im Ganzen, und ganz besonders die zwei arithmetischen, oder vielmehr logistischen Kapitel derselben können keine späte Arbeit eines bei den Arabern gebildeten Mathematikers sein. Damit ist also, wie gesagt, auch indirect bestätigt, wofür ich früher die directen Beweise gesammelt habe, und was ich, um wieder in den Zusammenhang zu gelangen, in aller Kürze hier nochmals hervorheben will.

Bei den Griechen, namentlich in der engeren und weiteren Schule des Pythagoras, spielte die Mathematik eine hervorragende Rolle. Theils war sie dort aus verschiedenen Quellen zusammengeflossen, theils hatte sie dort weitere Vervollkommnungen erfahren, und die Griechen zeigten somit auch hier ihren historischen Beruf, das, was vordem zersplittert und in einzelnen Bruchstücken existirte, in schöner Form zu einen, zu einem neuen Ganzen umzuwandeln, dem man die verschiedene Herkunft des Materials nicht mehr anmerkt. Und wieder, wie in der Kunst griechische Muster dem Bildhauer des römischen Kaiserreiches zur Nachahmung dienten, so war es auch in der Mathematik. Auch hier finden wir auf römischem Gebiete nur Griechisches, d. h. durch griechische Quellen bekannt Gewordenes, mit Ausnahme der einzigen Feldmesskunst, die wir als echt römisch anerkennen müssen. Nun, sie war auch darnach! Es ergab sich endlich, dass sogar das aus Griechenland Ueberkommene nicht in fortwährender Pflege war, dass vielmehr von den nützlichsten und schönsten Entdeckungen unbeachtet blieben, bis Boethius auf sie aufmerksam machte, und sich in diesem Sinne den Namen eines Wiederherstellers der Mathematik verdiente. Wie seine Werke unmittelbar wirkten, wissen wir aus der Briefsammlung des Cassiodor, sowie aus dessen mathematischen Schriften, so unbedeutend dieselben an sich sind. Noch deutlicher zeigt sich die grosse Wirksamkeit des Boethius die folgenden Jahrhunderte hindurch, wo die directe Verbindung mit altgriechischer Wissenschaft allmälig aufhörte, und wo, nachdem die Quelle versiegt war, die Römer und unter ihnen vor Allen Boethius den Vorrath bildeten, dem man die geistige Nahrung entnahm.

Ich will einige der Schriftsteller der nächsten Jahrhunderte besonders erwähnen, welche in dieser Beziehung von Interesse sind. Zuerst Isidorus, den berühmten Bischof von Sevilla, dem damaligen Hispalis, nach welchem er den Namen Isidorus Hispalensis führt.[527]) Er ward 570, also ungefähr ein Jahrhundert nach Boethius in Carthagena geboren, wo seine Familie zu den angesehensten gehörte. Seine Mutter war sogar die Tochter eines gothischen Königs, und auch eine seiner Schwestern soll den Thron des Königs Levigild getheilt haben. Seine übrigen Geschwister waren sämmtlich hohe kirchliche Würdenträger und er selbst erlangte 601 das Episcopat Sevilla, als er kaum das 30. Jahr zurückgelegt hatte. Was bis dahin mehr Zufall der Geburt und der Verbindun-

gen gewesen sein mag — sein bedeutender Einfluss, seine hervorragende Stellung — das steigerte sich jetzt noch durch seine geistige Ueberlegenheit, insbesondere durch eine Beredsamkeit, welche die Zuhörer erstarren machte, wie einer seiner Schüler sagt, und so wurden ihm die schmeichelhaftesten Beinamen beigelegt, er wurde die Zierde der katholischen Kirche, der hervorragende Gelehrte genannt, und zweimal, in den Jahren 619 und 633, ward ihm die Ehre zu Theil einem Concile zu präsidiren. Er starb am 4. April 636. Wenn es auch für uns von geringem Interesse ist zu erfahren, dass er einer der entschiedensten Gegner des Arianismus war, sowie dass er kurze Zeit nach seinem Tode heilig gesprochen wurde, wenn ferner von den Schriften, die er hinterliess, und welche in der vollständigsten und neusten Ausgabe sieben Quartbände erfüllen,[528]) die theologischen und auch die grammatischen, als so vortrefflich sie auch gerühmt werden, hier nicht anders als beiläufig erwähnt werden können, so muss dagegen hervorgehoben werden, dass er seit seiner Erhebung zum Bischoffe sich vielfach um den Unterricht verdient machte, und eine Art von Schule stiftete, dass er in persönlichem Verkehre mit dem Pabste Gregor dem Grossen einige Zeit in Rom zubrachte, und dass unter seinen Werken auch eine Encyklopädie sich befindet, welche in Form und Inhalt den römischen Mustern sich anschliesst.

Die Ursprünge, Origines oder auch die Etymologien ist der Name, unter welchem das grosse aus 20 Büchern bestehende Werk bekannt ist, und in der That bilden auch Wortableitungen einen grossen Theil desselben, da Isidor es liebt die Erklärung des Sinnes eines Ausdruckes etymologisch zu erweisen. Gleich zu Anfang ist die Wissenschaft als aus sieben Theilen bestehend angegeben, und wir finden darin dieselbe Reihenfolge, die wir aus Cassiodorus und Boethius kennen gelernt haben: Grammatik, Rhetorik, Dialektik und die vier mathematischen Disciplinen, Arithmetik, Musik, Geometrie, Astronomie. Die Kapitel 21 bis 24 des ersten Buches handeln von den Abkürzungszeichen der Alten. Für meine Zwecke haben dieselben ein bloss negatives Interesse, indem weder die musikalischen Noten, noch die Zahlzeichen, noch auch die Zeichen der Minutien angegeben sind, welche man ebensowenig in einem Isidor zugeschriebenen Fragmente über Gewichte und Maasse suchen darf. Dagegen enthalten die angegebenen Kapitel des ersten Buches Erklärungen von grammatischen Zeichen, Sternchen, beson-

dern Anführungszeichen für biblische Stellen und dergleichen mehr. Das dritte Buch handelt von den vier mathematischen Disciplinen in der erwähnten, altherkömmlichen Reihenfolge. Die weltlichen Schriftsteller, meint Isidorus,[529]) hätten alle mit Recht die Arithmetik vorangestellt; denn sie bedürfe zu ihrer Darlegung keiner anderweitigen Vorkenntnisse, wie es bei der Musik, der Geometrie und der Astronomie der Fall sei. Auch er beginnt daher mit der Arithmetik „welche bei den Griechen zuerst von Pythagoras aufgeschrieben worden, dann von Nikomachus weitläufiger behandelt wurde; den Römern wurde sie durch Appulejus und Boethius bekannt.“ [58]) Im dritten Kapitel werden die Zahlen wirklich vorgeführt und deren lateinische Namen in einer Weise erklärt, welche nicht weniger starr machend auf den Leser wirkt, wie einst im guten Sinne des Wortes die Beredsamkeit des Isidorus auf seine Zuhörer. Da soll decem, zehn, von dem griechischen desmeyein, zusammenbinden, herkommen, weil die Zehn alle niedrigeren Zahlen erst vereinige. Da stammt centum, hundert, von kanthos, das Rad, warum wird nicht gesagt. Da wird mille, tausend, aus multitudo, die Menge, erklärt.[530]) Glücklicher Weise wird der undankbare Gegenstand bald verlassen, und die zahlentheoretischen Unterscheidungen erfüllen die folgenden Kapitel, welche ich schon öfter genannt habe: grade und ungrade Zahlen, vollkommene und überflüssige, in gegebenen Verhältnissen proportionale, dann lineäre Zahlen, Flächenzahlen und Körperzahlen und dergleichen mehr. Von Rechnungsausführungen dagegen wieder keine Spur, wie wir es innerhalb der eigentlich arithmetischen Betrachtungen längst gewohnt sind. Die Geometrie, Musik und Astronomie sind noch geringer an Ausbeute, indem sie kaum etwas anderes als Definitionen enthalten, und somit den Beweis liefern, dass Isidorus zwar der Vollständigkeit wegen mathematische Gegenstände mit berücksichtigte, aber — bei aller Achtung vor seinen sonstigen Leistungen und seiner sicherlich gerechtfertigten Berühmtheit sei es gesagt — dass er in diesem Fache überaus unbedeutend war, und es nur der geringen Anzahl überhaupt vorhandener Schriften jener Zeit über Mathematik zu verdanken hat, dass ich ihn erwähnen musste.

Wieder ein Jahrhundert nach der Geburt von Isidorus von Sevilla erblickte Beda das Licht der Welt, welcher er ungefähr eben so lange wie sein Vorgänger in diesem Kapitel angehörte. Er starb am 26. Mai 735 am Feste Christi Himmelfahrt. Beda's Ge-

burtsort war ohne Zweifel dicht an der Grenze Schottlands wo Tyne und Were unweit von einander in das Meer sich ergiessen, wo in der Nähe des Städtchens Jarrow Beda's Brunnen noch in der Mitte des vorigen Jahrhunderts als Wallfahrtsort diente. Ebendort wurden durch Biscop, einen edlen Than, der als Mönch und Abt den Namen Benedict erhielt, um das Jahr 680 zwei Klöster erbaut und St. Peter und Paul geweiht, und hier war es, wo Beda den Verlauf seines ganzen Lebens in ruhiger Emsigkeit verbrachte. Schon als Knabe von bedeutenden Geistesgaben zeugend, wurde Beda gegen die Gewohnheit der Zeit schon mit 19 Jahren Diaconus, während man sonst mindestens das 24. Jahr zur Ordination voraussetzte. Die eigentliche Pristerwürde erlangte Beda allerdings erst in seinem 30. Jahre, also etwa um 702, und von da an traten die Erfüllungen seines unmittelbaren Berufs, welche bedeutend genug waren, zu den übrigen Geschäften eines Lernenden und Lehrenden, die er niemals auch nur bei kürzester Mussezeit ganz ausser Augen setzte.

Giles, der letzte Herausgeber von Beda's Schriften,[531]) hat in der vortrefflichen Einleitung zum ersten Bande, welche der hier gegebenen Lebensnotiz als Quelle diente, die Pflichten geschildert, welche einem sogenannten Messpriester der damaligen Zeit oblagen, und wenn wir damit zugleich die Anzahl der Schüler in Erwägung ziehen, welche Beda heranbildete, wenn wir die Schriften durchlaufen, die er hinterlassen, wenn wir endlich dem Rufe der Frömmigkeit und des edelsten Lebenswandels sein Recht angedeihen lassen, der Beda keinen Augenblick fehlte, so können wir nur in den Ehrentitel V e n e r a b i l i s, der Verehrungswürdige, einstimmen, durch welchen Beda seit dem 9. Jahrhunderte ausgezeichnet wurde. Um so begreiflicher werden die Sagen, welche z. B. an die Entstehung dieses Beinamens sich knüpfen, und die immer wunderbarer klingen, besonders seit ein frommer Diebstahl die Gebeine Beda's mit denen seines Schülers, des heiligen Cuthbert vereinigte und ihn so zu einem noch gefeierteren Heiligen machte. Jetzt suchte die Universität Cambridge den Beweis zu führen, dass Beda einst dort gelehrt habe, die Universität Oxford hingegen bestritt diese Thatsache mehr aus Neid als aus historischem Interesse. Wirklich hatten aber die Gelehrten der letzteren Universität Recht. Beda war so wenig in Cambridge wie in Rom, wenn auch Wilhelm von Malmesbury zu dieser letzteren Angabe Anlass giebt. Beda blieb vielmehr, wie

schon gesagt ist, fast sein ganzes Leben hindurch in seinem Kloster, das er immer nur auf sehr kurze Zeit verliess, um theils den Hof des gelehrten Königs Ceolwulph, theils Egbert den Erzbischof von York und andere Freunde zu besuchen.

Bei solchem fast ununterbrochenen Aufenthalt in einem abgelegenen Kloster Englands ist es beinahe befremdend, wie Beda sich die Kenntnisse aneignen konnte, welche er besass. Ich muss um so mehr diesen Umstand hervorheben, als ich selbst bei einer früheren Gelegenheit einmal unrichtige Folgerungen daraus zog. [532]) Allerdings wäre es für Beda etwa in einem irischen Kloster schwierig, fast unmöglich gewesen eine Gelehrsamkeit zu erringen, wie er sie besass. Nicht so an der Grenze Schottlands mitten unter einem Geschlechte von Mönchen, welches ganz besonders für Mathematik sich interessirt haben soll; [533]) und nun vollends in der Stiftung St. Peter und Paulus befand sich ein bedeutender Bücherschatz, welchen Abt Benedict bei vier- oder gar fünfmaligem Aufenthalte in Rom erworben hatte, und welcher also während Beda's Lehrzeit sich anhäufend ihn um so mehr zum Studium anreizen musste.

Ich habe oben bemerkt, dass die Sage sich vielfach mit dem Beinamen Beda's beschäftigte, dass man auch seine Lebensverhältnisse nachträglich zu verändern suchte. Ebenso erging es seinen Schriften, unter welche mancherlei Fremdes mit wahrer Schamlosigkeit gemengt wurde, wie Giles in der Vorrede zum 6. Bande von Beda's Werken sich ausdrückt. Man schrieb ihm z.B. musikalische Tractate zu, in welchen gewisse Sangweisen mit französischen Namen auftreten, während diese Sprache erst viele Generationen nach Beda entstand. Nichts desto weniger sind die meisten Werke glücklicherweise vollständig festgestellt, da Beda am Ende seiner unzweifelhaft echten sogenannten Kirchengeschichte, welche bis 731 herabreicht, ein Verzeichniss der Schriften gab, die er bis dahin verfasst hatte. Da er aber, wie wir wissen, etwa vier Jahre später starb, [534]) so kann er in der Zwischenzeit unmöglich mehr Vieles vollbracht haben, und auch dadurch erweist sich Manches als sicherlich untergeschoben, was in den früheren Druckausgaben seiner Werke enthalten ist.

Unter den Beda'schen von ihm selbst anerkannten Schriften findet sich ein Buch „über die Zeitrechnung," welches für den Mathematiker von Interesse ist. [535]) In dessen Vorrede spricht sich Beda darüber aus, dass er schon früher zwei kleinere Schrif-

ten „über die Zeiten“ und „über die Natur der Dinge“ ausgearbeitet habe,[536]) dass aber dieselben nach dem Urtheile derjenigen, welche sie zu benutzen Gelegenheit hatten, zu lakonisch abgefasst waren, als dass sie all' den Nutzen stiften konnten, den er beabsichtigte. Namentlich die Osterrechnung scheine weitläufiger gelehrt werden zu müssen, und so habe er sich denn entschlossen hiermit ein derartiges Lehrbuch der Zeitrechnung seinen Schülern zu übergeben.

Ich begnüge mich damit, aus dem ganzen Verlaufe der im Drucke über 200 Seiten füllenden, also sehr umfangreichen Schrift nur zwei Kapitel, das erste und das vierte, hervorzuheben, welche sonst auch wohl als selbstständige Abhandlungen Beda's angesehen wurden, bis Giles sie auf Grund einiger Handschriften des britischen Museums an diesen ihren ursprünglichen Platz wieder einfügte.[537]) Von beiden Kapiteln war schon im bisherigen Verlaufe dieses Buches die Rede. Das Erste führt den Namen der Fingerrechnung[538]) und enthält die ausführlichste Beschreibung jener alterthümlichen Methoden, nach welchen von der linken Hand anfangend die Bewegungen einzelner Finger gegen und mit einander zur Darstellung von Zahlen diente.[413]) So z. B. zeigte man 50 an, indem man den Daumen der linken Hand gebogen gegen die Handfläche neigte; wurde gleichzeitig der Zeigefinger mitgebogen, so erhielt man 60 oder 70, je nachdem der Zeigefinger die Spitze des Daumens berührte, oder bis über dessen Nagel hinausreichte u. s. w. Die Quelle, aus welcher Beda schöpfte, ist nicht angegeben. Nur so viel sagt er, dass auch der heilige Hieronymus schon diese Methoden gekannt haben müsse, da gewisse Anspielungen desselben nicht anders zu verstehen seien. Aus diesem einen Citate geht indessen für uns natürlich nur hervor, dass Beda die Fingerrechnung aus anderen Werken bereits kannte, als er bei Hieronymus sie wiedererkannte, und so bleibt nur die leise Vermuthung, es seien wohl römische Schriften gewesen, aus welchen Beda die Methode zuerst erlernte.

Dafür spricht noch mehr das vierte Kapitel über die Rechnung mit Unzen,[539]) in welchem die einzelnen Unterabtheilungen des aus 12 Unzen bestehenden Asses und der Unze selbst angegeben sind. Beda sagt, er wolle gleichzeitig die Namen und auch die Zeichen für diese Bruchtheile angeben,[540]) später spricht er nochmals von den betreffenden Charakteren; es erscheint mir

daher als ein Mangel, dass in der Ausgabe von Giles nur die Namen stehen, von Zeichen jedoch keine Spur zu finden ist. Die älteren Ausgaben dagegen, wenigstens zwei davon, die ich vergleichen konnte, haben *solche Zeichen*,[541]) die mit geringer Ausnahme mit jenen Zeichen übereinstimmen, welche ich auch in einer berner Handschrift erkannte,[430]) und mit jenen, welche Halliwell in einem englischen Codex fand.[430a]) Ich habe früher bemerkt, dass durchaus kein Grund vorhanden ist, dieselben nicht mit den Zeichen zu identificiren, welche Boethius in seiner Geometrie, als zu dunkel und unverständlich weglässt. Ich rufe daher nur nochmals ins Gedächtniss zurück, dass diese Zeichen mit den Zahlzeichen zugleich dem Boethius bekannt waren, und also hier *wenigstens die eine Reihe von Zeichen etwa im Jahre 726 schon in England bekannt war.* Damit ist natürlich nicht gemeint, dass die andere Reihe von Zeichen gleichfalls dort bekannt sein musste, denn wie Boethius die Ziffern nicht aber die Maasse angiebt, so kann möglicherweise der Schriftsteller, den Beda excerpirte, das entgegengesetzte Verfahren eingeschlagen haben. Nur darauf will ich, wahrscheinlich zuerst, hier aufmerksam machen, dass wenn die Zifferform für *vier* in den Manuscripten des Boethius bei aller Verschiedenheit doch immer eine gewisse Aehnlichkeit mit einem lateinischen B hat, genau dieselbe Aehnlichkeit dem *Zeichen für vier Unzen* inne wohnt, wie es in der Abhandlung Bedas mitgetheilt wird. Diese beiderseitige Aehnlichkeit kann Zufall sein, aber merkwürdig bleibt sie immer, und kann auch einem inneren Zusammenhange zuzuschreiben sein.

Wenn Beda nun mit diesen Gegenständen vertraut war, so ist es nur wahrscheinlich, dass er auch die *Rechnung auf dem Abacus* näher kannte und die Möglichkeit ist nicht von der Hand zu weisen, dass er dieselbe gleichfalls für seine Schüler beschrieb. Das folgende Kapitel wird einen Wahrscheinlichkeitsgrund kennen lehren, dass dem wirklich so war, und lange Zeit hat man auch in der That eine derartige Abhandlung unter den Werken des Beda mit angeführt; ja noch in der Vorrede zum ersten Bande seiner Ausgabe weiss Giles nicht anders, als dass Beda einen *Constantinus* zum Schüler hatte, für welchen er eine *Anleitung zum Dividiren* verfasste.[542]) Freilich hatte schon viele Jahre vor dem Druck dieser Ausgabe Andres bemerkt,[543]) dass dieselbe Schrift auch unter anderem Namen noch bekannt ist, aber diese

Angabe war unbeachtet geblieben, bis Chasles von Neuem die Entdeckung machte,[544]) dass Bedas sogenannte Anweisung zum Dividiren völlig identisch ist mit einer Abhandlung, die in den Handschriften, in welchen sie existirt, vielfach dem Gerbert zugeschrieben wird, jenem bekannten Gelehrten des 10. Jahrhunderts, der uns noch genauer in einigen Kapiteln beschäftigen wird. Wo Chasles in seiner Geschichte der Geometrie zuerst auf diese Identität hinwies, da glaubte er selbst noch an die Autorschaft Bedas; doch in den Zusätzen schon ging er von dieser Meinung ab, und im Jahre 1843, wo er eine besondere Abhandlung über den Tractat von der Division veröffentlichte, gab er noch weitere Beweise für die Ansicht, welche in Gerbert den Verfasser findet. Hier kann es genügen, den Grund anzuführen, dass von einem mit Beda in Verbindung gestandenen Constantinus sonst durchaus Nichts bekannt ist, und dass Giles sicherlich nur durch das Vorhandensein der Schrift von der Division in den früheren Ausgaben sich zu der Behauptung verleiten liess, Beda habe einen Schüler dieses Namens gehabt. Sein Ideengang war offenbar nicht der: Beda hatte einen Schüler Constantinus, also kann er der Verfasser der einem solchen gewidmeten Schrift sein; sondern vielmehr: Constantinus hiess eine Persönlichkeit, an welche Beda eine Schrift richtete, folglich muss es ein Schüler von ihm gewesen sein. Giles giebt dieses auch selbst stillschweigend zu. Denn am Anfange des 6. Bandes bemerkt er, wie er höre sei die Lehre von der Division von Gerbert verfasst.

Für diesen sprechen mancherlei Umstände. Besonders wichtig ist es, dass ein gewisser Constantinus Stiftslehrer in Fleury war und zu Gerbert auf befreundetstem Fusse stand. In der Briefsammlung von Gerbert, welche noch existirt und mehrfach abgedruckt ist, finden sich verschiedene Briefe, welche grade an Constantinus gerichtet sind und mehr oder weniger einen mathematischen Inhalt besitzen. So ist also die innere Wahrscheinlichkeit der Autorschaft durchaus für Gerbert. Aeusserlich wird dieselbe noch dadurch bestätigt, dass wenn auch merkwürdigerweise die vorhandenen Manuscripte der Abhandlung nach Chasles in keinem Kataloge unter ihrem wahren Namen aufgeführt sind, doch die Handschriften selbst den Gerbert als Verfasser aufweisen. Eine derartige Handschrift findet sich auch in Berlin und zwar von sehr altem Ursprunge. Diese trägt gleichfalls, wie Böckh bemerkt hat,[545])

die vollständige Ueberschrift: Gerbert Scholasticus seinem Constantinus. Darnach komme ich zu denselben Schlüssen, die ich schon vordem für richtig hielt,[532]) dass nicht Beda sondern Gerbert der Verfasser des Tractates von der Division ist, dass also auf dessen Inhalt in diesem Kapitel noch nicht eingegangen zu werden braucht. Nur darin bin ich von meinen früheren Ansichten zurückgekommen, als ob Beda wegen seines ständigen Aufenthaltes in dem Kloster St. Peter und Paul die innere Befähigung zur Abfassung einer solchen Schrift abgegangen sein müsse. Im Gegentheile glaube ich jetzt, dass er diese Kenntnisse sehr wohl besitzen konnte, da er jedenfalls lateinische Werke über die Rechenkunst studirt haben muss, allerdings solche die jetzt nicht mehr nachweisbar sind. Ich möchte hier beiläufig nur auf einen gewissen Victorius aufmerksam machen, dessen Name von Chasles erwähnt wird[546]) mit dem Zusatze, dieser Mathematiker aus der Zeit des Boethius[547]) habe höchst wahrscheinlich auch über das Abacusystem geschrieben oder wenigstens Rechnungen hinterlassen, die nach demselben geführt sind, und dass es in Bezug hierauf geschehe, dass Gerbert und seine Schüler oft den Calcül des Victorius und dessen Kürze citiren. Zu dieser Bemerkung von Chasles muss ich meinerseits jedoch hinzufügen, dass mir alle derartigen Stellen bei Gerbert entgangen sein müssen. Die Schriften der Schüler desselben sind mir aber nicht zugänglich gewesen, da sie sämmtlich nur handschriftlich vorhanden sind, und so wiederhole ich das Gesagte nur auf die Autorität von Chasles hin.

Ich gehe zu dem dritten Gelehrten über, welcher in der Ueberschrift dieses Kapitels genannt ist. Alcuin,[548]) auf lateinisch Albinus genannt, wurde aus altangelsächsischer Familie in demselben Jahre 735 in York in England geboren, in welchem Beda starb. Die Ansicht gehört also natürlich zu den fabelhaften, nach welcher die beiden Männer in directem Lehrverhältnisse zu einander gestanden haben sollen. Alcuins Lehrer war vielmehr Egbert von York und nach diesem Aelbert, den er auch auf einer wissenschaftlichen Reise nach Rom begleitete, wo für Handschriften noch immer der Hauptmarkt war, und durch welchen er selbst 766 der Schule von York vorgesetzt wurde, der er bis 781, d. h. bis zu dem Tode seines väterlichen Freundes vorstand.

Alcuin theilt uns selbst mit, worin der Unterricht an jener Schule bestand. Grammatik, Rhetorik, Dialektik wurden ebenso ge-

trieben wie Musik und Poesie. Aber auch die exacten Wissenschaften kamen nicht zu kurz. Astronomie und eigentliche Naturgeschichte wurden gelehrt, die Osterrechnung bildete einen besonderen Unterrichtsgegenstand, und vor allen Dingen wurden die Geheimnisse der heiligen Schrift erläutert. So sehen wir also, dass Alcuin selbst zwar nicht eigentlich zum Mathematiker ausgebildet worden war, aber dass er doch so viel wusste, um einen Rechenunterricht zu leiten. Es geht daraus hervor, dass damals in ähnlicher Weise, wie noch heute, und wie schon viel früher das Rechnen mehr der allgemeinen Bildung angehörte, dass es im sogenannten Schulsacke enthalten war, ohne dass der Mathematiker von Fach besondere Bücher darüber zu schreiben pflegte, wenn er nicht die ganz specielle Absicht dabei hatte, etwa Methoden kennen zu lehren, welche sonst nur wenig gebräuchlich waren, dem Laien auch wohl zu schwierig sein mochten. Ich möchte als Beispiel aus unserem Jahrhunderte anführen, dass Drobisch in seiner Lehre von den höheren numerischen Gleichungen natürlich um die vier Species in ihrer gewöhnlichen Ausführung sich nicht kümmert, aber die Fourier'sche Divisionsmethode wohl erläutert.

Nach Egberts Tode wurde Alcuin nach Rom gesandt, um für dessen Nachfolger die päbstliche Bestätigung einzuholen. Auf dieser Reise lernte er in Parma den Kaiser Karl den Grossen kennen und folgte schon im nächsten Jahre 782 dessen Einladung, am kaiserlichen Hofe sich niederzulassen. In grösstem Ansehen verlebte er dort 14 Jahre, während derer er zwar zweimal nach England zurückkehrte, aber bald wieder am Hofe Karls erschien. Diesem grössten aller Fürsten, denen die Nachwelt den Namen des Grossen verliehen, lag die Bildung seines Volkes näher am Herzen, als sein eigenes Vergnügen. Und so ungern er den geistreichen Alcuin entbehrte, veranlasste er ihn [549]) dennoch 796, dass er nach der Abtei St. Martin in Tours sich zurückzog und daselbst jene berühmte Schule gründete, welche mit einer gleichfalls durch Alcuin gestifteten grossartigen Bibliothek verbunden die bedeutendsten Männer des folgenden Jahrhunderts erzog. Dort starb Alcuin den 19. Mai 804.

Von den theologischen, historischen und poetischen Schriften, welche er hinterliess, soll hier nicht weiter gesprochen werden. Nur eine Abhandlung muss ich anführen, welche unter dem Namen „arithmetische Aufgaben und Auflösungen“ sowohl in Bedas als in Alcuins Werken sich abgedruckt findet, und welche

nach Giles dem Style Alcuins so ziemlich entsprechen soll, jedenfalls Beda nicht angehört.[550]) Ist die Annahme richtig, dass Alcuin der Verfasser war, so muss dieser in der That noch später nach zurückgelegter Schule sich mit Mathematik beschäftigt haben, denn unter diesen Aufgaben[551]) befinden sich solche, die über das gewöhnliche Elementarrechnen damaliger Zeit hinausgegangen sein müssen, andrerseits aber der scharfsinnigen Uebung der Dialektik angemessen erscheinen. So ist z. B. folgende Frage als sechste bezeichnet: Zwei Männer kaufen für 100 Solidi Schweine, je 5 Schweine zu 2 Solidi. Die Schweine theilen sie unter sich, verkaufen sie, wie sie sie gekauft haben, und behalten einen Nutzen übrig; wie ging das zu? Blosse Rechenkunst konnte hier allerdings nicht zur Auflösung führen. Sie besteht in Folgendem: Bei der Theilung hat jeder 125 Schweine, denn 250 kauften sie im Ganzen. Die Schweine sind aber von verschiedenem Werthe, so dass von der einen Qualität 2 für einen Solidus erkauft werden, von der anderen 3, also in der That wieder 5 für 2 Solidi. Daher geben 120 von den theuern Schweinen einen Erlös von 60 Solidi, 120 von den billigen bringen noch 40 Solidi ein, und also haben die beiden Schlauköpfe jetzt ihre 100 Solidi wieder und noch 10 Schweine übrig. Eine zweite Aufgabe, die 34., lautet wie folgt: Wenn 100 Scheffel unter ebensoviele Personen vertheilt werden, so dass ein Mann 3, eine Frau 2 und ein Kind $\frac{1}{2}$ Scheffel erhält, wie viele Männer, Frauen und Kinder waren es? Das ist aber eine sogenannte u n b e s t i m m t e A u f g a b e, welche zwar durch bestimmte Rechenoperationen aufgelöst werden kann, und welche der am Ende des 4. Jahrhunderts lebende griechische Mathematiker Diophantus bereits zu behandeln lehrte; deren Auflösungsmethoden aber gar bald wieder zugleich mit den Schriften des Diophantus verloren gingen. Es ist mir sogar zweifelhaft, ob Alcuin dieselben noch kannte, da er statt der 7 Auflösungen die hier möglich sind[552]) nur eine einzige liefert: 11 Männer, 15 Frauen, 74 Kinder. Die 42. Aufgabe lehrt die Summation einer arithmetischen Reihe, indem sie darauf aufmerksam macht, dass je 2 zum Anfange und Ende der Reihe symmetrisch liegenden Glieder dieselbe Summe besitzen. Andere Aufgaben des Alcuin erfordern wieder weniger Ueberlegung, setzen indessen immerhin Uebung im Multipliciren und Dividiren voraus, sowie die Kenntniss feldmesserischer Formeln. So wenn die 23. Aufgabe nach dem Flächeninhalte eines viereckigen Feldes frägt, dessen Seiten durch die Zah-

len 30, 32, 32, 34 gemessen werden. Auch die 29. Aufgabe gehört hierher, welche noch in anderer Beziehung interessant ist. Der Verfasser untersucht nämlich in ihr, wie viele 30 Fuss lange, 20 Fuss breite Häuser eine Stadt enthalten könne, die 8000 Fuss im Umfange habe; und er kommt zu dem Resultate, man müsse zuerst die 8000 Fuss im Verhältniss von 2 zu 3 theilen, um dann nach der grösseren Dimension die Länge der Häuser, nach der kleineren die Breite derselben anzunehmen. Mit andern Worten er denkt sich die Stadt in Gestalt eines Rechtecks, dessen kürzere Seiten je 1600 Fuss, und dessen längere Seiten je 2400 Fuss lang sind. Dann ergiebt sich, dass das Rechteck in 80 Streifen von der Breite eines Hauses zerlegt werden kann, und dass auf jedem Streifen 80 Stücke von der Länge eines Hauses abgeschnitten werden können. Im Ganzen sind also 80 mal 80 oder 6400 Häuser auf der gegebenen Fläche möglich, wenn nirgends ein Zwischenraum gelassen ist.

Für die wirkliche Autorschaft des Alcuin bürgt, nach einer Anmerkung der von mir benutzten Ausgabe, ein sehr altes Manuscript des Klosters Reichenau, sowie eine Stelle aus einem Briefe des Alcuin an Karl den Grossen, wo er sagt, er schicke ihm gleichzeitig einige Proben arithmetischen Scharfsinnes zur Erheiterung.[553]) Oder ist gar der Ausdruck figura, welchen ich hier als Probe übersetzte, viel wörtlicher aufzufassen, und bezeichnet wirklich Figur also Zahlzeichen oder wenigstens die Figur des Abacus? Diese Möglichkeit liegt nicht so fern, als man von Anfang denken sollte. Zum Mindesten wäre sie in Uebereinstimmung mit einem vor etwa 17 Jahren gemachten höchst merkwürdigen Fund, der bisher viel zu wenig beachtet wurde, und auf den ich selbst nur durch eine Anmerkung Friedleins[554]) aufmerksam wurde. Zu dessen Verständniss muss ich erst noch Etwas vorausschicken.

Als Alcuin an den Hof Karl des Grossen kam, fand er in dem Kaiser selbst einen gelehrigen Schüler in der Astronomie, und da das Beispiel des Regenten im Guten wie im Schlimmen ansteckend wirkt, so gehörte es alsbald zum Hoftone sich wissenschaftlich zu beschäftigen und zu solchem Zwecke um Alcuin sich zu schaaren. In dieser Weise entstand eine Art von Academie, der erste Anfang jener in den Kaiserpalästen blühenden Palatialschulen, welche den Klosterschulen eine Zeit lang den Vorrang streitig machten. In der Academie des Alcuin, um diesen modernen Namen weiter

zu gebrauchen, bestand die Sitte, dass jeder Einzelne nur unter einem Pseudonyme auftrat, zum Theil wohl um unter demselben die allzubedeutenden Standesunterschiede verschwinden zu lassen. Karl selbst hiess David; seine Schwester Gisla und seine Tochter Gundra hiessen Lucia und Eulalia; die Räthe Angilbert und Amalric liessen sich Homer und Symporius nennen; Einhard, der bekannte Geschichtsschreiber des Kaisers und zugleich der Architect des Domes von Aachen hiess Beseleel nach dem Erbauer der Stiftshütte; Alcuin endlich hiess Flaccus und war auch ausserhalb der Academie unter diesem wissenschaftlichen Namen bekannt.

Herr Dr. Bethmann machte nun in den Jahren 1844, 1845 und 1846, veranlasst durch den berühmten Herausgeber der Monumente, eine Entdeckungsreise durch verschiedene Bibliotheken Deutschlands und Italiens, überall Handschriften untersuchend, deren Zahl man aus dem veröffentlichten Verzeichnisse beurtheilen und bewundern kann.[555]) Er kam so auch nach Ivrea, wo er die Kapitularbibliothek durchstöberte. Da fiel ihm ein Foliomanuscript in die Augen, sehr schön geschrieben von einer und derselben Hand des 11. Jahrhunderts. Der Inhalt ist die Hochzeit der Philologie des Martianus Capella, fünf Bücher über Musik von Aurelius Augustinus und die Musik des Boethius. „Als Schmutzblätter," so fährt die Beschreibung fort, „sind zwei ältere Blätter von anderem Pergamente angeheftet. Auf dem ersten steht von einer Hand des 10. Jahrhunderts eine Anleitung zum Dividiren für arabische Ziffern, welche hier auch neben den römischen vorkommen und zwar in einem Exempel." Es ist klar, dass Bethmann das Wort „arabische Ziffern" nur dem üblichen Sprachgebrauche nach angewandt hat, ohne eine Ursprungsbestimmung damit zu beabsichtigen, und dass er vielmehr solche Zeichen meinen muss, wie sie bei Boethius sich finden. In der Anleitung zum Dividiren wird in zwei Versen zuerst Flaccus, dann nach ihm ein Franke Aribertus genannt. Bethmann ist daher geneigt hier den Alcuin wieder zu erkennen, und nach den bisherigen Untersuchungen sehe ich durchaus keinen Grund, Bethmann in dieser Annahme nicht zu folgen. Ich sehe daher mit gespanntestem Interesse den weiteren Veröffentlichungen dieses Gelehrten entgegen, die er gleich bei der ersten Notiz zusagte, die aber noch in Aussicht stehen. Dann wird besonderes Gewicht darauf zu legen sein, ob, woran ich übrigens keinen Augenblick zweifle, die Divisionsmethode Alcuins auch wieder

das sogenannte complementäre Verfahren ist. Vorläufig nehme ich also als gesichert an, dass auch Alcuin einer von den Männern war, die das in der Geometrie des Boethius Enthaltene, ob grade aus dieser oder aus irgend einer anderen Quelle ist gleichgültig, sich aneigneten, welche also das Rechnen auf dem Abacus mit Hülfe der pythagorischen Zeichen verstanden.

Ich hoffte eine Zeit lang, dieser Ansicht eine neue, nicht unbedeutende Unterstützung geben zu können, und wiewohl diese Hoffnung sich als eine trügerische erwies, erlaube ich mir dennoch einige Bemerkungen in dieser Beziehung hinzuzufügen, wenn auch nur um Anderen eine etwaige fruchtlose Mühe zu ersparen. Auf einer wissenschaftlichen Rundreise im September 1837 kam Herr Pertz selbst nach Zürich und sah dort, wie er in seinem Berichte sagt, in einer Handschrift des 10. Jahrhunderts die ältesten ihm bekannt gewordenen arabischen Ziffern.[557]) Noch in demselben Bande derselben Zeitschrift beschrieb Pertz jene Handschrift genauer.[558]) Er nennt sie eine von Orelli in der Züricher Universitätsbibliothek wiederaufgefundene, ehemals St. Gallische Handschrift, welche in einem Bande eine bedeutende Zahl verschiedenartiger Sachen enthalte. Darunter sei eine poetische Lebensbeschreibung Karl des Grossen von besonderer Wichtigkeit, welche Orelli einem gewissen Helpericus, Pertz hingegen dem Angilbert als Verfasser zuschreibt. Und nun setzt Pertz hinzu, übereinstimmend mit jener früheren Notiz: „In derselben Handschrift fand ich fol. 50′ folgende arabische Zahlzeichen, die ältesten welche mir bisher bekannt geworden.“ (**Figur 51**). Das Wort arabische Zahlzeichen war hier durch die Gestalten selbst zu deutlich illustrirt, als dass es mir mehr Schwierigkeiten hätte bereiten können, als in der oben besprochenen Angabe von Bethmann. Ich verband vielmehr in Gedanken beide Funde mit einander, und kam zu dem Ergebnisse: Wenn Alcuin die Zahlzeichen kannte und mit denselben operirte, wenn in einem anderen Codex Zahlzeichen unmittelbar neben einem Gedichte Angilberts vorkommen, so kann bei der Zeitgenossenschaft von Alcuin und Angilbert ein Zusammenhang stattfinden; es kann das zürcher Manuscript ausser den Zeichen etwa noch eine Anweisung zum Dividiren oder dergleichen enthalten, da doch die Ziffern wohl nicht ganz losgelöst aus irgend einem Satze und für sich allein da stehen werden. So schloss ich, ob ganz unrichtig, überlasse ich dem Urtheile des Lesers, und beeilte

mich in Zürich selbst nachzuschauen, wie die Sache sich verhielt. Zu Anfang kostete es verschiedene vergebliche Nachforschungen das Manuscript selbst aufzufinden, weil zwar in Zürich in der That eine Universitätsbibliothek existirt, aber nicht diese, wie man nach Pertz glauben muss, sondern die Stadtbibliothek den betreffenden Codex besitzt.[559]) Als ich ihn endlich vor mir hatte, erstaunte ich nicht wenig, das wahr zu finden, was mir fast als unmöglich vorgekommen war. Am Ende eines Blattes, dicht unter einer etwas beschädigten Stelle, wo irgend ein Zeichen, nach aller Wahrscheinlichkeit das St. Galler Wappen, wegradirt ist, stehen ganz allein und ausser allem inneren oder äusseren Zusammenhange jene von Pertz abgebildeten Charaktere. Sie berechtigen daher in Wirklichkeit zu gar keiner Folgerung, namentlich da sie mit aller Bestimmtheit mit anderer und zwar späterer Tinte als der vorhergehende und nachfolgende Text hingemalt sind, also ihr Entstehen vielleicht einer erst späten Spielerei verdanken. Das römisch geschriebene VIIII über dem letzten S ähnlichen Zeichen ist sogar noch neueren Ursprungs, wie man alsbald sieht.

XX. Odo von Clüny.

In der Mitte des 9. Jahrhunderts [560]) lebte ein Edelmann mit Namen Abbo am Hofe Wilhelm des Starken, des Herzogs von Aquitanien. Lange Zeit kinderlos versprach er seine Nachkommenschaft, wenn ihm solche würde, dem Dienste des heiligen Martin zu weihen, und so war also über die Bestimmung des jungen Odo schon verfügt, als er um 879 geboren ward. Dieser Bestimmung mit freudigem Herzen Folge leistend sehen wir ihn schon als Knaben in der Klosterschule zu Tours, unterrichtet durch den Stiftslehrer, oder wie man damals sagte durch den Scholasticus Odalric, dann in Paris, wo er seine Studien fortsetzt, und wieder in Tours, wo aber das zügellose Leben der dortigen Mönche ihn mit Widerwillen erfüllt. Nun zog er sich in die Cistercienzer-Abtei Baume zurück, welche mit verschiedenen anderen Klöstern im engsten Zusammenhange stand, und wurde 927, als der gemeinsame Abt Berno dieser Klöster starb, auf die letztwillige Verordnung des Verstorbenen hin zum Abte von Clüny gewählt. Jetzt war ihm Gelegenheit gegeben, die strengste Ascese nicht bloss selbst auszuüben, sondern auch von Anderen ebenso ausüben zu lassen, und wenn diese unbeugsame Strenge auch zu mancher Auflehnung Anlass gab, so wurde doch jeder derartige Versuch nur um so unerbittlicher bestraft, und das Kloster Clüny erwarb sich unter Odos Leitung einen Ruf musterhafter Zucht und Ordnung, welcher auch unter seinen Nachfolgern sich forterbte, welcher gleichzeitig auch der dortigen Klosterschule zu gut kam; denn bei solcher Disciplin mussten auch die Wissenschaften gedeihen. Odos Ruhm war weit verabreitet, und so sehen wir ihn bald genöthigt, sein liebes Clüny in langen Reisen zu verlassen. Jetzt wurde er nach fremden Klöstern berufen, um dort Zucht und Ordnung wie-

derherzustellen, wie z. B. in das Mutterkloster des Ordens Monte Casino, wo er 937 einen besseren Zustand herstellte,[560a]) jetzt muss er in Rom Streitigkeiten zwischen Päbsten und weltlichen Fürsten schlichten, jetzt endlich vertrauen die Fürsten selbst seiner Weisheit. Auf der Rückreise von einer solchen Fahrt nach Rom starb er in Tours, an dem Orte, wo er sein kirchliches Leben begonnen, am 18. November 942 oder 943.

Trotz der vielen Beschäftigungen amtlicher Natur fand Odo noch Zeit eine Anzahl von Schriften zu verfassen, unter welchen ein philosophisch-theologisches Werk, seine sogenannten Beschäftigungen, die erste Stelle einnimmt. Es wird zwar unter verschiedenen Namen angeführt, aber unter dem oben genannten kennt es ein Schriftsteller wahrscheinlich des 12. Jahrhunderts, von welchem in dem Kloster Melk ein handschriftliches Werk existirte, und welcher deshalb als Anonymus von Melk citirt zu werden pflegt. Dieser Anonymus verfasste nämlich ein aus 117 Kapiteln bestehendes literarhistorisches Werk über die geistlichen Schriftsteller, welches in überaus trockenem, aber nur desto vertrauenswertherem Tone einzelne Mönche nennt und deren Schriften angiebt. Im 75. Kapitel spricht er auch von Odo von Clüny und rühmt dessen „Beschäftigungen“, ausserdem aber auch einen ziemlich brauchbaren Dialog über die Musik. Bernhard Pez, der Bibliothekar des Klosters Melk am Anfange des 18. Jahrhunderts, fand diesen Anonymus von Melk und gab ihn unter diesem Namen heraus.[561])

Gleichfalls im 18. Jahrhundert sammelte ein anderer um die Geschichte des Mittelalters hochverdienter Mann, Abt Martin Gerbert von St. Blasien, musikalische Tractate von verschiedenen Schriftstellern, und darunter finden sich mehrere Schriften, welche den Namen Odo führen.[562]) Die erste ist nach einer Handschrift des 11. Jahrhunderts aus der Bibliothek von Montecasino abgedruckt, und führt in wahrhaft barbarischem Latein den Titel von der Reihenfolge der Töne und ihren Unterschieden. Der Fundort widerspricht, wie wir sahen, keineswegs der Annahme des Herausgebers, dass hier die Musik von Odo von Clüny vorliege, und auch die Schreibart des Namens als Oddo darf nicht irre machen, da er häufig genug wechselnd bald mit einem d, bald mit zweien, bald mit einem oder auch zwei t erscheint. Die zweite von Gerbert herausgegebene Abhandlung ist ein Dialog Odos über Musik.

Der Angabe des Anonymus von Melk entspricht dieselbe demnach genauer als die vorhergehende Schrift. Gerbert hat dazu mehrere Manuscripte benutzt, einen St. Blasier Codex des 12. Jahrhunderts, einen Wiener des 13. Jahrhunderts, einen der Zeit nach unbestimmt gelassenen lückenhaften von St. Emmeran in Regensburg und einen des 13. Jahrhunderts aus Amberg, in welchem ausdrücklich Odo von Clüny als Verfasser angegeben ist. Gleichwohl ist Gerbert nicht dieser Ansicht, sondern glaubt, der Verfasser werde wohl ein anderer Odo gewesen sein, da es ja so viele Aebte dieses Namens gab. Dagegen spricht Gerbert keine bestimmte Ansicht über den Verfasser einer weiteren Abhandlung über Musik aus, die er demselben St. Blasier Codex nachdruckt, wo sie unmittelbar an den Dialog sich anschliesst, während eine leipziger Handschrift sie Berno, also wohl dem Vorgänger im Amte des Odo von Clüny zuschreibt. An diese Abhandlung schliesst sich wieder eine andere an mit der uns aus früheren Kapiteln erinnerlichen eigenthümlichen Ueberschrift der Rhythmimachie, und an diese die Regeln des Abacus, die letzteren nach einem Wiener Codex des 13. Jahrhunderts, ob nach demselben, der den Dialog enthält, ist nicht mit voller Bestimmtheit zu entnehmen.

Martin[560]) hat wohl zuerst von mathematisch-historischer Seite auf diese Abhandlungen aufmerksam gemacht, und die Ansicht ausgesprochen, es sei ein und derselbe Odo, welcher sie sämmtlich verfasste, und zwar Odo von Clüny, da kein anderer Dialog über Musik diesem angehörig bekannt, das Citat des Anonymus von Melk aber ein ganz bestimmtes sei. Ich muss darauf verzichten, diese Gründe gegen die allerdings unmotivirt ausgesprochene Meinung des Abtes Gerbert abzuwägen, da wie ich glaube nur bei einer vollständigen Kenntniss der mittelalterlichen Musik innere Momente aufgefunden werden könnten, nach denen man die Zeit der Abfassung allenfalls bestimmen könnte. Da mir jedoch diese Kenntniss durchaus abgeht, so muss ich auf eine Kritik der musikalischen Tractate verzichten. Nicht so hingegen verhält es sich mit den Regeln des Abacus, auf die es mir ohnedies zumeist ankommt, wie der Leser errathen haben muss. Deren Manuscript steht überdies, wie bemerkt, vielleicht nicht einmal im engsten Zusammenhange mit den übrigen Abhandlungen. Wir wissen nur, dass es ein Wiener Codex des 13. Jahrhunderts ist, und daraus folgt wenigstens so viel mit Bestimmtheit, dass die Regeln in

jener Zeit, also im 13. Jahrhundert, schon verfasst waren, mag nun deren Autor Odo gewesen sein, wer er will. Für das Weitere mögen dann die Regeln selbst sprechen, die ich für wichtig genug halte, um mir zu erlauben, ein zum Theil wörtliches Referat derselben hier zu geben.

Die Abhandlung beginnt mit folgenden Worten, die eine Art von Einleitung bilden:[563]) „Will Einer Kenntniss des Abacus haben, so muss er Betrachtungen über die Zahlen sich aneignen. Diese Kunst wurde nicht von den modernen Schriftstellern erfunden, sondern von den Alten, und wird desshalb von Vielen vernachlässigt, weil sie durch die Verworrenheit der Zahlen sehr verwickelt ist, wie wir aus der Erzählung unserer Vorfahren wissen. Erfinder dieser Kunst war Pythagoras, wie uns mitgetheilt wird. Deren Uebung ist bei einigen Dingen nothwendig, weil ohne Kenntniss derselben kaum irgend Jemand es in der Arithmetik zur Vollkommenheit bringen und die Lehre des Calcüls, d.h. der Rechnung verstehen wird. Hätten doch unsere heiligen Weisen niemals die für die heilige Kirche nothwendigen Regeln auf das Ansehen jener Heiden gestützt, wenn sie gefühlt hätten, es sei eine müssige Kunst, die jene lehrten. Will z.B. Einer die Bücher des Beda Venerabilis über die Rechenkunst lesen, so wird er ohne Besitz dieser Kunst wenig Nutzen erzielen können. Eben sie ist in dem Quadrivium d.h. in der Musik, Arithmetik, Geometrie und Astronomie so nothwendig und nützlich, dass ohne sie fast alle Arbeit der Studirenden zwecklos erscheint. Wir glauben, dass sie vor Alters griechisch geschrieben und von Boethius in's Lateinische übersetzt wurde. Aber das Buch über diese Kunst ist zu schwer für den Leser, und so haben wir einige Regeln hier auseinandergesetzt."

Bleiben wir hier einen Augenblick ruhen, um das viele Wichtige, was uns in dieser Einleitung geboten ist, zu überschauen. Vor Allem will ich auf die Bücher des Beda über die Rechenkunst aufmerksam machen, die hier als existirend, als lesbar angegeben sind. Darnach scheint also doch Beda solche Schriften verfasst zu haben, und dann ist leicht ersichtlich, dass Alcuin seine Kenntnisse aus ihnen geschöpft haben wird. Dann kann aber auch das Unterschieben der Gerbert'schen Abhandlung unter Beda's Werke darauf beruhen, dass man noch wusste, Beda hatte Derartiges geschrieben, dass man es aber nicht wieder finden konnte. Andrerseits freilich

ist noch möglich, dass unter den von Odo citirten Büchern über die Rechenkunst die chronologischen Schriften des Beda gemeint wären.

Das hier Hervorgehobene bezieht sich auf eine verhältnissmässig späte Zeit. Was aber die Einleitung Odo's für ältere Perioden der Wissenschaft angiebt, stimmt vollends durchweg mit dem überein, was ich in den früheren Kapiteln so oft behauptete. Der erste Erfinder des Abacus, d.h. also wohl der ihn nach Europa brachte, war Pythagoras. Die ausführliche Auseinandersetzung der Kunst des Abacus ist griechisch verfasst. Boethius hat eine Uebersetzung geliefert, welche aber schwer zu lesen ist. Braucht es mehr, um den Beweis zu liefern, dass Odo auf dem Boden der Geometrie des Boethius steht, dass er, ebenso wie ich es that, diese Geometrie sammt den beiden arithmetischen Kapiteln derselben für echt hält? Und sollte der Verfasser nicht mindestens dieselbe Berechtigung haben, in dieser Angelegenheit gehört zu werden, wir irgend ein Schriftsteller der heutigen Tage, bloss weil er der Zeit des Boethius um mehr als 600 Jahre näher lebte als wir? Ich finde auch für noch eine meiner früher begründeten Ansichten hier eine Stütze. Die Kunst des Abacus wird nämlich von Odo zuerst Calcül genannt, und dann dieses Wort als Rechnung näher erläutert. Das scheint doch wohl darauf hinzuweisen, dass die Operationen auf dem Abacus immer noch mit Marken erfolgte, denen man den Namen calculi, Steinchen, beilegte.

Hören wir den Verfasser der Regeln weiter, so finden wir immer wieder dieselbe Urquelle, die Geometrie des Boethius, die niemals sich verleugnet. Manches wird zwar hier ausführlicher, Manches anders sein, aber dafür hat der Verfasser auch gesagt, er wolle eine ihm eigenthümliche klare Darstellung geben, dafür sind zum Wenigsten 400 Jahre seit Boethius vergangen, und in dieser Zwischenzeit kann sich Einiges ändern, selbst wenn die Verbreitungskreise des Ganzen nur sehr enge gezogen sind. Odo unterscheidet einzelne Kolumnen, welche er B ö g e n nennt. Derselbe Name in derselben Bedeutung kommt während des 11. Jahrhunderts bei Weitem am häufigsten vor,[564]) es wäre somit darin ein Grund vorhanden unsere Abhandlung als in eben diesem Jahrhundert oder nicht gar weit davon entfernt verfasst anzusehen. Odo sagt ferner, je drei solcher Kolumnen überspanne man mit einem grösseren Bogen, und auch darin stimmt er mit den Abacisten des

11. Jahrhunderts überein.[565]) Er giebt alsdann Namen und Zeichen für die Zahlen von 1 bis 9. Die Namen sind lateinisch, nicht jene fremdartig klingenden, welche ich bei Besprechung des erlanger Manuscriptes im XVI. Kapitel angab und näher erörterte. Die Zeichen sind zwar in der Druckausgabe nicht selbst vorhanden, aber in einer Anmerkung vom Herausgeber beschrieben,[566]) und nach dieser Beschreibung kann nicht der leiseste Zweifel walten, dass in der Handschrift des Odo genau dieselben Zeichen existiren, wie im Texte der Manuscripte E und C. Sipos ist weder dem Worte noch dem Zeichen nach vorhanden. Nun lässt sich doch mit aller Wahrscheinlichkeit vermuthen, dass Odo, wenn er jene fremden Zahlwörter gekannt hätte, nicht versäumt hätte, sie mitzutheilen, dass sie daher in der von ihm benutzten Geometrie des Boethius sich nicht vorfanden. Und so kann ich aus dieser einen negativen Thatsache, dass Odo jene Wörter und insbesondere des Sipos nicht kennt, eine doppelte Folgerung ziehen. Ich schliesse nämlich daraus wiederholt für Boethius, was auch aus anderen Momenten schon hervorging, dass er die Namen Igin bis Sipos noch nicht besass, und dass dieselben auf den Rechentafeln in E und C interpolirt sind. Ich ziehe ferner daraus für die Persönlichkeit Odo's den Schluss, dass er gelebt haben muss, bevor jene Namen in Europa sich verbreiteten, bevor jene Interpolationen stattfanden, also vor der Mitte des 11. Jahrhunderts, und damit nähern wir uns ebenso wie mit den zuvor gemachten Bemerkungen der Lebenszeit des Odo von Clüny.

Nach diesen Definitionen der Zahlen, zu welchen auch noch die von Finger- und Gelenkzahlen in dem Boethius entsprechender Weise kommen, geht Odo zu den eigentlichen Operationen über und beginnt mit der Multiplication. Bei derselben sind drei Zahlen nothwendig vorhanden: die Summe, die Grundzahl und das, was aus der Multiplication der beiden hervorgeht. Die Summe schreibt man oben in die Kolumne, die Grundzahl darunter, das Product zwischen zwei Linien.[567]) „So sei, sagt er, beispielsweise 5 die Summe und 7 die Grundzahl, dann findet zwischen den beiden Zahlen Gegenseitigkeit statt, und mag man nun 5 mal 7 oder 7 mal 5 nehmen, so entsteht XXXV.“ Diese letztere Zahl ist bei Odo römisch geschrieben, die übrigen, wie aus dem Drucke hervorgeht, pythagorisch. Und was könnte naturgemässer sein?

Ausserhalb der Rechentafel können mit Hülfe der pythagorischen Zeichen solche Zahlen wie 5, 7, die auf dem Abacus selbst nur die Kolumne der Einer in Anspruch nehmen, geschrieben werden; Zahlen wie 35 hingegen, die mehr als eine Kolumne, oder doch eine spätere Kolumne als die der Einer erfüllen, kann man auf dem Standpunkte des Boethius wie des Odo noch nicht mit pythagorischen Zeichen schreiben, weil der Stellenwerth nur durch die Rechentafel angegeben ist, noch nicht an und für sich. So weit ist also bei Odo Nichts für ihn Charakteristisches, wesentlich Neues vorhanden, man müsste denn den Satz von der Vertauschbarkeit der Factoren besonders hervorheben wollen, der weder in der Geometrie des Boethius, noch in den Abhandlungen von Abacisten des 11. Jahrhunderts, die mir direct oder nach Citaten von Chasles bekannt wurden, vorkommt. Weiter lehrt Odo zwar nicht an Beispielen, aber in sehr klar auseinandergesetzten Regeln, wie man multipliciren müsse, wenn Grundzahl oder Summe oder beide aus mehreren in verschiedenen Kolumnen befindlichen Theilen bestehen. Man soll von der niedrigsten Zahl beginnend immer zu der nächsthöheren fortschreiten; man soll nicht vernachlässigen, der Ordnung nach durchzumultipliciren; man soll sich merken, in welche Kolumne zu setzen ist, was als Product entsteht; mann soll bei der schliesslichen Zusammenfassung der Theilproducte das in eine folgende Kolumne schaffen, was die Einer überschreitet, und zwar soll man das Zeichen der nächsten Kolumne zurechnen, welches angiebt, wie vielmal Zehn vorher überflüssig waren.

„Hat man nun die Multiplication erfasst und die Zahlzeichen kennen gelernt, so mag man zur Division übergehen.“ Es giebt deren dreierlei auf dem Abacus: die einfache, zusammengesetzte und unterbrochene Division, je nachdem der Divisor eintheilig ist, oder mehrtheilig in aufeinanderfolgenden Kolumnen, oder mehrtheilig aber so, dass zwischen den Theilen eine Kolumne leer bleibt. Das sind wieder genau die drei Gattungen von Divisionen, welche auch Boethius angiebt. Eine weitere, nicht zu verkennende Uebereinstimmung liegt in dem ganz identischen Gebrauche einiger Kunstausdrücke. Ich habe früher schon erwähnt, dass das Wort Benennung bei Boethius vorkomme,[404f)] und dass es dort soviel wie Quotient heisse, während es in Schriften arabischen Ursprunges den Nenner eines Bruches bezeichne,[523)] also gewissermassen nicht den ganzen Quotienten, sondern nur eine der Zahlen, die uns

über dessen Grösse Aufschluss geben. Hier wird jenes Wort als Quotient erklärt [568]) und in demselben Satzbau kommt auch ein sonst seltenes Zeitwort vor, welches hier wie bei Boethius das Verfahren des Weiterrückens um eine Kolumne bezeichnet. Ein Wort dagegen kommt auffallender Weise nicht in der aus Boethius gewohnten Bedeutung, aber auch in keiner anderen Bedeutung vor; es ist das Wort Differenz, welches ich vergeblich bei Odo suchte. Ja ich möchte nicht einmal mit aller Bestimmtheit entscheiden, ob Odo überhaupt die Division mit Hülfe der Differenz, welche ich schon verschiedentlich die complementäre Division nannte, anwendet. Einige Ausdrücke des von der unterbrochenen Division handelnden Paragraphen scheinen dafür zu sprechen, doch nicht deutlich genug, um absolut den Beweis zu liefern, wie denn im Ganzen bei Odo die Erläuterung des Divisionsverfahrens so unklar gehalten ist, dass ich es nicht wage hier eine ähnliche Uebersetzung zu liefern, wie ich es bei Boethius versuchte. Beiläufig bemerke ich, dass diese Unklarheit selbst in höchst eigenthümlicher Uebereinstimmung bei fast allen Schriftstellern alter wie neuer Zeit wiederkehrt, die sich die Aufgabe stellten, über das Dividiren zu schreiben; dass Autoren, deren Darstellungsweise sonst Nichts zu wünschen übrig lässt, über diesen Stein des Anstosses regelmässig stolpern, und dass man mit Solchen schon reichlich zufrieden sein kann, die wie Odo ihr Unvermögen fühlen und offen und ehrlich hinzusetzen: [569]) „Das Alles lässt sich viel leichter mit einem einzigen Worte mündlich als schriftlich abmachen.“

Nach der Division kommt Odo zu den Bruchtheilen. Er definirt dieselben wieder, und giebt an, die Alten hätten jede Einheit ein Ganzes, ein As, ein Pfund genannt. Das As habe 12 Unzen enthalten, und so seien bei allmäliger Verminderung der Zahl auch Bruchtheile der Unze entstanden. Die Namen der verschiedenen ganzen Anzahlen von Unzen folgen zunächst, welche, wie Odo sagt, zum Theil griechisch sind, zum Theil drücken sie auf lateinisch aus, was geschah, um zu so und so viel Unzen zu gelangen. So heisse z. B. deunx was von 12 Unzen übrig bleibt, wenn eine abgeht, also 11 Unzen; triens, oder der dritte Theil des Asses enthält 4 Unzen u. s. w. alle ganzen Anzahlen von Unzen hindurch; bisse für 8 Unzen scheine eine griechische Etymologie zu besitzen. Eine Ausnahmestellung nehme dabei sexcuntia ein, welches anderthalb Unzen bedeutet. Wie nun die Unze der zwölfte Theil des As-

ses ist, so zerfällt sie selbst wieder in 24 kleinere Theile, die man Skrupeln nennt, und es giebt weitere Namen für die Zusammenfassung einer gewissen Anzahl von Skrupeln. Ich lasse die Namen dieser neuen Bruchtheile auf sich beruhen, indem ich nur bemerke, dass sie mit wenigen Ausnahmen z. B. Drachme für 3 Skrupel nicht mit den boethischen Namen der Minutien übereinstimmen. Einen Namen muss ich indessen doch hervorheben. Odo sagt nämlich, 6 Skrupel heissen sicilicus und dieses Wort laute griechisch siclus, hebräisch sichel.[570]) Dadurch sind wir nämlich zu der immerhin nicht ganz gleichgültigen Annahme gezwungen, Odo habe Kenntnisse sowohl der griechischen als der hebräischen Sprache besessen, wenn wir freilich auch nicht bestimmen können, wie weit diese gingen. Odo bleibt bei dem Skrupel nicht stehen, sondern setzt die Theilung noch weiter fort, und hier begegnet er sich wieder mit Boethius, wenn er den Skrupel in 2 Obolen, oder 4 Ceraten, oder 6 Siliquen zerlegt. Neu dagegen ist die Eintheilung in 8 Kalken, welche die kleinste Brucheinheit bilden. Der Ursprung dieses Wortes wird nicht angegeben. Wenn sein Laut an die griechischen Chalken erinnert,[570a]) so scheint doch eine spätere Stelle[571]) mehr dafür zu sprechen, dass man es mit einer Zusammenziehung, oder sage ich lieber mit einem Schreibfehler zu thun hat. Der kleinste Theil heisst nämlich an jener zweiten Stelle calculus, also Steinchen, Rechenpfennig, und diese Benennung ist in der That nicht ungeeignet für den kleinsten Theil der Einheit, den man noch in Betracht zieht.

Neben den Namen der Minutien befinden sich in der Handschrift sicherlich auch deren Zeichen. Der gedruckte Text weist zwar Nichts dergleichen auf; dennoch kann ich diesen Ausspruch mit solcher Bestimmtheit wagen, da ich den Herausgeber der Handschrift selbst zum Gewährsmann habe. In demselben Bande der Sammlung kirchlich-musikalischer Schriften, in welchem die verschiedenen Odo zugeschriebenen Tractate sich befinden, hat nämlich Gerbert auch eine Abhandlung des Bernelinus über Musik abdrucken lassen.[572]) In dieser aber kommen Bruchtheile ziemlich häufig vor, und diese Bruchtheile, sagt Gerbert ausdrücklich in einer Anmerkung, wolle er mit Hülfe der Zeichen andeuten, die Odo in seinen Abacus-Regeln habe. Das kann aber offenbar nirgends sonst sein, als an der Stelle, von der ich eben sprach. Vergleichen wir nun jene dem Odo entnommenen Zeichen,

so erkennen wir augenblicklich dieselben, deren auch Beda sich bedient, d.h. also die pythagorischen Bruchtheile, die Zeichen, welche mit den Ziffern Hand in Hand gehen, und sonach hier zum ersten Male von den bisher ausführlicher besprochenen Schriften[430a]) auch zugleich mit denselben vorkommen.

Odo erklärt noch ziemlich weitläufig, wie mit diesen benannten Zahlen gerechnet werden soll, indem jede Einheit bei der Division auf die Einheit niedrigeren Ranges zurückgeführt wird. Schliesslich könne man freilich nicht weiter zu niedrigeren Einheiten übergehen, da höre denn auch die Division auf, und man könne sich am Ende nicht wundern, [573]) wenn bei den Bruchtheilen Etwas übrig bleibe, da er sehe, dass auch andere Künste viele Zweifel gestatten. Ganz vollkommen sei nur der ewige Vater der Dinge, der in vollendeter Macht das Weltall schützend umringe.

So weit also geht die höchst wichtige Abhandlung, auf deren Urheber ich jetzt nochmals einen Augenblick zurückkomme. Jedenfalls war derselbe in der Kunst des Abacus auf's Vollständigste erfahren. Ebenso sicher ist es, dass er um den Ursprung der Kunst sich kümmerte, und dass er für ausgemacht hielt, dass Vieles, insbesondere die Zeichen, durch Vermittelung des Boethius den Griechen entnommen sei. Von Arabern steht kein Wort in der ganzen Abhandlung, während der hebräischen Sprache gedacht ist. Der Verfasser könnte daher möglicherweise Einiges aus jüdischen Quellen geschöpft haben, den Arabern verdankt er sicher Nichts. Das letztere negative Urtheil bestätigt sich durch den Inhalt der Abhandlung, die Nichts von Allem enthält, was wir als in arabischen Rechenbüchern specifisch vorhanden kennen gelernt haben; keine Null, keine Neunerprobe, keine Sexagesimalbrüche, keine von den Kunstausdrücken in dem Sinne aufgefasst, wie er arabischen Schriften zu entstammen pflegt. Dagegen haben wir gesehen, dass grade Manches in der Ausdrucksweise dafür spricht, den Verfasser in die Nähe des 11. Jahrhunderts zu setzen, vielleicht noch etwas früher, weil er die damals auftretenden Namen igin u.s.w. nicht benutzt, die er, ich habe das schon gesagt, ohne Zweifel angeführt und soviel als möglich erklärt hätte, wenn sie ihm bekannt gewesen wären. Endlich der religiöse Geist, der der Schrift so sehr innewohnt, wie es bei einem Rechenbuche überhaupt der Fall sein kann, ohne wie in den arabischen Schriften in formelle Anrufungen auszuarten, Alles dieses

vereinigt sich, um die Hypothese von Martin glaubwürdig erscheinen zu lassen, dass Odo, der Verfasser der Abacus-Regeln, wirklich der Heilige von Clüny war. Sollten jedoch alle unsere Gründe für die persönliche Bestimmung des Schriftstellers nicht ausreichend befunden werden, so kann doch nach dem Alter der Handschrift darüber kein Zweifel sein, dass er vor dem 13. Jahrhundert lebte, also jedenfalls der älteste bisher bekannte mathematische Historiker ist, welcher von dem griechischen Ursprunge der Methode spricht, und Boethius als deren Uebermittler nennt.

Ein Odo, das will ich zum Ueberflusse hier bemerken, scheint am Ende des 12. Jahrhunderts sich mit Mathematik beschäftigt zu haben.[574]) Er war Abt von Morimond, starb am 31. August 1200 und hinterliess unter Anderem eine Abhandlung über die Bedeutung der Zahlen.

Von einiger Wichtigkeit wäre wohl eine etwas eingehendere Besprechung der schon erwähnten Rhythmimachie, welche unmittelbar vor den Abacusregeln abgedruckt ist und gleichfalls dem Odo als Verfasser zugeschrieben wird. Man müsste dabei Vergleiche anstellen mit dem, was aus alten Quellen über dieses eigenthümliche Spiel überliefert ist. Man müsste wohl gleichzeitig eine Abhandlung desselben Titels berücksichtigen, welche ich in einer berner Handschrift fand.[430]) Allein ich gestehe, dass meine Studien über diesen Gegenstand noch nicht so weit gediehen sind, um mir eine ausführliche Darstellung zu gestatten. Für wenige nothdürftige Notizen ist aber der Gegenstand zu interessant. Vielleicht erlauben mir künftige Untersuchungen bei anderer Gelegenheit auf den Zahlenkampf zurückzukommen.[575])

XXI. Gerbert's Leben.

Ueberblickt man die trostlose Geschichte des 10. Jahrhunderts, in welcher Eidbruch und Lüge mit hinterlistigem Morde abwechseln, und fast allen hervorragenden Charakteren der Stempel des zügellosesten Eigennutzes aufgedrückt ist, dem der Zweck jegliches Mittel heiligt, so muss Einen Ekel und Widerwillen gegen jene Zeit ergreifen. Nur wenige Persönlichkeiten sind dazu geeignet der sittlichen Empörung zum Troste und Anhaltspunkte zu dienen, indem sie zeigen, dass es doch auch damals in der allgemeinen Verderbtheit noch Einzelne gab, die, wenn auch zeitweise angekränkelt von der seuchenartig um sich greifenden Entartung, doch sich zu ermannen wussten, und den Weg dessen wandelten, was sie für Recht hielten, unbekümmert um die Feindseligkeiten, denen sie dadurch sich aussetzten. Einen derartigen Mann haben wir in Odo von Clüny kennen gelernt, einen zweiten finden wir in dem Helden dieses und des folgenden Kapitels, in Gerbert, dem nachmaligen Pabste Sylvester II. Ist es nun für jeden Geschichtsschreiber eine wahre Erholung bei der Darstellung eines solchen Mannes zu verweilen, so darf ich hier von meinem ganz speciellen Gesichtspunkte aus dasselbe Vergnügen theilen. Freilich liegt für uns die grosse Bedeutung Gerbert's nicht in seiner politischen und sittlichen Einwirkung, aber umsomehr in seiner wissenschaftlichen Thätigkeit, und diese kann nicht ihrem ganzen Werthe nach gewürdigt werden, wenn wir nicht zuvor dem Leben Gerbert's einige Aufmerksamkeit zuwenden. Die Vorarbeiten zu einer biographischen Behandlung in meinem Sinne sind in so umfassender Weise vorhanden, [576]) dass nur eine kürzere Zusammenstellung des von An-

deren Gefundenen nothwendig war, und kaum ein Satz wird in diesem Kapitel ausgesprochen werden, zu welchem nicht die Anregung bei Hock, Büdinger, Martin schon enthalten ist. Wenn ich dieses Zugeständniss den Gelehrten schuldig bin, auf deren Forschungen ich fusse, so hoffe ich doch wenigstens davon einen Beweis abzulegen, dass ich die Untersuchungen derselben in mir zu einem Ganzen verarbeitet habe.

Gerbert wurde von armen Eltern niederer Herkunft am Anfange des 10. Jahrhunderts geboren. Die nähere Zeit seiner Geburt ist unbekannt, ebenso wie der eigentliche Ort seiner Heimath. Mit grösster Wahrscheinlichkeit ist indessen anzunehmen, dass seine Geburtstätte in den Gebirgen der Auvergne lag in der Nähe des Klosters Aurillac, und dass er dort in dem Scholasticus Raimund sowie in dem nachmaligen Abte Gerald seine ersten Lehrer und Freunde fand, denen er auch sein ganzes Leben hindurch in dankbarer Ergebenheit anhing. Wohl waren diese geeignet, Keime reichen Wissens auszustreuen, und besonders der Erstere, welcher seine Kenntnisse vielleicht selbst noch durch Odo von Clüny, den Lehrer der Brüder des Klosters des heiligen Geraldus zu Aurillac empfangen hatte. Der junge Gerbert blieb aber nicht allzulange in Aurillac. Mag er nun, wie Hock glaubt, zuerst eine Rundreise durch die Klosterschulen Nordfrankreichs gemacht haben, wo er in Rheims, dann vielleicht auch in Fleury, Tours und anderwärts Verbindungen anknüpfte, die für sein ganzes Leben von Wichtigkeit waren, oder mag er gleich von Aurillac aus nach dem Süden sich gewandt haben.

Die Veranlassung zu dieser letzteren Reise wird verschiedentlich erzählt. Glaubwürdig ist aber sicherlich nur die Auffassung, welche wir dem Richerus, einem Freunde und Schüler des Gerbert verdanken, und welche durch Gerbert's eigene Briefe aus späterer Zeit bestätigt wird. Darnach wäre Borel, Graf von Barcelona nach Aurillac gekommen. Man habe ihn gefragt, ob in seiner Heimath gelehrte Männer lebten und ihn, als er die Frage bejahte, gebeten einen der Mönche als Begleiter mit heim zu nehmen, damit er dort sich in den Studien vervollkommne. Zu diesem Begleiter sei dann von den Brüdern selbst Gerbert gewählt worden. Ich sage, diese Erzählung ist die einzig wahrscheinliche gegenüber den spätern Fabeln, als ob Gerbert dem Kloster entsprungen und zu den Arabern geflohen sei. Denn einmal wäre alsdann

das durchaus freundschaftliche Verhältniss unerklärlich, welches nach Gerbert's Briefen sein ganzes Leben hindurch zwischen ihm und den Brüdern von Aurillac herrschte; und zweitens wäre es ebenso unerklärlich, dass seine Feinde, deren er genug besass, ihm niemals diese Flucht vorgeworfen hätten. Gerbert begleitete also Borel sicherlich mit Wissen und Willen seiner Oberen, welche den strebsamen Geist des Jünglings mehr und mehr auszubilden, in ihm eine Zierde ihrer Schule sich zu erziehen beabsichtigten.

So kam Gerbert zu Hatto, dem Bischofe von Vich, bei welchem er, wie Richerus weiter erzählt, auch in der Mathematik sich vielfach und mit Nutzen beschäftigte, bis Borel und Hatto sich zu einer Reise nach Rom vereinigten und den ihnen anvertrauten Jüngling auch auf dieser Reise zum Begleiter wählten. Noch jeder von den Gelehrten, die mit Gerbert sich beschäftigten, ist von diesen Reisen ausgegangen, um chronologische Anhaltspunkte von einiger Sicherheit zu gewinnen, und sie Alle kamen zum Theil unabhängig von einander ungefähr zu denselben Daten.

Die Grafschaft Barcelona gehörte zu der sogenannten spanischen Mark, einem Grenzlande, welches die blutigsten Kämpfe zwischen den Mauren- und Frankenkönigen veranlasste. Im Jahre 778 war sie von Karl dem Grossen erobert worden, war wieder unter maurische Botmässigkeit gefallen, und befreite sich auf's Neue 812 unter dem Beistande des Königs Ludwig von Aquitanien, des Sohnes Karl des Grossen. Blieb auch das Land von da an unter christlicher Oberherrschaft, so kostete doch die Behauptung desselben immer erneute Kämpfe, die nur durch Ermüdung von Seiten der Mauren, durch Uneinigkeit von Seiten der christlichen Könige zeitweise Unterbrechungen erlitten. Eine solche kurze Zeit der Ruhe war grade vorhanden, als Borel 950, nach dem Tode seines Vaters Suniar, dessen Erbschaft Urgel antrat. Als hierauf 967 Graf Seniofred von Barcelona starb und Borel testamentarisch zu seinem Nachfolger ernannte,[577]) da fiel diesem auch diese Landschaft zu, obwohl zwei Brüder des Verstorbenen noch lebten, deren nähere Ansprüche der Art umgangen worden waren. Nur um so wahrscheinlicher wird dadurch Büdinger's Vermuthung, dass Borel sich damals zum Könige Lothar begab, um sein mangelndes Recht auf die Grafschaft Barcelona durch eine königliche Belehnung ersetzen zu lassen, dass also in dieses Jahr 967 oder vielleicht 968 auch die Abreise Gerbert's von Aurillac fallen müsse.

Diese Vermuthung liefert doch wenigstens einen Grund für die Anwesenheit Borels in Aurillac, welche sonst ziemlich zwecklos dasteht. Denn dass Borel um seine Andacht zu verrichten nach Aurillac gekommen sei, wie Richerus erzählt, lässt sich zwar glauben, wenn Borel, wie wir es jetzt annehmen, ohnedies auf Reisen und gar in der Nähe war, aber nicht als eigentliche Veranlassung, indem das Kloster Aurillac durchaus kein besonders hervorragender Wallfahrtsort war.

Mit diesem Datum 968 stimmen aber ferner die Lebensverhältnisse des Lehrers überein, dem Gerbert jetzt übergeben wurde. Hatto, oder wie er mitunter genannt wird Haito, war schon vor 960 Bischof von Vich oder Viques geworden. Er gehörte 962 zu den Bischöfen der Mark, welche gegen die Anerkennung des Abtes Cesario protestirten, der von den galicischen Bischöfen wider alles Recht zum Erzbischofe von Tarragona geweiht worden war. Vielleicht von da an wuchs seine Bedeutung und sein Ansehen, so dass er z. B. um 968 in ziemlich entfernte Gegenden geladen wurde, um die Einweihung einer Kirche vorzunehmen. Zur selben Zeit stand er zu Borel in freundlichstem Einvernehmen und erhielt von demselben eine Burg zum Geschenke für seine Kirche. Zur selben Zeit kann also wohl Borel ihm den jungen Gerbert als Zögling zugewiesen haben. Wieder zwei Jahre später 970 verlegte Pabst Johann XIII. nach Vich den Sitz eines Erzbisthumes, weil der bisherige Sitz desselben, Tarragona, in die Hände der Ungläubigen gefallen war, und die Bulle, welche somit die Erhöhung Hattos aussprach, lässt die Anwesenheit sowohl dieses letzteren selbst, als auch besonders seines Freundes Borel in Rom zur damaligen Zeit erkennen. Offenbar muss also diese Reise es gewesen sein, auf welcher Gerbert seine beiden Gönner begleitete, nachdem er kaum dritthalb Jahre in Vich zugebracht hatte.

Wenn aber Gerbert 970 zuerst nach Rom kam, so schliessen sich an das so gewonnene Datum seine späteren Lebensumstände sehr gut an. Wir wissen z. B. aus Gerberts Briefwechsel, dass er in der Mark den Abt Guarin zum intimen Freunde hatte, und dieser war von dem Grafen Seniofred kurz vor dessen Tode, also jedenfalls im Jahr 967, nach dem Kloster Cusan berufen worden. Ferner erzählt uns Richerus, der Pabst, also wohl Johann XIII., wie Pertz in seiner Ausgabe des Richerus schon angiebt, habe in Anbetracht der Unwissenheit, welche in Bezug auf Musik und Astro-

nomie in Italien damals herrschte, an König Otto die Mittheilung gemacht, dass ein Jüngling angekommen sei, wohlbewandert in der Mathematik und zum Lehrer sehr geeignet. Bald wurde auch von dem Könige dem Pabste an die Hand gegeben, den jungen Mann aufzuhalten und unter keiner Bedingung weggehen zu lassen. Der Pabst theilte dem von Spanien gekommenen Fürsten und dem Bischofe vertraulich die Absicht des Königs mit, den Jüngling für eine Zeit da zu behalten, und ihn dann mit Ehren und Belohnungen überhäuft zurückzusenden. Die Beiden traten darauf allein die Reise nach der Heimath an, Gerbert aber wurde vom Pabste dem Könige vorgestellt und antwortete auf dessen Fragen, in der Mathematik wisse er genug, in der Dialektik dagegen wolle er noch hinzulernen, und desshalb trat er noch nicht in das Lehrfach ein. Diese Unterredung kann aber, wie schon Hock gezeigt hat, nur zwischen Gerbert und Otto I. stattgefunden haben, also spätestens im Monat August 972, da Otto I. in der Mitte August Italien verliess, am 18. dieses Monats schon von Constanz aus die Privilegien des Klosters Rheinau bestätigte; Johann XIII. dagegen starb am 5. September, so dass auch dadurch dieselbe Zeitgrenze gesetzt ist.

Um dieselbe Zeit war als Abgesandter des Königs Lothar ein Archidiakonus G. (nach Büdinger wahrscheinlich Garamnus) beim kaiserlichen Hofe anwesend, ein ausgezeichneter Kenner der Dialektik, also grade der Wissenschaft, in welcher Gerbert sich noch schwach fühlte. Ihn begleitete nun Gerbert mit des Kaisers Einwilligung nach Rheims, wo er bald die Stellung des Schülers mit der des Lehrers vertauschte, indem zwar Garamnus vergebliche Mühe sich gab, die mathematischen Wissenschaften sich anzueignen, aber desto mehr andere Schüler seines Unterrichtes mit Vortheil genossen. Ich möchte diesen Aufenthalt in Rheims als den ersten annehmen, und somit von Hocks Erzählung abweichen, welcher wie oben bemerkt an eine fränkische Rundreise Gerberts glaubt, ehe er nach der spanischen Mark sich begab. Damals erst wird er wohl die Verbindungen mit Adalbero dem Bischofe von Rheims, mit Constantinus dem Stiftslehrer von Fleury und anderen Männern angeknüpft haben, die sich vielfach in seinem Briefwechsel theils angeredet theils erwähnt finden, und von welchen besonders der Erstgenannte tief in seine Lebensverhältnisse eingriff. Gerbert blieb wohl an 10 Jahre in dieser Stellung.

Seine Schule zählte bald zu den glänzendsten des Landes, seine Zöglinge nahmen die bedeutendsten Würden ein, einer derselben war sogar Robert Capet, der Sohn des Frankenherzogs Hugo Capet und der frommen Adelheid.

Anfangs der achtziger Jahre erscheint Gerbert wieder in Italien und zwar in Ravenna am Hofe Otto II., wo er Weihnachten 980 eine berühmt gewordene philosophisch-mathematische Disputation gegen Ohtric bestand, welche spät Abends wegen Ermüdung der Zuhörer durch den Kaiser unterbrochen wurde. Hatte Gerbert dabei auch keinen Sieg errungen, so war er doch ebensowenig seinem Gegner unterlegen, der zu den ersten Capacitäten des Hofes gehörte. Der König belohnte dafür Gerbert, indem er ihn als Abt in Bobbio einsetzte, jenem von dem heiligen Columban gestifteten Kloster an der Trebbia, welches, wie wir früher sahen, zur damaligen Zeit die arcerianische Handschrift zu seinen Literaturschätzen zählte.

Um die damalige Zeit war es auch wohl, wo er von Mantua aus dem Adalbero mittheilte, dass er jene acht Bücher des Boethius gefunden habe,[371]) in welchen wir die verloren gegangene Astronomie und höchst wahrscheinlich auch die Geometrie wieder erkannten. Hock giebt daher wohl richtig das Datum dieses Briefes zu 982 an, im Widerspruch zu der Sammlung von Gerberts Briefen, wo die Jahreszahl 972 angenommen ist.[578])

Die Stellung Gerberts als Abt von Bobbio war keine beneidenswerthe. Man wollte es ihm nicht vergeben, dass er, ein Fremdling, aufgedrungen und Italienern vorgezogen worden war. Widerspenstigkeit seiner untergebenen Mönche, Anfeindungen umwohnender Grossen, welche die Güter des Klosters an sich gerissen hatten, Verdächtigungen am kaiserlichen Hofe vereinigten sich, ihm den Aufenthalt zu verleiden. Als daher Otto II. am 7. December 983 starb, als Pabst Johann XIV., von früher her Gerberts persönlicher Gegner, ihm jede Hülfe verweigerte, da verliess Gerbert voller Unmuth seine Abtei und nahm zum zweiten Male seinen Aufenthalt in Rheims bei seinem Freunde Adalbero. Aeussere Umstände lenkten seine Wahl fast mehr als innere Neigung. Denn diese hätte ihn wohl ebenso leicht veranlassen können, dem Rufe des Guarin Folge zu leisten, dessen Freundschaft noch frühere Anrechte besass, und der ihn aufforderte bei Borel seinen Aufenthalt zu wählen; oder seine minder ruhige Gemüthsart hätte ihn an den

deutschen Kaiserhof gezogen, zu dessen weiblichen Familiengliedern, besonders zu der Mutter Theophania und zu der Grossmutter Adelheid des jungen Otto III., er seit seinen beiden Zusammentreffen mit dem ersten und zweiten Otto in den engsten Beziehungen stand.

Ich folge hier der Auffassung Büdingers, welcher der Ansicht ist, dass diese Beziehungen zunächst wissenschaftlicher Art waren, dass nur allmälig politische Partheisache daraus wurde, indem Gerbert, der zum Range eines Freundes sich erhoben hatte, es sich und seinen Freunden nicht verweigern konnte, auch der Rathgeber zu werden. Als solcher handelte er aber sicherlich nach bester Ueberzeugung, wenn er die Idee Karl des Grossen verfolgte, es sei, wie Büdinger sagt, eine Forderung der natürlichen deutschen Politik, das wichtige Nachbarland im Süden nicht den lauernden Griechen, nicht dem nahen burgundischen Reiche zu überlassen, es sei zugleich eine Forderung der Religion, den Mittelpunkt der Christenheit nicht der Willkühr eines verdorbenen städtischen Adels preiszugeben. Nur muss man, um diese Ansichten zu würdigen, nothwendig auch die ganze Zeit in Betracht ziehen, und muss sich nicht verleiten lassen, als absolut gut und für Deutschland nützlich zu preisen, was in solchen Jahrhunderten berechtigt erscheinen konnte, wo nur dynastische Interessen die weltliche wie die kirchliche Politik lenkten.

Als Otto II., der Wohlthäter Gerberts, dem dieser den Eid der Treue geschworen, starb, da erhoben sich zwei gefährliche Feinde, die früher schon vom Vater mit Mühe besiegt jetzt auf's Neue aufstanden, und unter dem Vorwande, ihnen gebühre die Vormundschaft über den erst vierjährigen Otto III., das Reich zu zerreissen drohten. Heinrich der Böse von Baiern und Lothar von Frankreich waren, jeder von beiden für sich, schon gefährlich genug; es galt vor Allem ihre Vereinigung zu verhindern. Das war es, wozu Gerbert nach Rheims ging, wenn er auch seinem väterlichen Freunde, dem Abt Gerald von Aurillac, schreibt, er wolle dort nur die eine Zeit lang unterbrochenen Studien wieder aufnehmen. Gerbert wollte von Rheims aus auf Hugo Capet einwirken, während in Deutschland Erzbischof Willigis von Mainz die Parthei Otto III. ergriff und den Herzog Heinrich zu Paaren trieb. Es ist nicht möglich, die politische Thätigkeit Gerberts in Rheims in der Kürze zu schildern, welche allein mir erlauben würde, ihrer näher zu gedenken. Ich muss mich daher

damit begnügen ihrer als einer erfolgreichen zu erwähnen, zu erwähnen, dass es sein Werk wohl hauptsächlich war, wenn Hugo Capet die Parthei Otto III. ergriff und Ende 985 ein für diesen letzteren günstiger Friede geschlossen wurde. Gerbert dachte jetzt daran mit der Kaiserin Theophania nach Sachsen zu gehen, aber neue Pflichten hielten ihn in Frankreich zurück.

Ludwig der Faule, der letzte karolingische König von Frankreich, starb am 19. Mai 987, und um den erledigten Thron stritten Herzog Karl von Lothringen, der der Erbfolge nach das eigentliche Anrecht hatte, und Hugo Capet. Letzterer, der Liebling des Volkes, siegte, wurde zum König erwählt und liess seinen Sohn Robert gleich auch schon zum Könige krönen, Alles in dem Zeitraume bis zum Januar 988. Gerberts Stellung dabei war im Voraus angewiesen. Gegner von Karl aus den früheren Fehden, Lehrer von Robert Capet musste er für diesen zu wirken suchen, um so mehr als auch der deütsche Kaiserhof mit der neuen Dynastie befreundet und verschwägert war. Kaum war Robert gekrönt, so wandte sich das Glück. Karl von Lothringen siegt, nimmt die Stadt Laon ein und in ihr die Königin Emma, die Wittwe Lothars, Mutter Ludwig des Faulen gefangen. Gleichzeitig stirbt der Erzbischof Adalbero von Rheims. So gegründete Aussicht Gerbert hatte dem verstorbenen Freunde in seiner Würde nachzufolgen, so musste er doch darauf verzichten. Es galt A r n u l p h, den jugendlichen Sohn Lothars, der Capet'schen Parthei zu gewinnen, und so setzte man dessen Wahl mit Gerberts eigener Einwilligung durch, wogegen Arnulph dem Könige den Eid der Treue schwur. Im 10. Jahrhunderte wollte das nicht viel heissen. In heimlichem Einverständnisse mit seinem Onkel Karl von Lothringen liess Arnulph durch einen vertrauten Priester A d e l g a r dem Feinde die Thore von Rheims öffnen; die Söldner übten Raub und Mord und schonten selbst den Dom nicht.

Gerbert, streng bewacht, fühlte sich bei scheinbarem Glanze der Stellung höchst unglücklich. Ende 989 gelang es ihm zu entfliehen und zum Könige Hugo zu gelangen, mit welchem er auch später vor Laon rückte, wohin sowohl Karl von Lothringen als Arnulph sich zurückgezogen hatten. Die leichte Beweglichkeit von Gerberts reichem Geiste charakterisirt sich durch Nichts besser als durch den Umstand, dass er im Geräusche des Lagerlebens Musse fand, mathematischen Dingen nachzuhängen und von hier aus an

Remigius von Trier einen interessant gewordenen Brief arithmetischen Inhaltes zu schreiben. Nach einer Belagerung von mehreren Monaten fiel Laon. Der gefangene Karl von Lothringen wurde nach Orleans gebracht, wo er bis zu seinem erst mehrere Jahre später erfolgten Lebensende in Bewachung blieb. Arnulph gestand am 16. Juni 991 vor der Synode von Rheims seine Verbrechen, wurde entsetzt und gleichfalls nach Orleans in Gewahrsam gebracht.

Jetzt endlich wurde Gerbert zum Metropoliten von Rheims erwählt, wozu schon der sterbende Adalbero ihn bezeichnet hatte. Aber der seines Amtes entsetzte Arnulph hatte in Rom ebensoviele Freunde, als Gerbert Feinde. Die Bestätigung der Aussprüche der Rheimser Synode wurde vom Pabste Johann XV. verweigert. Drei Jahre gingen in Unterhandlungen dahin, indem Gerbert Rechtsgutachten gelehrter Bischöfe für sich erwirbt, auf Zusammenkommen einer Synode dringt, welcher auch seine Gegner beiwohnen sollen, freiwillige Entsagung aber verweigert; denn, schreibt er, es handelt sich um Grösseres als um mich, nämlich um Ansehen und Würde des Priesterthums und den Zustand des Reiches. Gleichwohl liess er durch eine Einladung Otto III. im Spätsommer 994 sich bewegen, wenigstens Rheims zu verlassen und an den Kaiserhof überzusiedeln. Eine kurze Rückreise nach Frankreich wurde nur nothwendig, als er im Juni 995 in Mouson vor der endlich zusammenberufenen Synode sich zu verantworten kam. Das Resultat war, dass eine neue Synode auf den 1. Juli anberaumt wurde, dass man Gerbert auferlegte, sich bis dahin vom Gottesdienste zu enthalten, und dass dieser zwar in die Entsagung von der Feier der Messe willigte, im Uebrigen aber fester als je auf seinen rechtmässigen Besitz der Metropolitenwürde bestehend nach Deutschland zurückkehrte.

Auch in dieser Zeit äussert sich die Spannkraft von Gerberts Geiste durch eine wissenschaftliche That. Mitten unter diesen ihn persönlich so nahe berührenden Kämpfen verfertigte er noch vor der Synode von Mouson eine Sonnenuhr, zu deren Richtigstellung er Beobachtungen des Polarsterns machte; und gleich nach der Synode auf einem Feldzuge gegen slavische Stämme an Elbe und Oder, auf welchem er im Sommer 995 den Kaiser begleitete, schrieb er seine uns noch erhaltene Geometrie.

In Rom war inzwischen Pabst Johann XV. selbst in grosser

Bedrängniss. Die Geschichte hat das Regiment, welches in Rom herrschte, seit Sergius III. im Jahre 904 zum Pabste erhoben worden war, mit einem eben so bezeichnenden als schimpflichen Namen gebrandmarkt. Crescentius, ein edler Patricier und römischer Consul, war der Erniedrigung unter immer wechselnden Buhlerinnen müde geworden, und hatte sich selbst des Einflusses bemächtigt, den jene seit fast einem Jahrhunderte ausübten. Bei solchen inneren Kämpfen schienen nun endlich die Verhältnisse darnach angethan jene Ideen, welche Gerbert im Herzen wie im Kopfe trug, und welche er auf Otto III. übertragen hatte, zu verwirklichen. Im Frühjahr 996 überschritten sie mit einem Heere die Alpen, und als wolle das Schicksal ihre Pläne begünstigen, kam ihnen in Ravenna die Nachricht entgegen, dass Pabst Johann am 9. Mai gestorben sei. Alsbald wurde unter dem Drucke der Nähe des Heeres Bruno aus dem sächsischen Fürstenhause als *Gregor V.* zum Pabste gewählt, und zwar so rasch, dass er selbst schon am 21. Mai Otto in Rom zum Kaiser krönen konnte. Otto kehrte nach Deutschland zurück, *Gerbert blieb in Rom* als Rathgeber des noch jugendlichen Pabstes.

Auch während dieser Periode bewährte Gerbert ebenso seine Pietät gegen längst verstorbene Heroen der Wissenschaften, die ihm die liebsten waren, als seine schriftstellerische Thätigkeit. In Pavia veranlasste er Otto III. *das Grab des Boethius* mit einem Denkmale zu schmücken, zu welchem er selbst die *Inschrift* verfasste,[578a]) und etwa um dieselbe Zeit, vielleicht wenig später, vollendete er jene *Abhandlung über das Dividiren*, welche dem Constantinus von Fleury gewidmet ist, und welche bereits im XIX. Kapitel bei Gelegenheit von Bedas mathematischen Schriften in Besprechung gezogen wurde.

Crescentius blieb bei der Wahl des kaum mündigen Pabstes nicht ruhig. Er lehnte sich gegen Gregor auf, vertrieb ihn und Gerbert und setzte einen Gegenpabst ein. Aber Otto eilte als Rächer herbei, und bald war Gregor wieder im Besitz von Rom, Crescentius und seine Anhänger auf's grausamste hingerichtet. Gerbert wurde jetzt 998 mit dem *Bisthume Ravenna* belohnt, und im folgenden Jahre erfüllte sich der Schicksalsspruch, der ihm in dreifacher Erhebung ein dreifaches R verheissen hatte.[579]) Von Rheims nach Ravenna, von Ravenna nach Rom. Gregor V. starb am 5. Februar, Gerbert feierte am 2. April 999 seine *Inthroni-*

sation unter dem Namen Sylvester II. Er verwaltete den päbstlichen Stuhl fast genau vier Jahre lang bis zu seinem Tode, der am 12. Mai 1003 erfolgte. Aber während dieser Zeit musste er es erleben, dass Otto bei seinem dritten Römerzuge vor dem Aufruhre des empörten Volkes fliehen musste, dass derselbe am 22. Januar 1002, ein erst 22jähriger Jüngling, in Paterno starb, sei es nun an einer Frieselkrankheit oder, wie man später sagte, an Gift, welches die Wittwe des Crescentius ihm beibrachte.

Da mochte Gerbert doch vielleicht zum Bewusstsein kommen, dass italienische und deutsche Volkscharaktere nicht in dieselben Formen sich schmiegen lassen, dass die Idee seines Lebens, ein von Rom ausgehendes christliches Weltkaiserthum, eben nur eine Idee war, und dass der Versuch der Ausführung das Haus der Ottonen, seiner theuersten Freunde, zu Grunde gerichtet habe. Aber mag auch die Idee eine falsche gewesen sein, und der Ruin der Ottonen, wie der der Hohenstaufen, wie die letzten Jahrzehnte erklären sie dafür, Gerberts Charakter bleibt jedenfalls fleckenlos, und der Ausspruch ist darum nicht minder gerechtfertigt, den ich am Anfange dieses Kapitels gebrauchte, dass Gerbert eine von den Figuren sei, bei welcher man inmitten einer erbärmlichen Zeit Athem holend anhält, und an deren Eindruck sich erquickt. Ich habe bei dieser allerdings etwas ausführlichen biographischen Notiz des bedeutenden Mannes schon bei den einzelnen Zeitabschnitten die mathematischen Schriften angegeben, die er jedesmal verfasste. Ich muss jetzt diese Schriften näher besprechen, und zwar will ich dabei auch wieder in chronologischer Reihenfolge vorgehen mit seiner Erziehung beginnend.

XXII. Gerberts Mathematik.

Wir wissen nur sehr wenig über die eigentliche Methode, nach welcher Gerbert erzogen wurde, sei es nun während seiner Kindheit in Aurillac, sei es nun später in der spanischen Mark bei Hatto. Ebensowenig wissen wir, wer an diesem zweiten Aufenthaltsorte Gerberts Lehrer, besonders in den mathematischen Wissenschaften, gewesen sein mag. Hock giebt als solchen einen gewissen Josephus an, aber wie Büdinger schon bemerkte, ohne die besonderen Gründe hervorzuheben, die ihn zu dieser Ansicht vermochten. Freilich ist es, was Büdinger übersehen hat, nicht schwer, nachträglich diese Gründe selbst wieder aufzufinden. Hock dachte nämlich sicherlich an ein Manuscript der Abtei St. Emmeran in Regensburg, in dessen Widmung der Verfasser G. seinen Vater den Gottesgelehrten J. anredet.[580]) Hock hielt nun, wie sein Vorgänger Pez und wie anfänglich auch Chasles, diesen G. für Gerbert, und fand alsdann in dem Anfangsbuchstaben J., welcher mit Josephus übereinstimmt, und in der Anrede als Vater eine ihm genügende Veranlassung den Josephus, der im Uebrigen zweimal in Gerberts Briefwechsel genannt wird, für einen ehemaligen Lehrer desselben zu halten. Diese Gründe hätten auch in der That manches Bestechende für sich, wenn nicht aus späteren Untersuchungen von Chasles hervorginge, dass der G. des St. Emmeran-Manuscriptes nicht Gerbert ist, sondern Gerland, ein Schriftsteller, von welchem im nächsten Kapitel noch die Rede sein wird, dass also damit die ganze Hypothese zerfällt. Die beiden Stellen aus Gerberts Briefwechsel, in welchen Josephus genannt ist,[581]) genügen nämlich für sich allein durchaus nicht um ein engeres Verhältniss zwischen ihm und Gerbert muthmaassen zu lassen. Beide-

mal wünscht Gerbert für Adalbero von Rheims des Spaniers Josephus, oder wie es das zweite Mal heisst des weisen Josephus Abhandlung über Multiplication und Division zu erhalten, und wendet sich desshalb an den Abt von Aurillac, bei dem Guarin ein Exemplar zurückgelassen hatte, und an einen ihm bekannten Geistlichen der Mark. Da nun Gerbert in dem Briefe nach Aurillac den Wunsch ausspricht, selbst diese Schrift mitzuerhalten, da er sie also noch nicht besass, so scheint es mir sogar unwahrscheinlich, dass von einem Werke eines ehemaligen Lehrers die Rede sein sollte. Zuverlässig hätte in diesem Falle Gerbert sich herzlicherer Ausdrücke bedient, als die Namen sind, welche er dem Josephus beilegt, das können wir aus der ehrerbietigen, anhänglichen Natur Gerberts schliessen, die sich überall verräth wo z. B. von den Brüdern des Klosters Aurillac in seinen Briefen die Rede ist. Büdinger meint, Josephus sei vielleicht identisch mit einem arabischen Astronomen Joseph ben Omar Algiaheri, welcher zwar erst 1043 starb, aber möglicherweise sehr alt wurde. Dieses sehr alt würde nun allerdings im Superlativ vorhanden sein, wenn er 70 Jahre vor seinem Tode „der weise Josephus" genannt wurde. Zudem ist in beiden Briefen von einer Abhandlung des Josephus in directer Weise die Rede, nicht von einer Uebersetzung einer solchen. Josephus war also wohl gar kein Araber, sondern vielleicht ein spanischer Jude, vielleicht auch zwar von Geburt ein Maure, aber in der spanischen Mark erzogen und in denselben Wissenschaften gebildet, welche das übrige christliche Europa besass. Dann konnte er eine lateinische Originalabhandlung schon verfassen. Dass nämlich von einer solchen die Rede ist, vermuthe ich auf Grund eines dritten oft citirten Briefes,[582]) in welchem Gerbert einen gewissen Lupitus von Barcelona bittet, ihm die Uebersetzung zu schicken, die er von einem astronomischen Buche gemacht habe. Also da nennt er nur den Uebersetzer, nicht den eigentlichen Verfasser. Sollte es darnach nicht nahe liegen, dass auch Josephus der war, der den lateinischen Tractat schrieb, und zwar als Original schrieb? Ich komme übrigens zum Schlusse dieses Kapitels nochmals hierauf zurück.

Wissen wir nun nicht, wie Gerbert erzogen wurde, so kennen wir dagegen seinen eigenen Lehrplan, den Richerus uns ausführlich mittheilt.[583]) Zuerst wurden die Schüler an philosophische Auffassung gewöhnt. Die Hülfsmittel waren griechische

Werke in lateinischer Uebersetzung, und zwar zumeist in der des Consul Manlius, d. h. des Boethius, wie Weber offenbar mit Recht interpretirt. [584]) Darauf folgte die Rhetorik verbunden mit der Lectüre lateinischer Dichter, und nach ihr eigentlich dialektische Uebungen, die unter der Leitung eines besonders dazu angestellten Lehrers stattfanden. Von dieser Richtung der Unterrichtsgegenstände unterscheidet Richerus nun ganz besonders die mathematischen Disciplinen, auf welche Gerbert viele Mühe verwandte. Er begann mit der Arithmetik als dem ersten Theile, liess darauf die Lehre vom Monochorde und die ganze Musik folgen, deren Kenntniss in Frankreich vorher kaum vorhanden war, und lehrte alsdann die Astronomie, eine Wissenschaft, die kaum verständlich ist, die er aber durch Apparate zu erläutern wusste, von welchen Richerus die wichtigsten aufzählt. Büdinger hat diese Instrumente mit durchaus erschöpfender Klarheit besprochen, [585]) und gezeigt, dass sie ausschliesslich auf griechisch-römische Quellen hinweisen, ebenso wie das Monochord, dessen Gerbert in der Musik sich bediente. Richerus nennt uns die Bücher nicht, die diesem mathematischen Unterrichte zu Grunde gelegt wurden, aber wir dürfen doch wohl annehmen, dass Gerbert solche Werke benutzte, denen er selbst seine Kenntnisse verdankte. Und wenn nun diese Kenntnisse, soweit ich sie erwähnt habe, durchweg griechisch-römische waren, und zwar der Art, dass sie leicht aus den Bearbeitungen griechischer Schriftsteller durch Boethius oder doch aus Werken, die selbst den Boethius als Grundlage benutzten, hervorgegangen sein konnten, wenn die sonstigen Bearbeitungen des Boethius vorher ausdrücklich als Lehrbücher genannt wurden, so steht Nichts der Annahme im Wege, dass Gerbert die Mathematik wirklich direct oder indirect nach Boethius lehrte. Die Besprechung der noch vorhandenen Geometrie Gerbert's wird uns in dieser Vermuthung noch bestärken; für jetzt verweile ich aber noch bei dem von Richerus mitgetheilten Lehrplane, und komme dabei zu dem letzten Kapitel seiner Erzählung, welches ich seiner Wichtigkeit halber in seinem ganzen Wortlaute angeben will.

„Bei der Geometrie wurde nicht geringere Mühe auf den Unterricht verwandt. Zur Einleitung in dieselbe liess Gerbert durch einen Schildmacher einen Abacus, d. h. eine Tafel von geeigneten Dimensionen anfertigen. Die längere Seite war in 27 Theile abgetheilt, und darauf ordnete er Zeichen, neun an der Zahl, die jede

Zahl darstellen konnten. Ihnen ähnlich liess er 1000 Charaktere von Horn bilden, welche abwechselnd auf den 27 Abtheilungen des Abacus die Multiplication oder Division irgend welcher Zahlen darstellen sollten, indem mit deren Hülfe die Division oder Multiplication der Zahlen so compendiös von Statten ging, dass sie bei der grossen Menge von Beispielen viel leichter verstanden, als durch Worte gezeigt werden konnte. Wer die Kenntniss davon sich vollständig erwerben will, der lese das Buch, welches Gerbert an C. den Grammatiker schrieb. Dort findet er es zur Genüge und darüber hinaus beschrieben."

Dieses ganze Kapitel des Richerus stimmt nun genau mit dem *Rechenbrette* überein, dessen Zeichnung Boethius seiner Geometrie einschaltete, und welches bis auf den heutigen Tag in verschiedenen Exemplaren in manchen Alterthumssammlungen sich noch vorfindet. Nehmen wir an, dass Gerbert's Abacus diesen glich, dann, aber auch nur dann, ist die Erklärung des Richerus verständlich. Dann zeigt sich noch eine weitere Uebereinstimmung Gerbert's mit Boethius darin, dass wenn der Erstgenannte den Abacus als *Einleitung zum geometrischen Unterrichte* benutzte, der römische Mathematiker ihn doch wenigstens als *Einleitung zum zweiten Theile der Geometrie* verwendet. Die *Aenderung*, welche darnach Gerbert sich erlaubte, war also keine sehr bedeutende.

Eine Frage liesse sich indessen hier aufwerfen: Wenn Gerbert die Mathematik aus Boethius kannte, und mehr oder weniger nach ihm lehrte, warum hat er dann die Reihenfolge der Astronomie und Geometrie umgekehrt? Dagegen lässt sich nun einmal bemerken, dass vielleicht Richerus nur in falscher Reihenfolge erzählt; nennt er doch auch unter dem Trivium nicht die Grammatik, welche unzweifelhaft gelehrt wurde und somit irrthümlich von Richerus weggelassen ist. Dann aber geht aus der ganzen Beschreibung des Lehrplanes hervor, dass Gerbert eine Art praktischer Astronomie vortrug, keineswegs die eigentlich theoretische, und jene konnte der Geometrie vorausgehen. Das war denn vielleicht auch eine kleine Veränderung, wie sie jeder Lehrer wohl zu allen Zeiten für gestattet hielt und vornahm, wenn er sich im Uebrigen auch eines fremden Lehrbuches bediente.

Endlich geht aus dem mitgetheilten Kapitel mit Bestimmtheit hervor, dass jene *Abhandlung über das Dividiren*, deren

Autorschaft ich früher dem Beda absprach, in der That dem Gerbert angehört, da die Identität des Grammatikers C. mit dem Constantinus nicht wohl bezweifelt werden wird, wenn wir wiederholt daran erinnern, dass Constantinus ein die Mathematik liebender Freund des Gerbert war. Diese Abhandlung wird sonach noch in diesem Kapitel besprochen werden müssen.

Vorläufig führt uns indessen die chronologische Reihenfolge zu dem Briefe an Remigius von Trier, welchen Gerbert nach Hock im Jahre 990 während der Belagerung von Laon schrieb.[586]) Büdinger hat sich viele, wie ich mit Friedlein glaube, vergebliche Mühe um diesen Brief gegeben. Freilich ist es nicht leicht, ein dem Texte nach verdorbenes Antwortschreiben in seinem richtigen Wortlaute herzustellen, wenn sogar der Brief fehlt, auf welchen die Antwort erfolgte. Das scheint aber grade hier der Fall zu sein. Es scheint, als ob Remigius von Trier dem Gerbert seine arithmetischen Zweifel mittheilte, welche dieser zu zerstreuen pflegte, und so waren dem Ersteren einmal auch Skrupel in Bezug auf zwei Dinge gekommen, welche vielleicht in einem früheren Briefe Gerbert's enthalten waren. Gerbert antwortete ihm nun mit folgenden Worten, wobei ich der Uebersetzung die scharfsinnigen Conjecturen zu Grunde lege, welche Friedlein zur Reinigung des Textes ersann, und welche nach aller Wahrscheinlichkeit das Richtige treffen. Gerbert schreibt:

„Das in Bezug auf die erste Zahl hast du richtig verstanden, dass sie sich selbst theilt, weil einmal eins eins ist. Aber desshalb ist nicht jede sich selbst gleiche Zahl als ihr Theiler zu betrachten; z. B. einmal vier ist vier, aber desshalb ist nicht vier der Theiler von vier, sondern vielmehr zwei, denn zwei mal zwei sind vier. Ferner das Zeichen 1., welches unter der Kopfzahl X steht, bedeutet X Einheiten, welche in sechs und vier zerlegt das anderthalbmalige Verhältniss gewähren. Dasselbe liesse sich auch an drei und zwei sehen, deren Unterschied die Einheit ist.“

Schon das ausdrücklich gebrauchte Wort „ferner“ zeigt, dass in diesem Briefe von zwei Dingen die Rede ist. Der erste Satz, welcher besprochen wird, scheint sich, wie auch Friedlein andeutet, auf Quadratzahlen und deren Wurzeln bezogen zu haben. Der zweite Theil des Briefchens geht auf einen anderen wohl gleichfalls zahlentheoretischen Satz, der aber praktisches Rechnen erforderte, vielleicht auf eine Aufgabe von der Art wie jene im XIX. Kapitel

besprochene 29. Aufgabe des Alcuin, in welcher verlangt wurde, eine gegebene Zahl in zwei Theile zu zerlegen, die in anderthalbmaligem Verhältnisse stehen. Gerbert hatte wohl in seinem früheren Briefe schon die Rechnung schriftlich angedeutet und dazu den Abacus hingemalt mit der Figur, oder, wie ich es übersetze, mit der Kopfzahl X und unter derselben mit dem Zeichen 1. Also hier ist nichts Neues vorhanden, was nicht aus dem uns schon Bekannten folgte.

Vor Friedleins Verbesserung enthielt der Brief in der That eine bedeutende Schwierigkeit. In einer Ausgabe der Gerbert'schen Briefe steht nämlich gleich in dem ersten Satze ein Buchstabe D, der durchaus keinen Sinn giebt. Büdinger behauptet nun sehr künstlich, dieses D sei verdruckt für ϑ, das ist das arabische Zeichen von fünf (?). Dagegen erwidert Friedlein sicher mit Recht, das 5 gebe hier ebensowenig einen Sinn wie 500; man müsse freilich annehmen, D sei nur durch einen Druckfehler hineingekommen, aber die ursprüngliche Lesart sei 1^0 gewesen. So habe ich auch übersetzt, und damit ist ein ganz erträglicher Sinn gewonnen.

Die zweite Hypothese Büdinger's zu diesem Briefe ist gleichfalls unglücklich. Er fasst nämlich das Zeichen 1 nebst dem danebenstehenden Punkte im zweiten Theile des Briefes als das arabisch geschriebene 10 auf, wo die Null durch einen Punkt ersetzt ist. Auch hier sind Friedleins Einwürfe wieder scharf und treffend. Denn, fragt er, wenn des Remigius Zweifel darin ihren Grund hatten, dass er den Punkt nicht weiter beachtete, warum machte Gerbert ihn in seiner Antwort nicht auf das Versehen aufmerksam? Also nochmals: dieser Brief liefert nichts römischer Mathematik Unzugängliches, am wenigsten „die unbestreitbare Gewissheit, dass Gerbert sich der Ziffern in ihrer arabischen Form bediente," wie Büdinger aus ihm folgern will.

Hock, welchem ich in der Chronologie der mathematischen Schriften Gerbert's wesentlich folge, lässt ihn nun im Sommer 995 seine Geometrie schreiben.[581]) Er meint, sie sei offenbar nach griechischen und arabischen Quellen bearbeitet, da Kunstausdrücke aus beiden Sprachen vorkommen. Diese der Wahrheit widersprechende Angabe hat schon Büdinger zurückgewiesen, dessen Ansichten über Gerbert's wissenschaftliche Thätigkeit überhaupt durchgängig so gesund und folgerichtig sind, dass es unbegreiflich erscheint, wie er überall, wo es mehr oder weniger um den Ursprung der

Zahlzeichen sich handelt, in einer vorgefassten Meinung befangen bleiben, und sich von Irrthum zu Irrthum verleiten lassen kann. In der ganzen Geometrie des Gerbert[588]) kommt kein einziges arabisches Wort vor, wogegen griechische Ausdrücke fast auf jeder Seite enthalten sind, zumeist lateinisch geschrieben, aber einmal auch mit griechischen Buchstaben. Von Schriftstellern finde ich folgende citirt: Pythagoras im 9. und 11. Kapitel, Plato's Timäus im 13. Kapitel, des Chalcidius Commentar zu dieser letzteren Schrift im 1. Kapitel, Eratosthenes im 93. Kapitel, den Commentar des Boethius zu den Kategorien des Aristoteles im 8. Kapitel und endlich die Arithmetik des Boethius in der Vorrede, im 6. und im 13. Kapitel. Also auch wieder durchweg griechisch-römische Quellen, verhältnissmässig noch am häufigsten Boethius. Was nun den wissenschaftlichen Inhalt der Geometrie betrifft, so ist auch dieser mit dem griechisch-römischen Ursprunge von Gerbert's mathematischen Kenntnissen durchaus übereinstimmend, und Chasles hat ganz Recht, wenn er sagt,[589]) es sei nur so obenhin und ohne wissenschaftliche Kritik, dass man diese Kenntnisse arabischen Lehren zuschreibt. Ich will hier nicht auf die einzelnen Sätze eingehen, für welche ich auf Chasles verweisen kann, nur die Bemerkung muss ich wiederholen, dass, wie schon früher gesagt, in der Gerbert'schen Geometrie die Zeichen der Minutien vorkommen, wie Boethius sie erwähnt und wie wir bei Beda, bei Odo und anderen weniger genau bekannten Autoren sie vorgefunden haben, die also ganz zuverlässig griechisch-römischen Ursprunges sind.

Wieder einige Jahre später um 997 soll Gerbert den Brief an Constantinus geschrieben haben, sowie die daran sich anschliessende Abhandlung über Multiplication und Division. Die Abhandlung selbst ist verschiedentlich abgedruckt, zuletzt durch Chasles, der auch eine mustergültige Uebersetzung und Erläuterung derselben gab.[590]) Das Widmungsschreiben hingegen ist meines Wissens noch nicht in eine moderne Sprache übersetzt, wesshalb ich es hier mittheile.

„Der Stiftslehrer Gerbert seinem Constantinus. Die Gewalt der Freundschaft macht fast Unmögliches möglich, denn wie würde ich versuchen, die Regeln der Zahlen des Abacus zu erklären, wenn Du nicht, mein süsser Trost, die Veranlassung bötest? So will ich denn, obwohl etliche Jahrfünfe vergangen sind, seit ich weder

das diese Dinge enthaltende Buch in Händen hatte, noch in Uebung war, Einiges in meinem Gedächtnisse zusammensuchen und es zum Theil mit denselben Worten, zum Theil demselben Sinne nach vorbringen. Auch soll kein Weiser sich einbilden, diese von literarischen Studien abweichenden Dinge seien irgend einer Kunst oder ihm selbst unangemessen. Denn wie kann er sagen was Finger-, Gelenkzahlen, Bruchtheile sind, wenn er es verachtet Schüler der Alten zu sein? Und doch will er, um mit Flaccus zu reden, allein zu wissen scheinen, wovon er mit mir keine Kenntniss hat. Wie, wenn dieselbe Zahl bald einfach auftritt, bald zusammengesetzt, bald als Finger-, bald als Gelenkzahl? Du merkst wohl als fleissiger Forscher nach solchen Dingen, dass der Weg zu jenen Regeln den Worten nach kurz, dem Sinne nach lang ist, und dass man ihn mit aller Treue innehalten muss bei der Zusammenstellung der Intervalle, wie bei der Theilung des geometrischen Halbmessers in der Praxis nach Beugung und Erhebung, wie auch in Speculationen und zugleich der Praxis bei Ausmessung von Himmel und Erde."

Aus dieser Einleitung geht nun hervor, dass Gerbert auch wohl früher schon zu Constantinus in dem Verhältnisse des Lehrers zum Schüler gestanden hatte, weil er sonst nicht den Titel Stiftslehrer mit seinem Namen in Verbindung gebracht hätte, was er ausserdem, soviel ich sehe, nur dreimal in den erhaltenen Briefen that, im 7. und 12., wo er sich dem Airardus und Hugo gegenüber ehemaliger Stiftslehrer nennt, und im 148. Briefe, wo er dem Remigius von Trier als Schulvorstand [591]) schreibt. Die Bekanntschaft zwischen Gerbert und Constantinus rührt auch wirklich aus den Jahren 972 bis 982, wo er, wie wir sahen, in Rheims theils selbst noch Dialektik erlernte, theils nach dem durch Richerus uns bekannten Plane lehrte. Vergleicht man diese Zeit mit dem Datum des Briefes an Constantinus, so erscheint ein Zwischenraum von etwa 15 Jahren, seitdem Gerbert den mathematischen Schulunterricht leitete, und er ist somit berechtigt von etlichen Jahrfünfen zu reden, seit denen er keine Uebung hatte. Er meint dabei sicherlich nicht Uebung im Rechnen selbst, sondern Uebung im Rechenunterricht, denn das ist es ja, was Constantinus forderte. Jetzt verschwindet die Schwierigkeit, die darin gefunden wurde, Etwas nach so langer Zeit dem Gedächtnisse nach mit denselben Worten vorzutragen. Wer 10 Jahre lang in einer Schule einen Gegenstand behandelte, also tau-

send und aber tausendmal ihn mit denselben Worten sagte und sich aufsagen liess, der wird auch nach 15jährigem Mangel an Uebung wohl im Stande sein, *die Regel wieder mit denselben Worten auszusprechen.* Er wird es namentlich dann im Stande sein, wenn er die Regeln nicht eigener Darstellung, sondern einem *fremden Buche* entnahm, aus welchem er sie vielleicht selbst als Knabe schon auswendig lernen musste. Ich komme damit zu der Frage, von welchem Buche hier die Rede ist?

Ich glaube der Erste gewesen zu sein, der darauf aufmerksam machte,[192]) dass in dem Briefe des Gerbert an Constantinus von *einem ganz bestimmten Buche* die Rede ist. Ich knüpfte damals daran die Vermuthung, die Geometrie des Boethius sei damit gemeint, welche Gerbert auf seiner Rundreise durch Frankreich irgendwo kennen gelernt haben mochte. Nach reiferem Studium muss ich gestehen, dass diese Vermuthung eine übereilte war. Denn erstens scheint mir, wie ich im vorigen Kapitel angab, die ganze Rundreise in Frankreich mehr als problematisch, und zweitens ist der Wortlaut des Briefes Gerbert's aus Mantua[37]) vom Jahre 782 der Art, als ob er *damals zuerst* die Geometrie des Boethius selbst gesehen habe. Freilich nicht aus denselben Gründen nimmt auch Friedlein Anstoss daran, dass hier die Geometrie des Boethius gemeint sei, während er so weit mir folgt, dass Gerbert von einem ganz bestimmten Buche spreche, welches er so lange Zeit nicht gesehen habe. Dieses Buch sei *eine frühere Schrift Gerbert's selbst, und diese Schrift sei der Text, der uns jetzt als Geometrie des Boethius bekannt ist,* und am reinsten sich in dem Manuscripte E erhielt.

Nannte ich vorher meine erste Vermuthung übereilt, so muss ich die von Friedlein für in jeder Weise unhaltbar erklären. Ich acceptire zwar das darin enthaltene Zugeständniss, dass Gerbert's Abhandlung über Multiplication und Division so viele Aehnlichkeit mit der Geometrie des Boethius hat, dass man eine directe oder indirecte Abhängigkeit der ersteren von der zweiten nicht in Abrede stellen kann, aber alles Weitere muss ich entschieden zurückweisen. Denn ich glaube sowohl nicht, dass Gerbert seine eigene Arbeit als das Buch schlechtweg citirt hätte, noch dass die Geometrie, welche wir unter dem Namen des Boethius kennen, überhaupt von Gerbert herrühren könnte.

Ich sehe ganz von den Gründen ab, durch die ich bewiesen

zu haben glaube, dass Boethius wirklich und rechtmässig der Verfasser ist; ich lasse auch die Fälschung ausser Betracht, deren Gerbert sich schuldig gemacht hätte, wenn er in der Ueberschrift den Namen Boethius sich angemasst hätte. Lassen wir die Ueberschrift für einen Augenblick eine nachträgliche Interpolation sein. Aber das muss ich nochmals mit aller Bestimmtheit hervorheben, dass *der Verfasser jener Geometrie auch eine Arithmetik und eine Musik geschrieben haben muss*, die er mitten im Texte citirt, und von Schriften dieser Art wissen wir bei Gerbert Nichts. Ferner kennen und besitzen wir ja eine *Geometrie des Gerbert*, welche er jedenfalls *nach* seiner Rheimser Lehrcarrière verfasste. Ist nun anzunehmen, dass Gerbert in diesem Werke *mit keiner Silbe* einer Schrift über denselben Gegenstand erwähnt hätte, die er schon früher verfasste, und an die seine jetzt herausgegebene Geometrie nicht im Mindesten erinnert, von deren ganzem Plan er jetzt entschieden abweicht, und die er doch nicht grade zu *verleugnen* beabsichtigt, *sonst hätte er in dem Briefe an Constantinus sie nicht genannt*? Es ist wahr, auch die *Geometrie des Boethius* lässt Gerbert in seiner ihm wirklich zugehörigen Geometrie unerwähnt, während er sie doch kannte. Allein das kommt daher, weil sie, wie wir schon früher sahen, bedeutend unter der Arithmetik desselben Verfassers steht, was ein so geistreicher und tüchtiger Mathematiker wie Gerbert wohl erkannte. Dasselbe Motiv liegt auch wohl der Nichterwähnung der *Geometer der arcerianischen Handschrift* zu Grunde, welche Gerbert gleichfalls und zwar von Bobbio her kennen musste. Zudem hatte er alle diese geometrischen Schriften nicht zur Hand, als er in Deutschland seine Geometrie schrieb, ebensowenig wie in Italien bei Abfassung der Abhandlung an Constantinus. Seine Bücher und Geräthe hatte er bei der Flucht aus Rheims wohl eingebüsst, vielleicht auch schon früher Ende 983 bei seiner von einer Flucht nur wenig verschiedenen schleunigen Abreise aus Bobbio. Dieser Ansicht ist wenigstens Hock,[593]) und wenn er es auch versäumt die Gründe anzuführen, welche ihn zu diesem Ausspruche bewegen, so liegt doch sehr nahe die Veranlassung in einem Briefe zu suchen, den Gerbert später an seinen Freund Rainaud, Mönch in Bobbio, schrieb, und worin er sagt: „Du weisst wie viele Bücher ich überall zum Studium beizuschaffen pflege, du weisst wie viele Schriftsteller in den Städten und auf

dem Lande in Italien zerstreut existiren. Desshalb lasse mir doch ohne dass Jemand sonst es weiss, auf Deine Kosten folgende Werke abschreiben: M. Manilius Astronomie, Victorinus Rhetorik, Demosthenes Augenheilkunde."

Dass Gerbert aber gewissenhaft genug war, nur solche Bücher zu citiren, die er wirklich auch vor sich hatte, das freilich lässt sich nicht streng beweisen. So viel ist indessen sicher, dass Gerbert die Arithmetik des Boethius, die er dreimal in seiner Geometrie citirt, am Hofe Otto III. in Händen haben konnte, da er selbst einst diesem ein Exemplar zugeschickt hatte.[594]) Die Antwort auf dieses Geschenk und auf die dasselbe begleitenden Verse war nämlich jenes Einladungsschreiben[595]) aus dem Jahre 994, in welchem Otto an Gerbert die Bitte richtet, in ihm der Griechen lebendigen Geist zu erwecken und ihm in der Zahlenkunde Unterricht zu geben. Gerbert sagte ihm, wie wir gleichfalls schon sahen, Erfüllung seines Wunsches zu, und dabei kommt die für uns interessante Stelle vor: „Wahrlich etwas Göttliches liegt darin, dass ein Mann, Grieche an Geburt, Römer an Herrschermacht, gleichsam aus erbschaftlichem Rechte nach den Schätzen der Griechen- und Römerweisheit sucht." Deutlicher konnte Gerbert doch wohl nicht sagen, wo für ihn die Urquelle der Wissenschaft floss!

Ich kehre nochmals zu dem Buche zurück, von welchem Gerbert in dem Briefe an Constantinus spricht. Wenn ich nach Obigem die Ansicht Friedleins zurückweisen muss, wenn mir meine eigene frühere Annahme doch auch nicht mehr vollständig genügt, so haben wir doch inzwischen verschiedene Schriften kennen gelernt, welche ursprünglich auf Boethius zurückführbar die Regeln der Multiplication und Division sogar ausführlicher und deutlicher mittheilen, als sie bei diesem sich finden, und von denen irgend Eines das in der Klosterschule zu Rheims gebräuchliche Rechenbuch gewesen sein mag. Eine derartige Schrift existirte vielleicht, wie wir sahen, von Beda, eine ähnliche von Alcuin; die Abhandlung des Odo habe ich sogar ausführlich besprochen und beiläufig auch noch eine Abhandlung des Spaniers Josephus genannt, welche dieselbe Ueberschrift besitzt wie die Abhandlung des Gerbert. Es ist somit kein Mangel an Büchern, auf die Gerbert's Ausspruch sich bezogen haben kann.

Endlich müsste ich eigentlich noch auf den genaueren Inhalt

der dem Constantinus gewidmeten Abhandlung eingehen. Ich könnte indessen doch nur das wiederholen, was bei Besprechung der Geometrie des Boethius schon in aller Ausführlichkeit dargelegt wurde, so ähnlich sind sich die beiden Arbeiten. Nur in einer bemerkenswerthen Beziehung findet ein Unterschied statt: Gerbert erläutert in seiner Abhandlung weder den Abacus, noch bedient er sich jemals der pythagorischen Zahlzeichen. Daraus ergiebt sich aber, dass er jenen als etwas längst Bekanntes voraussetzte, dass er diese als etwas Nebensächliches betrachtet, und dass er nur auf die Rechenmethoden selbst Gewicht legt. Darnach wäre also das Verdienst Gerbert's um die Ausbreitung des Abacussystemes nach meiner Meinung ein mehr zufälliges, so weit man von einem Zufalle des Talentes zu sprechen berechtigt ist. Ich meine, Gerbert lehrte durchaus Nichts, was nicht lange vor ihm schon gelehrt worden wäre, aber er lehrte es, wie es noch nie gelehrt worden war. Sein weithin berühmtes hervorragendes Darstellungsvermögen zog Schüler von allen Seiten an, und diese verbreiteten selbst wieder das gründlich Aufgenommene in anderen Kreisen. Davon wird weiter im folgenden Kapitel zu reden sein, jetzt habe ich es noch mit der Frage zu thun, wie man wohl dazu kam, so lange Zeit die Meinung zu hegen, Gerbert habe zuerst die modernen Zahlzeichen in das christliche Europa eingeführt und zwar aus dem arabischen Spanien her.

Zu dem ersten Theile dieser Hypothese konnte, so lange man die Schrift des Boethius aus den Augen verloren hatte, die Thatsache führen, dass, wie soeben bemerkt, grade Gerbert's nächste Schüler für die Verbreitung der Zahlzeichen und des Rechnens mit denselben viel, man kann wohl sagen das Meiste, gethan haben. Zu der Meinung aber, dass Gerbert aus arabischer Quelle schöpfte, konnte ebenderselbe Umstand führen, dass Boethius und sein Werk allmälig in Vergessenheit gerathen waren, dass statt seiner Methoden die Methoden des Algorithmus Eingang gefunden hatten, dass diese Methoden, weil sie volksthümlich werden konnten und den Charakter einer Schrift in sich trugen, grade dazu beitrugen, das Andenken an Boethius und die Alten mehr und mehr zu verwischen. Und was wir in früheren Kapiteln als höchst wahrscheinlichen Grund dafür fanden, dass die Araber des Namens der indischen Ziffern sich bedienten, dasselbe führte in Eu-

ropa zum Namen der arabischen Ziffern, man verwechselte die Ziffern mit der Methode, durch welche sie erst Volkseigenthum wurden.

In dieser Ueberzeugung, dass nur von den Arabern her die Ziffern entstammen konnten, in der weiteren Ueberzeugung, dass Gerbert der Vermittler gewesen, suchte man nun nach Gründen, welche den beiden Hypothesen als Stütze dienen konnten; und man war wirklich so glücklich zwei Schriftsteller ausfindig zu machen, die allenfalls zu diesem Zwecke benutzt werden konnten. Der ältere von beiden, der Chronist Adhemar von Chabanois war ein Zeitgenosse Gerbert's, und würde sonach, wenn er bestimmte Nachricht gäbe, gar sehr in's Gewicht fallen. Ich muss daher die ganze Stelle wiederholen, in welcher er übrigens sehr lakonisch das Leben Gerbert's erzählt.[596])

„Gerbert war aus Aquitanien von niederer Geburt, er war seit seiner Kindheit Mitglied des Klosters des heil. Geraldus von Aurillac; er durchwanderte der Weisheit wegen erst Frankreich, dann Cordova. Er wurde dem Könige Hugo bekannt und mit dem Bisthume Rheims beschenkt. Dann lernte Kaiser Otto ihn kennen, worauf er das Bisthum Rheims verliess und Erzbischof von Ravenna wurde. Als später Pabst Gregor, der Bruder des Kaisers starb, wurde derselbe Gerbert scheinbar seiner Weisheit wegen vom Kaiser zum römischen Pabste erhöht. Da veränderte er seinen Namen und hiess seit der Zeit Sylvester."

Diese fast mehr als kurze Biographie hat nun den Einen Veranlassung gegeben, eine frühe Rundreise Gerbert's in Frankreich anzunehmen, hat Andere verleitet, an einen Aufenthalt Gerbert's in Cordova zu glauben. Aber grade der hier gemachte Gegensatz des Landes Frankreich zur Stadt Cordova zeigt, wie Büdinger schon hervorgehoben hat,[597]) dass Adhemar nicht recht wusste, was er schrieb, dass er wohl nur die berühmte Residenz der Ommaijaden als Repräsentantin des ganzen Landes jenseits der Pyrenäen nannte, und dass Gerbert thatsächlich nur in der spanischen Mark gewesen sein kann, nicht bei den Arabern. Wäre er bei den Arabern gewesen, so hätte es nur ohne oder mit Einwilligung seiner Oberen der Fall sein können. Im ersten Falle wäre, wie ich bereits im vorigen Kapitel sagte, das spätere freundschaftliche Verhältniss Gerbert's zu den Klosterbrüdern von Aurillac ebenso befremdend, wie das Stillschweigen seiner Feinde über diesen mehr als

häkligen Punkt. Im zweiten Falle, wenn Gerbert's Obere von seinem Aufenthalt bei den Arabern wussten und ihn billigten, wenn man nichts Unrechtes darin sah, sich bei den Ungläubigen Gelehrsamkeit zu holen, so hätte Gerbert's Schüler Richerus, so hätten andere Freunde uns die Mittheilung seines Aufenthaltes in dem Wunderlande nicht vorenthalten. Statt dessen nennt die Chronik von Verdun[598]) Gerbert einen zweiten Boethius, was also wieder auf den von uns angenommenen Ursprung seiner Kenntnisse hindeutet, oder doch wenigstens so viel beweist, dass man gewohnt war, in damaliger Zeit Boethius als den hervorragenden Lehrer mathematischer Gegenstände zu betrachten.

Eine bestimmtere Widerlegung der vorgeblichen Reise Gerbert's nach Cordova zu den Arabern findet Büdinger[599]) noch in dem Umstande, dass Gerbert kein Arabisch verstand, sonst hätte er sich nicht an Lupitus von Barcelona um die Uebersetzung einer doch jedenfalls ursprünglich arabischen Astronomie gewandt.[582]) Ich lasse übrigens dahingestellt, wie weit dieser Beweis ein schlagender genannt werden darf, da es doch wohl möglich wäre, dass Gerbert die arabische Sprache kannte, ohne ihrer grade so mächtig zu sein, wie des Lateinischen. Geht es doch den meisten neueren Gelehrten ähnlich mit dem Griechischen. Man versteht es wohl, wenn man sich Mühe giebt, aber man liest doch mit grösserer Leichtigkeit in einer lateinischen oder gar deutschen Uebersetzung.

Wenn ich oben sagte, wir besässen keinerlei Mittheilung über Gerbert's Aufenthalt bei den Arabern, so muss dieser Ausspruch eine Einschränkung in Bezug auf den zweiten Schriftsteller erleiden, den unsere Gegner ausser Adhemar von Chabanois für sich anzuführen pflegen. Wilhelm von Malmesbury, ein englischer Chronist um die Mitte des 12. Jahrhunderts, derselbe, welcher auch Veranlassung zu der Fabel von Beda's Reise nach Rom gab, sagt nämlich ausdrücklich[419]) „Gerbert habe den Abacus den Saracenen geraubt und die Regeln gegeben, welche von den schwitzenden Abacisten kaum verstanden werden.“ Hier freilich ist kein Missverständniss möglich. Dagegen möchte ich darauf aufmerksam machen, dass Wilhelm von Malmesbury grade zu der Zeit lebte, wo durch Atelhart von Bath und Andere die arabische Mathematik, insbesondere deren Rechenkunst in der Bearbeitung des Mohammed ben Musa allgemeinere Verbreitung erlangte, und man daher sich

geneigt fühlen konnte, alle Rechenkunst auf die Araber zurückzuführen. Ich möchte ferner die Glaubwürdigkeit des Wilhelm von Malmesbury überhaupt in Abrede stellen, so weit es sich um Gerbert handelt. Derselbe Chronist erzählt uns mit gleich ernster Miene eine ganze Reihe von Mährchen, die auf Gerbert sich beziehen.[600]) Gerbert raubt den Abacus dem alten Meister, der ihm denselben nicht verkaufen will, nächtlicher Weise, nachdem er sich die Liebe und dadurch die Hülfe der Tochter desselben erworben hat. Er verbirgt sich vor dem Nachfolgenden, der vermöge seiner Wissenschaft Ales sieht, was auf der Erde und auf dem Wasser sich befindet, dadurch, dass er unter einer Brücke mit Händen und Füssen sich anklammert. Er verschreibt sich dem Teufel um seine Flucht vollenden zu können. Nun lässt Wilhelm von Malmesbury Gerbert in allen seinen Unternehmungen glücklich sein, er lässt ihn mit Erzfiguren höchst interessante Abenteuer bestehen, lässt ihn Schatzgräberei mit wunderbarem Erfolge treiben u. s. w. und hat nur selbst das Unglück mitunter Gerbert und Johann XV. zu verwechseln. Und dieser Autor sollte massgebend sein, wo er allein steht? Die Frage genügt mir, der Leser mag sie sich selbst beantworten.

So bleibt denn schliesslich nur ein Einwand noch übrig, der nämlich, dass Gerbert auch in der spanischen Mark arabische Rechenkunst erlernt haben könne. Bei dem vielfach wechselnden Geschick der einzelnen Landestheile, die bald den Arabern, bald den Christen gehörten, habe arabische Wissenschaft auch dorthin Eingang gefunden, wo Gerbert erzogen wurde. Die Folgerichtigkeit dieser Schlüsse ist nicht in Abrede zu stellen. Allein man muss zwei gewichtige Momente nicht ausser Augen lassen. Erstens ist es bei der Langsamkeit, mit welcher das sogenannte indische Zahlensystem sich unter den Arabern selbst verbreitete, nichts weniger als ausgemacht, dass dasselbe im 10. Jahrhundert unter den spanischen Arabern schon in Gebrauch war.[601]) Zweitens aber, selbst wenn man jene allgemeine Benutzung zugeben müsste, darf man nicht vergessen, dass nach meiner Darstellung Gerbert nicht etwa als Knabe zu Hatto von Vich gelangte, sondern als junger Mann, der die Wissenschaft bereits besass, die er zu Hause sich erwerben konnte. Damals kannte er also die Rechenmethode des Abacus, und er zeigte sich, möchte ich sagen, erst recht als Gelehrter dadurch, dass er nicht einsah, welch

enormer Unterschied stattfindet zwischen dem bei Benutzung der gezeichneten Rechentafel doch immer noch dem Sinne nach instrumentalen Rechnen einerseits und dem Zifferrechnen mit Hülfe der Null andrerseits, dass er desshalb nichts Neues in den arabischen Methoden erkannte, und in der alten Gewohnheit befangen blieb.[602]) Und dass dem so ist, beweist die Kenntniss, die wir jetzt von den arabischen Methoden und von den durch Gerbert gelehrten besitzen. Ich brauche nur auf dieselben Unterschiede zu verweisen, welche ich bei Besprechung der Schrift des Odo hervorhob. Sie bezeugen untrüglich, dass Gerbert seine Kenntniss des Abacus nicht von den Arabern erhielt, und so bleibt Nichts übrig als den griechisch-römischen Ursprung anzuerkennen.

XXIII. Abacisten und Algorithmiker.

Bei Beginn dieser letzten Kapitel sehe ich mich leider in die Nothwendigkeit versetzt, den Leser dafür um Entschuldigung zu bitten, dass ich sie überhaupt schreibe. Denn wenn ich im Verlaufe der früheren Kapitel vielleicht nur zu häufig Nachsicht für eigene Gedanken und Untersuchungen erbitten musste, welche ich noch nicht zu voller Reife gediehen der Oeffentlichkeit in der Absicht übergab, die Aufmerksamkeit anderer Forscher auf bisher weniger beachtete Punkte zu lenken, so kann ich hier im entschiedensten Gegensatze fast nur das wiederholen, was Chasles in einigen Abhandlungen des Jahres 1843 der pariser Academie schon mitgetheilt hat. Eigene Untersuchungen besitze ich über den Zeitraum, der unmittelbar auf Gerbert folgt, gar nicht; ja ich konnte nicht einmal die Resultate von Chasles einer Controle unterwerfen, deren ich sonst absolut jeden Schriftsteller, so hoch er auch in meinen Augen stehen mag, für bedürftig halte, weil fast alle jene Resultate auf der Kenntniss von Handschriften französischer Bibliotheken beruhen, die mir nicht zugänglich waren, wenigstens es nicht so rasch hätten sein können, als es mit meinem Wunsche sich vereinen liess, die Herausgabe dieses Buches, nachdem ich mich einmal zu ihr entschlossen hatte, zu beschleunigen. Wenn ich gleichwohl nicht bei Gerbert den Abschluss machte, und die Geschichte der nun folgenden Zeiten ganz unberührt liess in der Erwartung, dass Chasles seine längst versprochene[603]) Geschichte der Arithmetik endlich der Oeffentlichkeit übergeben werde, so geschah dieses hauptsächlich aus dem Grunde, dass man schon lange gewohnt ist, den Namen des Leonardo von Pisa mit der Geschichte der

Zahlzeichen in engste Verbindung zu bringen, dass ich selbst früher diesem Mathematiker eine grosse Rolle in dieser Beziehung zuschrieb, und dass ich daher fast nothgedrungen auch hier, wo es sich zum grossen Theil um die Geschichte der Zahlzeichen handelt, bis zum Anfange des 13. Jahrhunderts die Entwicklung der Rechenkunst verfolgen musste. Der Zeitraum, zu dessen Behandlung ich hiermit übergehe, gehört zu zwei Dritteln den sogenannten Abacisten an, zum letzten Drittel den Algorithmikern.

Unter dem Namen der Abacisten versteht man nämlich insgemein diejenigen Rechenkünstler, welche der Methode des Abacus sich bedienten, welche also die von Gerbert aus römischen Quellen abgeleiteten Kenntnisse weiter trugen, welche die eigentliche Null noch nicht kannten, sondern der gezeichneten Rechentafel zu ihren Operationen bedurften. Algorithmiker nenne ich im Gegensatze dazu diejenigen Schriftsteller, welche theils Uebersetzer, theils Bearbeiter der Arithmetik des Mohammed ben Musa Alkharezmi waren, welche also arabische Methoden kennen gelernt und den Gebrauch der Null sich angeeignet hatten. Zwischen beiden steht dann noch ein den Uebergang bildendes Geschlecht, welches die Vorzüge des Neuen zwar noch nicht ganz erkennend das gute Alte doch bereits vergass und so Stücke von beiden missverstandenen Richtungen in sich vereinigte.[604])

Der Name der Abacisten ist ein alter. Gerbert bedient sich desselben in seiner Geometrie,[605]) und seine Nachfolger gebrauchen bald dieses Hauptwort selbst, bald ein von demselben abgeleitetes Zeitwort, wodurch das Rechnen auf dem Abacus bezeichnet wird.[606]) Chasles hat es für nöthig gehalten, eine Anzahl von Beweisstellen für den Gebrauch dieser Wörter mitzutheilen, und wenn auch dieser Zweck selbst nicht gar wichtig erscheint, da wohl im Voraus einleuchtet, dass, wo keine andere Methode des Rechnens existirte, die mit Hülfe des Abacus aber bekannt war, diese letztere keine blosse theoretische Künstelei bleiben konnte, sondern der Praxis der Wenigen, die überhaupt grössere Rechnungen unternahmen, dienen musste; wenn auch, sage ich, dieses an sich klar ist, so sind wir doch aus einem anderen Grunde zum Dank für jene Citate verpflichtet.

Sie liefern uns nämlich die Namen einiger mathematischen Schriftsteller des 11. Jahrhunderts, die ich sonst nirgends erwähnt finde. Rudolph von Lüttich, Rogimbold von Köln,

Meinzo der Scholasticus von Constanz sind solche Schriftsteller, und dass diese drei in der That dem Anfange des 11. Jahrhunderts angehören, ist unzweifelhaft, da die beiden Ersteren in ihrem Briefwechsel von dem damals lebenden Fulbert von Chartres reden, der Letztere seine Abhandlung über den Erddurchmesser dem Hermann Contractus widmet. Dieser durch seine für die damalige Zeit kolossale Gelehrsamkeit berühmte Mönch des Klosters Reichenau[607]) verdient selbst hier besonders erwähnt zu werden. Vom Jahre 1043 an bis zu seinem am 24. September 1054 erfolgten Tode dauerte seine Wirksamkeit als Lehrer in dem genannten Kloster, dessen reiche Bücherschätze ihn in den Stand setzten, ein grösseres Lehrmaterial aufzuhäufen, als wir von irgend einem seiner Zeitgenossen wissen. Unter den Schriften, welche Hermann hinterliess, ist zwar seine Chronik am berühmtesten; für unsere Zwecke hat indessen seine Schrift über Kirchenrechnung und seine astronomischen Arbeiten[608]) weit grösseres Interesse, so dass ich bedauere insbesondere das erstere Werk nicht aus eigener Anschauung zu kennen. Andere Mathematiker derselben Zeit nennt die französische Litterärgeschichte.[609]) Werner und Wilhelm von Strassburg liessen durch ihre Mönche die Alten abschreiben; eine gleiche Thätigkeit herrschte unter dem oben genannten Fulbert von Chartres, dem Schüler Gerbert's, dessen Namen somit vielleicht mit der Reinschrift des Manuscriptes C in Verbindung zu setzen ist. Abbo von Fleury verfasste einen Commentar zu der Osterrechnung des Victorius. Engelbert von Lüttich, Gilbert Maminot von Lisieux, Odo der Scholasticus von Tournai werden als grosse Astronomen erwähnt. Speciell über den Abacus schrieben Heriger von Lobbes, einem bei Lüttich gelegenen vielgerühmten Kloster, Helbert von St. Hubertus in den Ardennen, Franco von Lüttich, wie denn überhaupt alle diese Pflanzstätten mathematischer Bildung in ziemlich engen Kreisen um Lüttich herumliegen, damals dem geistigen Mittelpunkt von Lothringen.[610]) Damit ist in voller Uebereinstimmung, wenn Bernelinus, ein unmittelbarer Schüler Gerbert's, den Ausspruch thut, lothringische Gelehrte seien vor Allen der Kunst des Abacus mächtig.[611]) Ueber diesen, wie es scheint, ziemlich bedeutenden Mann habe ich keine weiteren Lebensnachrichten sammeln können, als dass er eine kleine musikalische Abhandlung verfasste, welche ich bereits bei Gelegenheit der Bruch-

zeichen des Odo von Clüny erwähnen musste, sowie eine Schrift über den Abacus, in welcher die obige Bemerkung enthalten ist. Er beschreibt bei dieser Gelegenheit den Abacus selbst als eine wohl polirte Tafel, die mit blauem Sande bestreut werde, und auf welche die Geometer auch geometrische Figuren zu zeichnen pflegten.[612]) So möchte ich wenigstens die Stelle auffassen, da ich mich nicht entschliessen kann, auch die ebengenannten Figuren als die des Abacus aufzufassen, wenn ich freilich zugeben muss, dass der Name geometrische Tafel, wie bei Boethius so bei den Späteren, in der Regel speciell dem Rechenbrette beigelegt wird.[613]) Dass das Bestreuen der Tafel mit Sand durch die Angabe des Bernelinus gesichert ist, hat für die Rückschlüsse auf frühere Zeit seine Wichtigkeit, da hieraus hervorgeht, dass neben dem zum Rechenapparate besonders zubereiteten Brette mit Einschnitten oder Löchern stets jene einfachere Gestalt existirte, von der Jamblichus uns bereits als einer dem Pythagoras bekannten erzählt,[278]) auf welcher, wie ich früher nachwies, die einzelnen Columnen nothwendigerweise durch Zeichnung hergestellt wurden. Diese Tafel hatte sicherlich auch Guido von Arezzo im Auge, als er um 1028 eine Abhandlung über die Kunst der Rechnung auf der mit Sand bedeckten Tafel verfasste.[612]) Der Inhalt der arithmetischen Schrift des Bernelinus scheint in vier Büchern[614]) etwa mit dem übereinzustimmen, was in dem von mir ausführlicher besprochenen Werke des Odo gleichfalls gelehrt wird. Die Darstellung der Numeration selbst, die Regeln der Multiplication und der Division, die Bruchrechnung sollen nach Chasles diese vier Bücher ausmachen, und wenn er uns auch darüber im Unklaren lässt, welche Bruchrechnung gemeint ist, so fürchte ich doch keinen Widerspruch, wenn ich annehme, es sei die des Boethius, die man wohl eine duodecimale nennen kann, im Gegensatze zur sexagesimalen, wie sie in späteren Schriften vorkommt, die von arabischen Quellen einige Abhängigkeit verrathen. Die Namen Igin, Andras u. s. w. scheinen bei Bernelinus noch nicht vorzukommen, ebensowenig aber auch die pythagorischen Ziffern, statt deren er sich auf dem Rechenbrette immer der römischen Zahlzeichen bedient.

Gegen Ende des 11. Jahrhunderts trat Gerland auf. Von seinem Leben ist mir so viel bekannt geworden,[615]) dass er ein Schüler des von dem Erzbisthum Besançon abhängigen Benedictinerklosters in der Stadt gleichen Namens war; dass er später selbst

dort als Stiftslehrer wirkte, bis er bald darauf als Bischof nach Girgenti berufen wurde, einer jener fränkischen Mönche, welche im Gefolge von Robert Guichard und dessen Bruder Roger Sicilien dem Christenthume wieder gewannen, das fast 250 Jahre unter der Saracenen Herrschaft zu Boden gelegen hatte. Gerland schrieb ein Werk über die Rechenkunst, welches in verschiedenen Manuscripten so z. B. in Regensburg existirt. Von Interesse finde ich unter den geringen Angaben, die mir über jene Schrift zu Gebote stehen, dass Gerland wohl einer der Ersten ist, welche die Namen Igin, Andras u. s. w. als wirklich gebräuchlich documentiren, denn er verwendet sie im Texte selbst,[616]) wo er Operationen zu beschreiben hat, nicht bloss als Ueberschrift einzelner Columnen.

Denselben Gebrauch von diesen Fremdwörtern mitten im fortlaufenden Texte macht auch der letzte der Schriftsteller, die ich Abacisten nennen möchte, Raoul oder Radulph von Laon.[617]) Die Klosterschule, nach welcher er den Namen führt, war um 1100 eine der berühmtesten, und blühte namentlich unter Anselm, der Leuchte Frankreichs, wie seine Bewunderer ihn nannten, dem Lehrer des fast noch bekannteren Abelard. Radulph war Anselms Bruder und, wie er, Lehrer an der Klosterschule. Er schrieb über Musik und über den Abacus, zwei Gegenstände, deren fast regelmässige Verbindung uns bereits zu gewohnt ist, als dass sie uns noch in Erstaunen setzen könnte. Die Nachrichten, welche Chasles über die arithmetischen Schriften des Radulph mittheilt, sind etwas vollständiger, als die über die anderen Schriftsteller dieses Zeitraumes. In der That besitzt er auch eine ganz besondere Wichtigkeit für den Historiker dadurch, dass er über den Ursprung des Abacus und dessen Verbreitung ganz bestimmte, nicht misszuverstehende Angaben macht. Die ganze Stelle ist von zu grosser Bedeutung, als dass ich sie nicht vollständig hier wiedergeben sollte.[618])

„Jetzt ist zu besprechen, welcher Wissenschaft dieser Apparat hauptsächlich dient. Der Abacus erweist sich als absolut nothwendig zur Untersuchung der Verhältnisse der speculativen Arithmetik; ferner bei den Zahlen, auf denen die Modulationen der Musik beruhen; desgleichen für die Dinge, welche durch die emsigen Bemühungen der Astronomen über den verschiedenen Lauf der Wandelsterne gefunden sind und über deren gleiche Umdrehung dem Weltall gegenüber, wenn auch ihre Jahre je nach dem Verhältniss der ungleichen Kreise sehr verschiedenes Ende haben; wei-

ter noch bei den dem Plato nachgebildeten Gedanken über die Weltseele und zur Lektüre all der alten Schriftsteller, welche ihren scharfsinnigen Fleiss den Zahlen zuwandten. Am allermeisten aber zeigt der Gebrauch dieser Tafel sich bequem und wird von den Lehrern der Kunst benutzt bei Auffindung der Formeln der geometrischen Disciplinen und bei Anwendung derselben auf die Ausmessung der Länder und Meere. Allein die Wissenschaft, von der ich eben rede, ist bei fast allen Bewohnern des Occidentes in Vergessenheit gerathen, und so wurde auch die Kunst des Calcüls beim Aufhören der Kunst, zu deren Hülfe sie erfunden worden war, nicht gar gross beachtet; ja sie kam in Misscredit, und nur Gerbert genannt der Weise, ein Mann von höchster Einsicht, und der vortreffliche Gelehrte Hermann und deren Schüler pflanzten Einiges bis zu unseren Zeiten fort, in ihnen zeigt sich noch ein schwacher Abfluss jener Quellen der genannten Wissenschaft.“

Ich möchte sagen, es war ein Glück für die Geschichte der Wissenschaft, dass Chasles diese Stelle erst verhältnissmässig spät auffand. Wäre sie gleich bekannt gewesen, die ganze Streitfrage, woher Gerberts Kenntnisse rühren, wäre nimmermehr zu den Dimensionen angewachsen, die sie unter den Händen der beiden Gegner Chasles und Libri annahm, und die Wissenschaft wäre um den Gewinn gebracht, den sie immer davon hat, wenn eine Frage gestellt wird, mag auch diese an und für sich unbedeutend oder gar verkehrt sein. Es ist ja nicht möglich einer Frage ernstlich zu Leibe zu gehen, ohne ihr die verschiedenartigsten Seiten abzugewinnen, ohne von ihr aus wieder zu Anderem geführt zu werden, dessen Auffindung uns desshalb nicht weniger angenehm überrascht, weil sie eine fast zufällige war. Das war auch der Grund, der mich veranlasste, dass ich den Leser vielleicht noch etwas zweifelnd aber doch hoffentlich schon zum grössten Theil überzeugt auf Umwegen bis hierher leitete, um ihm jetzt die freie Aussicht zu zeigen, die er bisher durch einzelne Waldlichtungen mehr errathen als überschauen konnte. Der Weg selbst sollte für die Mühe belohnen, sollte mindestens zeigen, dass auch im Walde einzelne wenig betretene Parthien sich finden, deren genauere Kenntniss wünschenswerth ist.

Zerlegen wir einmal, was Alles in den Zugeständnissen Radulphs enthalten ist. Der Abacus ist zur Lektüre der alten Griechen unentbehrlich. Die Platoniker sind ohne ihn nicht zu verste-

hen. Die Mathematiker bedienen sich seiner hauptsächlich bei Berechnungen aus dem Gebiete der Feldmesskunst, aber auch bei astronomischen Betrachtungen. Gerbert und Hermann (Contractus?) sind die Hauptlehrer der Kunst des Abacus, aber sie haben dieselbe nicht etwa eingeführt, im Gegentheil sie haben die halbwegs vergessene Kunst nur in einiger Erinnerung erhalten. Vergessen endlich wird sie genannt in Bezug auf die Völker des Occidentes, und das beweist, dass Radulph wohl wusste, dass die Völker des Orientes die Kunst beibehalten hatten, dass er aber doch keinen wesentlichen Unterschied zwischen den Methoden des Orientes und des Occidentes, so weit ihm beide zugänglich waren, zu erkennen vermochte. Und sind dieses nun nicht alle die Sätze, welche ich auch bisher aufstellte? Ist nicht noch insbesondere die letzte Folgerung in voller Uebereinstimmung mit dem, was ich über Gerberts Verhältniss zur spanisch-arabischen Rechenkunst aussprach?

Dass Radulph schon zu denen gehört, welche durch was immer für eine Ueberlieferung, vielleicht, wie ich früher sagte, durch Schüler der jüdischen Kabbala noch einiges Neue zu dem Althergebrachten hinzugelernt hatten, zeigt sich namentlich durch seine Benutzung der Wörter Igin, Andras u. s. w. bis zum Sipos. Die Ersteren wendet Radulph, wie ich bereits angab, in seinem Texte an, und nennt mit ihnen die jedesmal in Rechnung zu bringenden Zahlen. Dabei kann kaum ein Irrthum sich einschleichen; es sind eben nur andere Namen für längst erlernte und begriffene Gegenstände. Sipos dagegen ist in doppelter Weise neu, als Name wie als Sache, und so finden wir denn auch in der *Sache* hier einen Irrthum, wir finden das Sipos genannte Zeichen nicht so benutzt, wie wir es von der Null erwarten müssen. Und doch ist es die Null, die hier vorliegt. Denn Radulph beginnt damit die Zahlzeichen für 1 bis 9 nebst ihren Fremdnamen anzugeben; er setzt dann hinzu:[619]) „An letzter Stelle schreibt man noch das Zeichen, welches Sipos heisst, und welches zwar keine Zahl bezeichnet, aber doch zu einem anderen Gebrauche von Nutzen ist, welcher im Verlaufe des Werkes einleuchten wird.“ Dazu malt er einen kleinen Kreis mit einem Punkte in der Mitte, die Gestalt eines Rades, wie er an einer späteren Stelle sich ausdrückt. Wer erkennt nun nicht in diesem Rade das letzte Zeichen auf den Rechentafeln in E und C, das Zeichen, welches ich als einen kleinen Kreis beschrieb, in den ein a oder Δ eingezeichnet ist? Es

war somit bei dem Wortlaute der eben angeführten Stelle nur natürlich, dass Chasles anfänglich der Meinung zuneigte, Radulph habe die Null im modernen Sinne und deren Gebrauch gekannt. Und doch ist dieses nicht der Fall, wie derselbe Gelehrte später nachgewiesen hat. Radulph bedient sich des Sipos nur bei der Multiplication mehrziffriger Zahlen mit einander, wo man leicht in Irrthum verfallen könne, und eine Ziffer statt der anderen in Rechnung ziehe. Das vermeide man dadurch, dass man ein solches Rad über die jedesmal multiplicirende Ziffer setze, welches also denselben Zweck erfüllt, den auch heute noch ungeübtere Rechner durch ein kleines Pünktchen zu erreichen wissen, und ein ähnliches Zeichen lasse man über die Ziffern des Multiplicandus wegrücken.

Ist somit klar, dass Radulph noch nicht ganz versteht, was die Bedeutung der Null ist, so versteht er andrerseits nicht mehr ganz, was die Bedeutung der Zeichen ist, welche auf dem vollständigen Abacus der älteren Rechenkünstler, vielleicht schon des Boethius, in einigen unter einander stehenden Horizontalreihen sich vorfinden. Ich habe von diesen Zeichen bereits andeutungsweise gesprochen, als ich die Rechentafel in E (**Figur 39**) erläuterte. Ich sagte, dass in aufeinanderfolgenden Horizontalreihen jedesmal die Hälften der darüber befindlichen Kopfzahlen stehen sollten, dass aber dieser Zweck nicht von Jedem begriffen worden zu sein scheine, indem der Abacus in E mannigfache Verstösse gegen den zu Grunde liegenden Gedanken aufweise. Chasles, dem ich in meiner Auffassung folgte, hat dieselbe wohl noch deutlicher dahin ausgesprochen,[620] dass wie die ersten Kopfzahlen der Kolumnen den Werth angeben, welchen eine Einheitsmarke in jeder Kolumne annimmt, ebenso auch die folgenden Horizontalreihen die Werthe angeben, welche einer Marke von dem absoluten Werthe $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$... zukommen, wenn diese in einer späteren Kolumne auftrete. Es sei also mit einem Worte eine Ausdehnung des Principes des Positionswerthes auf Bruchzahlen. Den letztgebrauchten Ausdruck kann ich nun zwar nicht billigen, da er geeignet ist auf's Neue den ziemlich müssigen Streit hervorzurufen, ob beim Abacus überhaupt Positionswerth stattfinde, ob man nicht dieses Wort speciell für die Zahlschreibung ohne Kolumnen und mit der Null aufbewahren müsse; aber dem Sinne nach hat Chasles gewiss hier das Wahre getroffen.

Diese späteren Reihen sollen bei Divisionen, vorzüglich bei Halbirungen dazu dienen, ohne Rechnung gleich ablesen zu können, welches der wirkliche Werth einer halben, viertel, achtel Einheit einer jeden Ordnung sei. Und solche vollständige Rechentafeln hatte Radulph vor sich, ohne sie zu verstehen, wie gleichfalls Chasles an demselben Orte gezeigt hat.

Derselbe Mangel an Verständniss erhellt aus der Spitzfindigkeit, mit welcher Radulph die Anzahl der Kolumnen, der Bögen, wie er mit den meisten Abacisten sagt, zu deuten sucht. Auch davon sprach ich schon und suchte auszuführen, dass bei den Rechenbrettern meistens eine Triadeneintheilung existire, deren Ursprung ich selbst nicht weiter zu verfolgen im Stande war, als etwa bis zur Hypothese, dass der römische Sprachgebrauch damit im Zusammenhang stehen möchte. Desshalb wurden auch je 3 Kolumnen häufig mit einem grösseren Bogen bespannt, der später den Punkten und kleinen Strichen Platz machte. Wir sahen ferner, dass die Kolumnen nicht selten mit den neun Zahlen Igin bis Celentis überschrieben waren, zu denen oft noch Sipos kam, aber auch wohl fehlen konnte. So müssen also Rechentafeln von 9 oder 10 Kolumnen entstanden sein. Zählte man ebenso die grossen Kreisbögen, so bekam man 9×3 also 27 Kolumnen, oder bei Mitanwendung von Sipos 10×3 also 30 Kolumnen. Alle diese Anzahlen kommen vor,[621]) und noch einige andere, die durch 3 theilbar gleichfalls nach Triaden erklärt werden können. Ein anonymer Schriftsteller, dessen Abacusregeln Chasles in einem pariser Manuscripte aufgefunden und veröffentlicht hat,[622]) *sagt:* man benutze 12 Bögen, mehr oder weniger. Gerland hat deren 15. Radulph giebt die Zahl 27 an, sagt aber, man habe diese gewählt, weil man sich einer Cubikzahl bedienen wollte. Der Cubus von 2, oder 8, sei zu niedrig befunden worden, man habe daher zu dem Cubus von 3, zu 27 gegriffen. Wer diese Erklärung gab, zeigte deutlich, dass er mit mehr Witz als Wissen um jeden Preis einen Grund angeben wollte für Dinge, deren Entstehung ihm unbekannt war.

So steht also Radulph schon auf der Schwelle, die den Uebergang der alten in die neue Zeit bildet, und dasselbe gilt von dem schon genannten Anonymus, dessen Regeln des Abacus das Wort Sipos zwar ebensowenig, als dessen Zeichen und Gebrauch kennen, dafür aber die neun anderen Worte Igin bis Celentis benutzen, und

auch der Araber in den Anfangsworten gedenken, wo es heisst, der Ausdruck Abacus sei arabisch und heisse in jener Sprache der Tisch.

Mit dem Beginne des 12. Jahrhunderts traten die Algorithmiker auf. Ich habe im XVIII. Kapitel von einer Schrift gehandelt, welche hier als Muster erscheint, von der vielleicht durch Atelhart von Bath verfassten Uebersetzung der Arithmetik des Mohammed ben Musa. Wäre Atelhart wirklich der Uebersetzer, so würde dadurch das Interesse des mathematischen Historikers an diesem Manne noch bedeutend sich steigern, weil in ihm alsdann das einzige Beispiel eines Schriftstellers existirte, der über beide Methoden schrieb, und beide aus einander zu halten wusste. Nach Chasles verfasste nämlich derselbe Atelhart auch eine Kunst des Abacus nach dem alten Stile [513a]) und nannte sogar in derselben den Abacus eine Erfindung der Pythagoriker. [613])

Auch einen weiteren Algorithmiker, Johann von Sevilla, besprach ich in jenem Kapitel, und von da an wird die neue Kunst besonders auch in England gebräuchlich, wo am Anfange des folgenden Jahrhunderts Johann von Sacrobosco sie erlernte. Das war, wie ich schon bemerkte, grade die Zeit, zu welcher Wilhelm von Malmesbury durch die arabisirenden Rechenkünstler seiner Heimath zu der Vermuthung verleitet wurde, als stamme auch Gerberts Wissen aus derselben Quelle. Das war aber auch die Zeit, in welcher eine Verleitung zu derartigen irrigen Meinungen am leichtesten möglich war; denn wie Johann von Salisbury, der geistreichste Schriftsteller am Hofe Heinrich II. von England, sich äussert: [623]) Wenn sich noch Jemand mit den Werken der Alten beschäftigte, so lachten Alle ihn aus und hielten ihn für stumpfsinniger als einen Esel, ja als einen Stein.

Die Algorithmiker sind meines Wissens weder von Chasles noch von irgend einem anderen Gelehrten bisher genauer behandelt. Bei der am Anfange dieses Kapitels beklagten Mangelhaftigkeit meines eigenen Wissens über diesen Zeitraum muss ich daher mich bescheiden, auf die früher besprochenen beiden Traktate zurückzuverweisen und mit der Bemerkung zu schliessen, dass von hier an Spuren der griechisch-römischen Kunst des Abacus mehr und mehr verschwinden, wenn auch spätere Schriftsteller bis zum Anfange des 16. Jahrhunderts herab [624]) noch häufig genug wissen, dass der Ursprung des Abacus mit aller Wahrscheinlichkeit bis

zu den Pythagorikern, direct bis zu Boethius aufwärts verfolgt werden kann. Das ist, wie ich an einem anderen Orte sagte,[625]) der Sinn jenes Holzschnittes in der Margaritha philosophica, auf welchem Pythagoras, wie es die Ueberschrift ausser Zweifel lässt, mit einer Rechentafel abgebildet ist, während neben ihm Boethius eine Rechnung mit Ziffern ausführt, die mit den jetzigen völlig übereinstimmen; das meint Theodorich Tzwivel, wenn er in seiner 1507 gedruckten Arithmetik angiebt, die Zeichen oder Apices der einzelnen Zahlen seien von Severinus Boethius hergenommen.

XXIV. Leonardo von Pisa.

War im Bisherigen Frankreich und England der Schauplatz, auf welchem die Persönlichkeiten sich entfalteten, die unseren Untersuchungen als leitende Namen dienten, waren diese Männer selbst im Ganzen Klostergelehrte, alle einer und derselben Schule entstammend, alle die Wissenschaft als solche liebend und pflegend, so tritt plötzlich mit dem Anfange des 13. Jahrhunderts eine in jeder Beziehung bedeutende Veränderung ein. Die Wirksamkeit eines einzigen Mannes genügt, um den mathematischen Wissenschaften eine neue Heimath anzuweisen, um sie für die folgenden zwei Jahrhunderte an einen Boden zu binden, dessen günstige Verhältnisse den anvertrauten Samen mehr und mehr zu üppiger Fülle gedeihen liessen, der aber doch erst befruchtet werden musste. Und der Mann, welcher das hervorragende Verdienst sich erwarb, die Mathematik nach Italien zu verpflanzen, war nicht etwa ein zum Lehrstande erzogenner Mönch, sondern ein Kaufmann, der mitten unter den Geschäften eines ihn weit herumführenden Handels überall die Kenntnisse der fremden Nationen sich aneignete und in seinem reichen Geiste weiter verarbeitete. Es war Leonardo von Pisa, der von seinen Landsleuten dafür mit dem Spottnamen Bigollone belegt wurde,[626]) dass er dumm und tölpelhaft genug war, nicht ausschliesslich dem Gewerbe zu leben, sondern auch Bedürfnisse des Geistes anzuerkennen und zu befriedigen. Vergebens sucht man im 12. Jahrhundert nach italienischen Originalarbeiten auf mathematischem Gebiete. Nur zwei Uebersetzer Plato von Tivoli[627]) und Gerhard von Cremona[628]) können als Vorgänger des Leonardo aus der ersten Hälfte des 12. Jahrhunderts genannt werden und wurden auch, wie es scheint, von ihm benutzt, aber

sicherlich nicht in grösserer Ausdehnung, als die Arbeiten sonstiger fremder Gelehrten, die er, wie bemerkt, in sich zu einem durchaus neuen Ganzen umschuf.

Ueber das Leben dieses merkwürdigen Mannes wissen wir nur, was er selbst in seinen Schriften mittheilt. Der Vater war Stadtschreiber in Pisa und wurde später als Vorstand an den Packhof versetzt, welcher zum Besten vaterländischer Kaufleute an der Nordküste Afrikas, in Bugia, errichtet wurde. Ob der Name Bonaccio, unter welchem er erwähnt wird, sein wirklicher Name, oder wie es dem Wortlaute nach den Anschein hat, nur ein Beiname war, wage ich nicht zu entscheiden. Jedenfalls war die spöttische Nebenbedeutung wohl verschwunden, indem Leonardo, der Sohn, sich selbst den Filius des Bonaccio bezeichnete, woraus durch spätere Zusammenziehung Fibonacci wurde, der Name unter welchem Leonardo bei Weitem am bekanntesten ist. Schon als Knabe musste Leonardo auf Geheiss des Vaters und unter dessen Aufsicht dem Studium des Abacus seine Zeit widmen. Er wurde in die Kunst der 9 indischen Zahlzeichen eingeführt und fand so viel Geschmack an derselben, dass wohin auch spätere Handelsgeschäfte ihn führten, in Egypten, Syrien, Griechenland, Sicilien und der Provence, er überall mit vieler Mühe und in wechselseitiger Unterweisung sich zu belehren suchte, wie weit man dort in jener Kunst gediehen sei. Aber dies Alles ebenso wie den Algorismus und die Kolumnenrechnung des Pythagoras erkannte Leonardo bald als blosse Stümperei gegenüber der Methode der Inder. Diese Methode erfasste er desshalb auf's Engste und fügte noch Neues hinzu, theils Producte seiner eigenen Erfindungsgabe, theils feinere Untersuchungen des Euclid.[629]) Die Summe aller dieser Kenntnisse ist in dem Werke Leonardos über den Abacus vereinigt, welches, von so elementarer Grundlage es auch anhob, doch die Wirkung hatte, die ich vorhin nannte, welches der Mathematik und insbesondere der Algebra in Italien eine Pflanzstätte schuf. Auf den Inhalt dieses Werkes komme ich noch zu reden. Vorläufig möchte ich das Wenige, was über Leonardo's Biographie gesichert ist, nicht unterbrechen.

Zu diesen wenigen bekannten Daten rechne ich, wann das Buch des Abacus geschrieben ist, indem die Manuscripte dafür ausdrücklich das Jahr 1202 angeben. Vollständige Gewissheit liefert uns allerdings selbst diese Bemerkung des Verfassers erst nach

einiger Ueberlegung. Die meisten Handschriften des Abacuswerkes enthalten nämlich nicht die erste Bearbeitung, sondern eine zweite, und so könnte die Jahreszahl 1202, wenn sonst Nichts bekannt wäre, fast mit grösserem Rechte auf die Umarbeitung bezogen werden. Diese Annahme darf indessen nicht gemacht werden; weder die Lebenszeit des Leonardo, noch das Datum der im Abacuswerke genannten Schriften, noch endlich die Lebenszeit des Mannes, welchem die zweite Bearbeitung gewidmet ist, lassen dieses zu.

Leonardo war vor allen Dingen Kaufmann, und wenn er, wie schon bemerkt, mit seiner ganzen Geistesrichtung sich über die Bestrebungen seines eigentlichen Standes erhob, so ist doch zu vermuthen, dass er sich der schriftstellerischen Thätigkeit erst hingab, als er von den Geschäften, den Reisen in ferne Gegenden sich einigermaassen zurückzog; und wenn ich dafür namentlich in einer Zeit, wo junge Autoren ausserhalb des Klosters gar nicht vorkamen, etwa das 35. Lebensjahr annehme, so ist damit wohl kein grosser Irrthum verbunden, jedenfalls kein zu hohes Alter für Leonardo angesetzt. In dem Widmungsschreiben der zweiten Bearbeitung des Abacus heisst es nun ferner,[630]) die erste Ausgabe sei vor langer Zeit erfolgt, und ziehen wir wieder die damaligen Zeitverhältnisse in Betracht und die geringe Häufigkeit, in welcher damals Umarbeitungen zur Veröffentlichung veranstaltet wurden, so sind 20 Jahre nicht zu viel für die „lange Zwischenzeit.“ Ziehen wir also diese sämmtlichen Jahre von 1202 ab, so müsste Leonardo zwischen 1140 und 1150 geboren sein, also im Jahre 1225 nahezu 80jährig gewesen sein, ein Alter, welches mit der Geistesfrische eines eben damals von Leonardo verfassten Werkes in zu grellem Widerspruche steht. Ausserdem ist in dem genannten Widmungsschreiben die praktische Geometrie erwähnt, und dieses Werk stammt aus dem Jahre 1220, ein directer Beweis, dass die erste Ausgabe des Abacus 1202 und die zweite nach 1220, also ungefähr zwanzig Jahre nach der ersten, erfolgte. Endlich redet Leonardo in dem Widmungschreiben der zweiten Bearbeitung einen Michael Scottus als grossen Weisen, Herrn und Lehrer an, und es giebt nur einen Gelehrten, der damit gemeint sein kann, der allerdings gewöhnlicher Scotus als Scottus heisst, der Hofastrolog Kaiser Friedrich II. von Hohenstaufen.[631]) Von ihm wissen wir aber, dass er um 1190 in der schottischen Stadt Balwearie geboren im Jahre 1202 noch keine Widmung in Empfang nehmen, keinenfalls

als grosser Weiser angeredet werden konnte. Dagegen stimmt es genau mit der mehrfach nachgewiesenen Nothwendigkeit überein, dass die Widmung an Michael Scotus jedenfalls nach 1220 erfolgte, wenn wir erfahren, dass derselbe nach einem Studienaufenthalte in Paris auch Spanien noch bereiste, wo er 1217 in Toledo verweilte und mit Astronomie sich beschäftigte. Erst später kam er also zu Kaiser Friedrich und mit diesem nach Italien. Nach des Kaisers Tode kehrte Michael Scotus nach England an den Hof Eduard I. zurück und wurde 1291 mit einer politischen Mission nach Schottland entsandt, wo er starb. Durch das Zusammentreffen aller dieser Umstände gewinnt eine vereinzelte, aber positive Notiz von Grimaldi [632]) Glaubwürdigkeit, welcher in der Bibliothek Riccardi in Florenz eine Handschrift gesehen haben will, die er freilich im Uebrigen nicht näher beschreibt, die auch wohl in Folge dieses mangelhaften Berichtes seither nicht wieder aufgefunden worden ist, die aber die Worte enthalte: „Hier beginnt das Buch des Abacus verfasst durch Leonardo den Sohn des Bonaccio im Jahre 1202 und verbessert durch denselben im Jahre 1228.“

Welcherlei wissenschaftliche Beschäftigungen Leonardos den Zeitraum von 1202 bis 1220 ausfüllten, ist durchaus unbekannt. Erst in diesem letzteren Jahre veröffentlichte er wieder ein Werk, seine praktische Geometrie, die er seinem Freunde Dominicus widmete. Ueber die Persönlichkeit dieses Freundes herrscht keine vollkommene Gewissheit, doch ist ein bedeutender Grad von Wahrscheinlichkeit vorhanden, dass ein Astronom mit Namen Dominicus Hispanus gemeint ist, welchen Guido Bonatti, selbst ein bekannter Astronom des 13. Jahrhunderts, unter seinen hervorragenden Zeitgenossen am Hofe Friedrich II. neben Michael Scotus nennt. [633])

Damit ist auch eine anderweitige Hypothese der Sicherheit sehr nahe gebracht, dass nämlich der Freund, welchem die Geometrie gewidmet ist, derselbe Dominicus sei, welcher Leonardo dem Kaiser Friedrich II. in Pisa vorstellte. Weniger fest steht dagegen noch das Jahr, in welches jener Aufenthalt des Kaiserhofes in Pisa zu setzen ist. Ein Historiker des 16. Jahrhunderts, Raphael Roncioni, giebt zwar für diesen Aufenthalt das Jahr 1220 an, allein Boncompagni, der mit einer durchaus berechtigten Vorliebe für Leonardo Fibonacci Alles aufbietet, um die einzelnen Momente seines Lebens und seiner Wirksamkeit genügend aufzuklären, hat mit

Hülfe der jetzt zu Gebote stehenden Regesten für jenes Jahr die Unmöglichkeit der Aussage des Roncioni begründet und zu zeigen gesucht, dass statt ihrer etwa 1225 anzunehmen sei. [634])

Bei jener Vorstellung war auch Johann von Palermo zugegen und legte dem als Mathematiker offenbar schon berühmten Manne mehrere Fragen vor, welche Leonardo unverzüglich zu beantworten wusste. Die erste dieser Fragen ging dahin, eine Zahl zu finden, welche, selbst eine Quadratzahl, auch dann noch Quadratzahl bleibe, wenn man sie um 5 vermehre oder vermindere. Dieser Frage genügt die Zahl $11\frac{97}{144}$, welche dem Producte von $3\frac{5}{12}$ in sich selbst gleich ist, während $16\frac{97}{144}$ das Quadrat von $4\frac{1}{12}$ und $6\frac{97}{144}$ das Quadrat von $2\frac{7}{12}$ ist. Die zweite Frage bezog sich auf die geometrische Auflösung einer Gleichung des dritten Grades, wie wir in der Sprache der modernen Mathematik uns ausdrücken, und Leonardo wies nicht nur in aller Strenge nach, dass die Wurzeln dieser Gleichung mit Hülfe der euclidischen Irrationalgrössen nicht darstellbar seien, mit anderen Worten, dass man sie nicht mit Zirkel und Lineal construiren könne, er gab auch einen überraschend genau zutreffenden Näherungswerth der einen Wurzel an, bei welchem der Fehler noch nicht den 30000 millionsten Theil der Einheit beträgt. [635]) Endlich stellte Johann von Palermo noch eine dritte Aufgabe ziemlich complicirter Natur, wenn wir uns in die damalige Zeit zurückversetzen, wo die Schreibweise der Gleichungen durch Buchstaben und sonstige Zeichen noch nicht bekannt war, wo also die Uebersichtlichkeit fehlte, welche allein schon einen Hauptvorzug der modernen Darstellung bilden würde, wenn sonst auch gar keine Erweiterungen der Wissenschaft in ihrem Gefolge sich ergeben hätten. Diese letzte Aufgabe heisst folgendermaassen: drei Männer besitzen von einer gemeinsam aufgehobenen Summe Geldes, der Eine die Hälfte, der Andere ein Drittel, der Letzte ein Sechstel. Sie wollen das Geld an einen mehr gesicherten Ort bringen und tragen, ein Jeder so viel er fassen kann. Von dem so Weggeschafften behält aber Jeder einen gewissen Theil, nämlich der Erste die Hälfte dessen, was er trug, und ebenso der Zweite und Dritte den dritten und sechsten Theil dessen, was sie getragen hatten. Wenn es sich nun ergiebt, dass von dem deponirten Gelde Jedem ein Drittel zukommt, damit er seinen ihm gebührenden Antheil vollständig habe, so ist die Frage, wie gross die Summe war, und wie viel ein Jeder beim Transporte derselben trug. Leonardo

findet die Summe 47, von denen der Erste 33, der Zweite 13, der Dritte 1 trug.

Ich kann unmöglich hier auf die Methoden näher eingehen, deren Leonardo sich bediente. Er muss sie jedenfalls vorher besessen haben, sonst wäre es ihm sicherlich nicht gelungen, so schwierige Aufgaben der sogenannten bestimmten wie der unbestimmten Analytik gleichsam aus dem Stegreife in Schnelligkeit aufzulösen. Andrerseits muss er aber auch allein diese Methoden besessen haben; denn kaum hatte er die öffentlichen Proben seiner Geschicklichkeit abgelegt, so bat man ihn von den verschiedensten Seiten um ausführlichere Auseinandersetzung der Kunstgriffe, die ihm die Beantwortung ermöglicht hatten, und Leonardo erfüllte diesen Wunsch denn auch in drei Abhandlungen, welche uns jetzt sämmtlich wieder und zwar gedruckt vorliegen, nachdem Prinz Boncompagni die Handschriften entdeckte und veröffentlichte.[636])

Die Frage, welche ich als erste nannte, ist in der Abhandlung über Quadratzahlen behandelt, welche mit dem Datum des Jahres 1225 versehen dem Kaiser Friedrich II. selbst zugeeignet ist. Dieses Datum gab auch die Veranlassung, die Besprechung zu Pisa, wie oben bemerkt, etwa in dasselbe Jahr zu setzen, da die Vermuthung doch sehr nahe liegt, dass diese erste Abhandlung, welche mit dem Gegenstande jener öffentlichen Disputation sich beschäftigt, nur kurze Zeit nach deren Abhaltung geschrieben wurde. Das Buch von den Quadratzahlen ist indessen nicht nur der Beantwortung jener früher erwähnten Frage gewidmet, sondern es enthält noch eine ganze Reihe anderer Untersuchungen, die gleichfalls der Zahlentheorie und insbesondere der Lehre von den sogenannten quadratischen Formen angehören, und unter welchen, wie Wöpcke annimmt,[637]) zum erstenmal der später vielfach benutzte Satz allgemein ausgesprochen und geometrisch bewiesen ist, dass das Product zweier Summen von je zwei Quadratzahlen selbst als Summe zweier Quadratzahlen und zwar in doppelter Weise dargestellt werden kann.

Die zweite Abhandlung beschäftigt sich mit den beiden anderen Aufgaben des Johann von Palermo und liegt uns, wie es scheint, in zweiter Auflage vor, bei welcher noch andere Aufgaben mit berücksichtigt wurden, welche theils dem Leonardo von verschiedenen Gelehrten vorgelegt worden waren, theils seine eigene Erfindung waren. Die erste Bearbeitung war wohl gleichzeitig mit dem

Buche der Quadratzahlen an den Kaiser gerichtet, die zweite trägt die Ueberschrift Flos, die Blume, und zwar, wie Leonardo sich ausdrückt, ebensowohl wegen der blumenreichen Beredtsamkeit des Cardinals Raniero Capocci von Viterbo, dem er diese Umarbeitung auf sein Verlangen zuschickt, als auch wegen der blühenden Art, in welcher schwierige Aufgaben bewältigt werden, die selbst wieder den Keim zu Neuem in sich tragen.

Ich nannte vorher noch eine dritte Abhandlung Leonardo's. Es ist die, welche gegenwärtig unter dem Namen der Aufgabe der Vögel bei den Mathematikern bekannt ist, und welche an einen gewissen Theodorus sich wendet, der offenbar gleich wie die übrigen schon genannten Persönlichkeiten am Hofe Friedrich II. lebte. Die Aufgabe von den Vögeln besteht in Folgendem: Für 30 Geldstücke wurden 30 Vögel gekauft, nämlich Sperlinge, deren 3 für ein Geldstück zu haben sind, Turteltauben, deren 2 ein Geldstück kosten, und Schlagtauben, deren jede mit 2 Geldstücken bezahlt werden muss. Wie viele Vögel jeder Gattung waren es? Diese Aufgabe gehört ihrer Art nach gleichfalls zu den unbestimmten, wenn sie auch nur die einzige Auflösung zulässt, dass die Vögel 9 Sperlinge, 10 Turteltauben und 11 Schlagtauben waren; und in so fern findet ein Zusammenhang mit den Fragen statt, welche Johann von Palermo dem Leonardo vorgelegt hatte. Dieser innere Zusammenhang scheint indessen der einzige zu sein, und in der That müssen wir annehmen, dass wir es hier mit einer selbstständigen Erfindung Leonardos zu thun haben, der seine originelle Auflösungsmethode an verschiedenen Beispielen prüft und noch Einiges weitere hinzufügt. Die Zeit der Abfassung der beiden letztgenannten Abhandlungen ist nirgends angegeben, indessen dürfte sie auch nicht weit von 1225 entfernt sein.

Von da an schweigen alle weiteren Nachrichten, und nicht einmal das Todesjahr des grossen Mannes, der uns in diesem Kapitel beschäftigt, ist uns aufbewahrt. War er etwa in jenen Zeiten der Zwietracht und des Kampfes, wo jeder Einzelne Parthei ergreifen musste, auf die Seite des ihm so wohlwollenden Kaisers getreten und so untergegangen und verschollen? Wir wissen darüber absolut Nichts, und werden wohl für immer auf nähere Kunde verzichten müssen, nachdem die jetzt genau und in Vollständigkeit bekannten Schriften Leonardo's nicht viel mehr über sein Leben ent-

hüllt haben, als man schon am Ende des vorigen Jahrhunderts wusste.

Es konnte hier, wo es sich nicht um eine wirkliche Geschichte der Mathematik handelt, natürlich die Aufgabe nicht sein, eine Detaileinsicht in die Schriften des Leonardo zu gewähren, und wenn ich mir nicht versagte, auf den allgemeinen Inhalt einiger dieser Schriften Rücksicht zu nehmen, so möchte ich umgekehrt fast dafür einer Entschuldigung bedürfen; einer Entschuldigung, die freilich leicht darin gefunden werden kann, dass ich die Bedeutsamkeit des Mannes dadurch kennzeichnen wollte, dass ich wenn auch nicht zur Evidenz erweisen, doch wahrscheinlich machen wollte, dass hier eine jener geistig hervorragenden Naturen erscheint, die weit aus ihrem Jahrhundert herausgehen und desshalb erst später so gewürdigt werden, wie sie es verdienen. Dass ein so bedeutender Geist auch im Kleinen Grosses leisten musste, dazu bedarf es keines Beweises, und wenn Jeder, der nur irgend den Vorhang gelüftet hat, welcher das Heiligthum der Mathematik bedeckt, die Geometrie des Legendre, die niedere Algebra Eulers ebenso verehrt, wie die grössten Entdeckungen, welche Beide in den Gebieten höherer Mathematik gemacht haben, so ist das Interesse sicherlich gerechtfertigt, welches man dem elementaren Abacuswerke des Leonardo Fibonacci zuwendet, und so darf auch ich wohl versprochenermaassen noch einmal darauf zurückkommen.

Man hat in demselben in mehrfacher Weise Merkwürdiges zu erwarten. Erstens brachte es der Bildungsgang Leonardos mit sich, dass er schon frühzeitig in die Methoden der verschiedensten Völker eingeweiht wurde, und zweitens dass er dieselben nicht bloss theoretisch kennen lernte, sondern bei seinen Handelsbeziehungen auch praktisch anwenden sah. Wie kein Anderer war somit Leonardo in der Gelegenheit zwischen den einzelnen Methoden Vergleichungen anzustellen, und eine Auswahl aus allen zu treffen, eine Auswahl, von der man gleichfalls im Voraus hoffen kann, dass sie eine glückliche gewesen sein werde, dass der mathematische Takt Leonardos ihn richtig leitete. Wir können ausserdem auch noch eigener Untersuchungen Leonardos gewärtig sein, die sicherlich zu den geistreichsten Kapiteln des Buches zählen werden. Alle diese Hoffnungen werden reichlich erfüllt. Vor allen Dingen geht aus der Einleitung in das Werk hervor,[629]) dass Leonardo in der That gelernt hat, was nur lernenswerth erschien, dass er alsdann

die Vergleichung der einzelnen Methoden anstellte, und dass er dabei die Methode der Inder weit über den Algorismus und ebenso über die Kolumnenrechnung oder, wie es wörtlich heisst, über die Kreisbögen des Pythagoras stellte. Dieser Ausspruch ist schon an sich interessant genug, um ihn etwas näher zu beleuchten. Wir ersehen aus demselben mit Bestimmtheit, dass zwischen dem Algorismus und den Kreisbögen des Pythagoras ein Unterschied existirte, dass dieser Unterschied auch dem Leonardo bewusst war, und dass es nur an der Mangelhaftigkeit einer Handschrift lag, wenn früher des Wort „Kreisbögen" in dem angeführten Satze fehlte, und man denselben mit ziemlichem Zwange gegen die lateinische Sprache so übersetzte, als wäre von dem Algorismus des Pythagoras die Rede, ein Irrthum, den ich mir noch selbst zu Schulden kommen liess, [638]) und auf welchen Chasles zuerst aufmerksam machte. [639])

Derselbe Gelehrte hat bei dieser Gelegenheit die weitere Frage sich gestellt, welche jetzt auch wohl mit Nothwendigkeit auftreten musste: Wenn nämlich Leonardo einestheils die Methode des Pythagoras, anderntheils die des Alkharezmi unterscheidet, was bleibt dann noch als Drittes übrig, welches er die Methode der Inder nennt, und welches so hoch über jenen anderen Methoden stehen soll? Chasles meint, unter dieser Methode sei gar keine Rechenmethode mit bekannten gegebenen Zahlen gemeint, sondern man habe darunter jene Methoden zu verstehen, die dazu dienen, Unbekanntes im Sinne moderner Buchstabenrechnung zu finden, und vor Allem die sogenannte Regula Falsi, welche in der That den Indern eigenthümlich zu sein scheint und wohl erst später zu den Arabern gelangte als die eigentliche Algebra, die bei ihnen in origineller Weise sich umbildete, in mancher Beziehung sogar rückbildete, da die Bezeichnungsweise der Inder formell schon auf einem vorgeschritteneren Standpunkte sich befand. [640]) Leonardo selbst spricht sich über den Ursprung jener Regel nicht näher aus, erläutert sie aber sowohl in Worten als an Beispielen, [641]) und giebt auch den arabischen Namen derselben an. [642])

Merkwürdiger Weise ist dieser Name der der Regel Elchatayn, welcher schon früher in diesem Buche im 18. Kapitel [504]) in anderem Sinne Erwähnung geschah. Damals gab ich nach Gesenius an, die wörtliche Uebersetzung sei vielleicht Regel der Chinesen, und die Regel-de-tri sei damit gemeint. Das würde freilich wenig Uebereinstimmuug mit der Angabe Leonardo's zeigen, und so lag die Ver-

muthung nahe, dass Gesenius sich durch eine Lautverwandtschaft hatte irre führen lassen. Herr Professor Weil war so gütig, meine desshalbigen Zweifel aufzuklären. Chatayn oder Chitain bezeichnet, wie er mir mittheilte, allerdings eine turkomanische Völkerschaft, welche im 12. Jahrhundert in Turkistan und Transoxanien hauste, später auch in die nördlichen Provinzen Chinas eindrang, so dass der Name Chitai auch zuweilen als der des nördlichen Chinas vorkommt. Allein jedenfalls liegt die Zeit, in welcher dieser Name sich mit einiger Sicherheit nachweisen lässt, zu spät, als dass man annehmen dürfte, die im 12. Jahrhunderte jedenfalls den Arabern bekannte Regel sei eine chinesische und habe als solche jenen Eroberern ihren Namen zu verdanken, und noch weniger lässt sich glauben, dass die Araber eine so vollkommene Regel von jenen Räuberhorden selbst entlehnten. Weit plausibler klingt daher folgende Ableitung, welche eine nur geringe Veränderung der Orthographie voraussetzt. Kata oder Kita bedeutet nämlich Stück, Fragment, Theil und so hiesse Regula Elchatayn, oder richtiger Alkitain, die Regel der zwei Theile, indem die Dual-Endung hier in ihrer eigentlichen Bedeutung auftritt. Der Zweck dieses Buches verbietet mir auf weitere Ausführung der Regel selbst einzugehen, die jeder nur im Mindesten historisch gebildete Mathematiker wohl kennt, während sie dem Laien in der Kürze kaum erläutert werden kann. Nur die Bemerkung möchte ich nicht unterdrücken, dass Regel der zwei Theile sehr leicht auch von der Regel-de-tri gesagt werden könnte, so dass es wohl möglich wäre, dass bei einigen Schriftstellern die Hypothese von Gesenius, so weit sie auf *den* Inhalt der Regel sich bezieht, sich rechtfertigen liesse.

Ich kehre zu der Ansicht von Chasles über die sogenannte Methode der Inder zurück. Ich kann seiner Meinung so weit beipflichten, als ich zugebe, dass die Regula Falsi einen Theil jener Methode ausmachte, allein ich möchte in ihr nicht die ganze indische Methode finden. Ich glaube vielmehr, dass noch manches Andere in dem Abacuswerke auf indischen Ursprung zurückweist, welches damals wenigstens den Arabern fast ebenso neu war als dem Leonardo selbst, und welches durch ganz besondere mathematische Eleganz sich auszeichnet. Ich meine so: Leonardo hatte schon in Bugia manche Kenntnisse sich erworben, die ihm durch arabische Gelehrte beigebracht wurden. Und er war dazu am richtigen Orte. Bugia war nicht bloss als Handelsstadt bedeutend, es war gewisser-

massen eine mohammedanische Universität. Ungefähr hundert Jahre nach Leonardo's Aufenthalt in dieser Stadt, im Jahre 1289 bereiste Abou Mohammed El-Abdery aus Valencia das nördliche Africa, und in seinem Reisebericht drückt er sich folgendermassen aus:[643]) „Bugia ist ein grosser Seehafen und eine befestigte Stadt, deren Name historisch berühmt ist. Sie ist auf steilen Höhen und in einer Schlucht angelegt, die Mauern ziehen sich bis an's Meer. Die Festigkeit der Häuser kommt der Eleganz ihrer Formen gleich. Vorwerke schützen sie, so dass der Feind vergebens einen Angriff versuchen würde. Die Wuth der kriegerischen Horden würde an diesen Mauern zerschellen. In Bugia existirt eine Moschee, deren Pracht alle bekannten Gotteshäuser übertrifft, und deren Minaret sowohl von dem Meere als von dem Land aus gesehen wird. Gleichsam Mittelpunkt der Stadt erfreut dieses entzückend schöne Bauwerk ebensosehr den Blick, wie es die Seele mit einem Gefühle unsäglicher Glückseligkeit erfüllt. Die Einwohner versäumen nie, ihren fünf durch das Gesetz vorgeschriebenen Gebeten dort zu genügen, und sie unterhalten die Moschee mit grösster Sorgfalt, weil sie ihnen gewissermassen als Versammlungsort dient, und selbst gleich einem belebten Wesen dem Menschen Gesellschaft leistet. Bugia ist eine der ältesten Hauptstädte des Islams und ist bevölkert mit berühmten Gelehrten.“ Aus der Zeit, zu welcher Leonardo in Bugia verweilte, stehen mir keine directen Nachrichten zu Gebote, indessen glaube ich mich mit der eben angeführten Beschreibung begnügen zu können, um den Rückschluss auf ein nicht minder reges geistiges Leben in jener Stadt während der hier wichtigen Periode ziehen zu können. Unter den mathematischen Kenntnissen, welche Leonardo sich hier aneignete, war sicher Manches, welches aus Indien stammte. Ich würde dem Inhalte meines 18. Kapitels zu sehr widersprechen, wollte ich diese Thatsache in Abrede stellen. Wohl aber stelle ich in Abrede, dass Leonardo diese, nenne man sie doch indische, Mathematik meint, wenn er von indischen Methoden redet. Damit meint er solche indischen Kenntnisse, die er freilich nicht in Indien erlangte — dort war er nie, sonst hätte er es gewiss nicht verschwiegen, wo er die Orte angiebt, die er bereiste[629]) — aber doch im Oriente, der noch immer in unmittelbarem wissenschaftlichen Verkehre mit Indien stand, und wo man sicherlich zu unterscheiden wusste zwischen schon seit einigen Jahrhunderten Eingebürgertem, in gewissem Sinne ara-

bisch Gewordenem und dem noch jetzt als indisch zu Bezeichnenden. Dahin rechne ich mit Chasles die Regula Falsi, aber auch noch einiges Andere.

Ich will nur der beiden Multiplicationsmethoden gedenken, deren Eine bei den späteren Schriftstellern die netzförmige,[644]) die Andere die blitzartige[645]) genannt wird, und von welcher die Erstere in Europa im 16. Jahrhundert bei Kaufleuten im Gebrauche war,[646]) die Zweite erst in diesem Jahrhundert einige Ausdehnung gewann, wenn auch bei Weitem nicht so sehr, wie sie es verdient, und wenn sie auch meines Wissens bisher noch keinen Eingang in die Lehrbücher gefunden hat.[647]) Ich habe ferner die zahlentheoretischen Betrachtungen im Sinne, welche bereits im Abacuswerke beginnen, und wenn sie dort auch nur in den ersten Anfängen vorkommen, doch später, wie wir wissen, sich zu einer Höhe erheben, welche sie bei den Arabern und bei den mittelalterlichen Gelehrten Europas nie, bei den Indern kaum jemals erreichten. Vielleicht aber auch ist Leonardo hier ganz selbstständig, wofür allenfalls der Umstand angeführt werden könnte, dass, wo er z. B. zuerst von Primzahlen redet,[648]) er den arabischen und den griechischen Namen derselben angiebt, daneben aber auch einen ihm eigenen lateinischen Namen; er steht also hier gewissermassen unpartheiisch über den Schriftstellern jener beiden Nationen. Und dasselbe findet bei einer weiteren zahlentheoretischen Betrachtung statt, bei der Zerlegung von Brüchen in die Summe anderer Brüche, deren Zähler sämmtlich die Einheit sind,[649]) wie z. B. $\frac{19}{24} = \frac{1}{8} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2}$ gesetzt wird. Derlei Aufgaben finden sich nämlich sowohl bei den Griechen als bei den Arabern,[650]) und ich bin gegenwärtig nicht im Stande anzugeben, ob eine directe Abhängigkeit beider existirt, und noch weniger, wem Leonardo speciell seine Kenntnisse entnahm.

Andere Gegenstände, welche in dem Abacuswerke abgehandelt sind, weisen dagegen direct nach Arabien zurück; noch andere liefern die untrügliche Bestätigung, wenn eine solche erforderlich ist, dass Leonardo die mittelalterliche, also griechisch-römische Rechenkunst sich gleichfalls aneignete. Unbedingt arabisch ist bei Leonardo die Algebra, welche er, wie eine Randbemerkung verräth, dem M a u m e h t, also natürlich dem Mohammed ben Musa entnimmt,[651]) und welche bei ihm vielleicht zuerst von europäischen Werken mit ihrem richtigen und vollständigen Namen als Al-

gebra und Almukabala auftritt.[652]) Arabisch ist auch der Name der Null, welche hier ausnahmslos Zephirus heisst,[653]) also gleichfalls in Uebereinstimmung mit Sifr, wenn auch verschieden von dem sonst gebräuchlichen Cifra. Soll ich auch Lehren der zweiten Gattung nennen, die meinen Lesern von Boethius und dessen Nachfolgern her geläufig sind, so könnte ich vielleicht schon die allerdings nebensächliche Bemerkung für mich anführen,[654]) dass man auf einer weissen Tafel rechne, auf welcher die Zeichen leicht ausgelöscht werden können. Mit grösserer Bestimmtheit würde ich auf die Fingerrechnung[655]) mich berufen, welche an zwei Stellen auseinandergesetzt ist. Ich würde auch jener Aufgaben[656]) gedenken, bei welchen es darauf ankommt, die Zahl 10 in Theile zu zerlegen, welche ein gewisses Verhältniss zu einander haben. Der letzte Zweifel endlich müsste schwinden, wenn ich nachweise, dass die complementäre Division[657]) bei Leonardo zwar nicht genau erläutert, aber doch angedeutet und in der Folge auch benutzt ist.

Habe ich damit wenigstens auf einige Punkte aufmerksam gemacht, welche uns zeigen, wie Leonardo bei allen Völkern sich zu unterrichten pflegte, wie er überall das Vortreffliche sich anzueignen wusste, wie sein Sammelgeist weit mehr dem der Biene gleicht, die aus allen Blüthen den Honig saugt, als dem des diebischen Raben, dem es genügt nur recht viel, Brauchbares und Unbrauchbares, in seinem Neste zu vereinigen, habe ich die Art der Receptivität Leonardo's dadurch in ein irgend deutliches Licht gesetzt, so ist auch die Eigenthümlichkeit des grossen Mannes damit zur Anschauung gebracht. Ich habe schon oben einige Dinge hervorgehoben, in deren Behandlung auch schon im Abacuswerke Leonardo möglicher Weise selbstständig ist. Ich möchte noch auf einige weitere Einzelheiten aufmerksam machen, welche ich nirgends früher finde, und welche sonach Eigenthum des Leonardo sein könnten. Die Existenz der Neunerprobe bei den verschiedenen Operationen wurde schon bei den Arabern nachgewiesen; aber Leonardo begnügt sich nicht damit, sie zu lehren, er beweist sie auch[658]) und zwar in euclidischer Weise, indem er Linien statt der Zahlen substituirt. Bei der Subtraction pflegte man, falls der Subtrahend in einer Stelle höher war als der Minuend, die betreffende Stelle des Minuenden um 10 zu vergrössern, die nachfolgende um 1 zu verkleinern; Leonardo lehrt,[659]) man solle, statt der Verkleinerung der nächsten Stelle des Minuenden, die nächste Stelle des Subtrahenden um

1 vergrössern. Dem Resultate nach bleibt sich dieses natürlich gleich, aber dem Gedanken nach ist der Unterschied der beiden Regeln doch nicht unerheblich, und in der Praxis scheint sogar die des Leonardo mehr vor Irrthümern zu schützen. Beiläufig bemerkt, war sie im 16. Jahrhundert etwa [660]) bei Weitem gebräuchlicher als die andere, welche dagegen später wieder die Oberhand gewann. Ich will endlich nur mit zwei Worten erwähnen, dass Leonardo sich mit einer eigenthümlichen Art zusammengesetzter Brüche vielfach beschäftigt, [661]) welche erst vor wenigen Jahren wieder die Aufmerksamkeit deutscher Mathematiker auf sich zog und von ihnen den Namen des aufsteigenden Kettenbruches erhielt. [662])

Ich bin weit entfernt, behaupten zu wollen, dieses sei auch nur annährend Alles, was im Abacuswerke Eigenthum des Leonardo ist; allein als Beispiel mag es genügen, umsomehr als die Betrachtungen dieses Kapitels schon mehr Ausdehnung gewonnen haben, als ich eigentlich beabsichtigte, und es mich drängt, auch äusserlich dieses Buch abzuschliessen, wie es seinem Hauptinhalte nach schon mit dem 22. Kapitel beendigt war.

Schlussbetrachtungen.

Und so bin ich denn bei den Schlussbetrachtungen angelangt, angelangt bei der Nothwendigkeit, einen kurzen Blick auf das zu werfen, was ich geleistet habe, einen Vergleich mit dem anzustellen, was ich bieten wollte. Ich wollte, der gütige Leser, dessen Aufmerksamkeit bis hierher gereicht hat, wird sich dessen erinnern, durch mathematische Betrachtungen nachweisen, welcher Kulturgang der Völker angenommen werden müsse; ich wollte zeigen, dass derselbe Weg, den uns die Fussstapfen anderer Träger der Civilisation als den begangenen kennzeichnen, auch dem Mathematiker diente. Dass ich dieses nicht so erreicht habe, wie ich es wollte, kann mir Niemand deutlicher zurufen, als mein eigenes Bewusstsein. Denn indem ich dieses Werk dem Publicum übergebe, fühle ich nur zu tief die Wahrheit des Götheschen Wortes:

> Ich weiss zu wohl, noch bleibt es unvollendet,
> Wenn es auch gleich geendigt scheinen möchte.

Aber ich fühle zugleich, dass ein nochmaliges, wenn auch jahrelanges Umhertragen des Gegenstandes in meinem Innern ihn kaum bedeutend fördern könnte, dass er zum Reifen der Sonne und des Regens fremder Gunst und Ungunst bedarf, dass er vielleicht erst im zweiten, dritten Geschlechte auf anderem Boden die Kraft und das Edle erlangen kann, welches ich ihm wünsche. Und andrerseits wage ich zu behaupten, auf die Gefahr hin des Stolzes bezüchtigt zu werden, dass ich doch einen Theil der Aufgabe gelöst habe, welche ich mir stellte.

Der Mathematiker, welcher für das historische Werden seiner Wissenschaft auch nur einiges Interesse fühlt, wird mir, ich hoffe

es zuversichtlich, am Ersten dieses Zugeständniss machen. Er wird in dem hier der Oeffentlichkeit Ueberantworteten sicherlich manche neue Untersuchungen finden, welche eine ernste Prüfung verlangen. Und mag nun diese Prüfung für oder gegen meine Ansichten ausfallen, so kann sie doch nicht ohne jedes Resultat für die Wissenschaft bleiben, so wird sie meinem Versuche doch wenigstens den Werth zuschreiben müssen, auf die betreffenden Fragen aufmerksam gemacht und einiges Material zu deren Beantwortung angesammelt zu haben.

Ich meine unter solchen Gegenständen, die hier wohl zum erstenmale einer eingehenden Untersuchung unterworfen wurden, zuerst die Betrachtungen über die mögliche Existenz der Null bei den Chinesen; ferner die über die von mir sogenannte pythagorische Mathematik, insbesondere den Zusammenhang des pythagorischen Lehrsatzes mit Arithmetik und Geometrie. Ich meine die Charakterisirung der archimedischen Sandrechnung nach ihrer eigentlichen Bedeutung in Verbindung mit der geometrischen Exhaustionsmethode. Ich meine die sogenannte Null der Griechen, deren Nichtigkeit ich bewiesen zu haben glaube. Ich meine die Untersuchung über Tetraden und Triaden nebst deren Entstehung. Ich meine die Geometrie des Boethius, deren Authenticität ich freilich nicht zuerst, aber doch mit ziemlich vielen neuen Gründen behaupte. Ich meine die Andeutungen über dessen Astronomie und die Art, wie er sie einleitete, während keinem Historiker vor mir es eingefallen war, an eine solche zu denken, geschweige denn sie der Untersuchung für würdig zu halten. *Ich* meine den Beweis des römisch-griechischen und keinenfalls arabischen Inhaltes der Arbeiten Gerbert's, der bei mir wohl vollständiger geführt ist, als bei meinen Vorgängern. Ich will die Geschichte der Zahlzeichen selbst, so vielen Fleiss ich auf dieselbe verwandte, nicht einmal besonders hervorheben, da ich in dieser, wenn auch Manches in neuer Weise geordnet, doch Nichts wesentlich Neues aufgestellt habe.

Viel schwieriger dürfte mein Stand dem Nicht-Mathematiker gegenüber sein, der mir vielleicht den Vorwurf machen kann, meiner anfänglichen Absicht nicht treu geblieben zu sein, sondern mich im Verlaufe des Buches einer strenger mathematischen Darstellung genähert und die versprochene Popularität etwas ausser Augen gelassen zu haben. Vielleicht ist dieser Vorwurf kein ganz ungerech-

ter, und ich gestehe, dass ich selbst mich nicht ganz von demselben frei sprechen kann, so viele Mühe ich mir gab, nicht in diesen Fehler zu verfallen. Und doch, hoffe ich, wird auch der Nicht-Mathematiker in meinem Werke Stoff zum weiteren Nachdenken über Dinge gefunden haben, die vom allgemeinsten Gesichtspunkte aus historisch-interessant sind. Wenn dieser auch in den vier ersten Kapiteln mit Ausnahme des speciell Mathematischen nur wenig entdecken wird, was ihm nicht aus anderen Büchern ausführlicher und genauer bekannt sein mag, so werden doch die Kapitel, welche mit Pythagoras und seiner Schule und den dort verbreiteten Kenntnissen sich beschäftigen, grade ihm manches Neue, manches Ueberraschende bieten.

Ich gebrauche hier das Wort Ueberraschung nicht grade zu meinen Gunsten. Es giebt Ueberraschungen mancherlei Art, und auch solche, die weniger mit Bewunderung als mit dem Gegentheil dieses Gefühles, oder doch mit Verwunderung gepaart auftreten. Solche Ueberraschung, ich weiss das recht wohl, bereitet es vielen gelehrten und geistreichen Männern, wenn sie von einer in's Einzelne sich erstreckenden Lebensbeschreibung des Pythagoras hören, sie, welche kaum anzunehmen geneigt sind, dass irgend Etwas über sein Leben bekannt sei, ausser dass er auf Samos geboren in Unteritalien gestorben sei, welche sogar an seinem Aufenthalt in Egypten, noch mehr an dem in Babylon zweifeln. [663])

Diese Männer pflegen dann die Frage aufzuwerfen, wie man es rechtfertigen wolle aus späteren Schriftstellern, bald aus diesem, bald aus jenem ein Stück herauszureissen und zu einem neuen Ganzen zu verbinden. Nun, auf diese Frage, denke ich, hat schon Lessing geantwortet, [664]) wenn auch in Bezug auf einen etwas anderen Gegenstand. Ich brauche also nur den Satz des Grossmeisters aller Kritik zu entlehnen: „Als ob die innere Wahrheit eine Probe noch brauchte! Als ob nicht vielmehr die innere Wahrheit die Probe der hermeneutischen sein müsste!“ Freilich wenn ich hier einen Fetzen, dort einen Fetzen kritiklos wähle und sie zusammennähe, dass sie eine bunte Harlekinsjacke geben, dann werde ich Niemand überzeugen können, dass diese Tracht allgemeine Sitte war, oder gar noch ist. Aber wenn die Stücke so in- und zu einander passen, wie bei einem jener Geduldspiele der Kinder, die man ihnen zerlegt in die Hände giebt, und sie dann wieder von ihnen zusammensetzen lässt, dann ist es umgekehrt fast unmöglich

den Beweis zu führen, die Stücke, welche in ihrer jetzigen Aneinanderlagerung ein nach Composition und Ausführung richtiges Bild uns zeigen, hätten ursprünglich nicht so in einander gepasst, seien nur zwangsweise vereinigt worden.

Die Autoren, auf welche Röth sich bei seiner Arbeit beruft, denn, wie ich schon oft zugestanden habe, ich folge in der Hauptsache seinen glänzenden Vorarbeiten, sind besonders Aristoxenus und Dikäarch, die Schüler des Aristoteles. Wie kommt es nun, fragt man, dass der Lehrer von alle dem Nichts erzählt? Aber ist das denn gar so wunderselten, dass ein Schüler in irgend einer Beziehung über den Lehrer, und wäre es ein Aristoteles, hinausgeht?

Einer der scharfsinnigsten Einwürfe ist der, dass die Fabeln über Pythagoras, wie ich einmal im Sinne meiner Gegner mich ausdrücken will, erst da in der Litteratur auftreten, als Alexanders Heereszug nach Persien und Indien die Aufmerksamkeit auf diese Gegenden gelenkt hatte, als man dadurch geneigt wurde, grade aus diesen neu entdeckten Kulturländern möglich Vieles herzuleiten, und in dem Pythagoras eine passende Persönlichkeit sah, an welche solche Sagen sich anlehnen konnten. Eine so kräftige Angriffswaffe dieser Einwand zu sein scheint, so schützt er doch nicht gleichzeitig den, der ihn benutzt, ja er lässt sich sogar gegen den selbst anwenden, der ihn ersonnen. Ich will meine mancherlei Gegengründe vortragen.

Pythagoras, das steht doch nirgends und bei Niemanden in Zweifel, muss ein ausserordentlicher Mann gewesen sein, ein Mann von hervorragendem Geiste und zugleich von kolossalem Wissen. Er muss dieses Wissen irgendwo erlangt haben, und dieses wo? muss offenbar zu seinen Lebzeiten wenigstens dem intimeren Kreise seiner Anhänger bekannt gewesen sein. Solche Notizen vererben sich aber auch fort. Sagenhaftes mancher Art, Wunderthaten und Zaubergeschichten mögen sich damit vermengen; die Orte wenigstens, an welchen diese Neuerfindungen sich zugetragen haben sollen, werden im Allgemeinen solche sein, an welchen der Held der Sage wirklich lebte. So haben wir gesehen, wie manches Sagenhafte sich mit dem Leben Gerbert's in der Erinnerung des Chronisten vereinigte, aber der Schauplatz dieser Sagen ist Spanien, ist Italien, wo Gerbert verweilte. So wird heute noch auf der Wartburg der Flecken an der Wand gezeigt, welcher davon herrührt, dass Luther

dem Teufel das Dintenfass an den Kopf warf; aber es ist doch auf der Wartburg, wo Luther wirklich sich aufhielt. Es ist also immer ein wahrer Kern, um den die Ausschmückungen sich lagern, und dass diese in dem kurzen Zeitraum von nur 150 Jahren zu einer solchen Mächtigkeit anwuchsen, dass gar Nichts mehr vom Kern zu erkennen war, das ist zur Zeit des Pythagoras ebensowenig wahrscheinlich wie heute. Es ist mir gradezu undenkbar, dass Aristoxenus, Dikäarch und Andere jeder für sich, einen und denselben Roman erfunden hätten, wenn nicht die leitenden Thatsachen wahr, wenigstens allgemein bekannt, seit lange überliefert gewesen wären.

Doch ich gehe weiter. Lassen wir für einen Moment das, was mir Biographie des Pythagoras scheint, wirklich nur einen Roman sein, hervorgerufen durch Alexanders Heereszug, durch die Erzählungen derer, welche die Wunder Persiens und Indiens von Augenschein kennen gelernt hatten. Wie kommt dann plötzlich in die erste Hälfte jenes Romans ein Aufenthalt in Egypten, wo Alexanders Heer nichts Neues mehr vorfand, was die Erzählungen Herodot's übertreffen und auf's Neue die Phantasie anstacheln konnte; wie kommt es, dass von einem Aufenthalte in Indien dagegen nicht die Rede ist, während dieses Land fast noch mehr das Land der Mährchen und des Staunenswerthen ist, als selbst Persien und Babylon? Somit wäre ich wenigstens dahin gelangt, meinen Gegnern einen Beweis zuzuschieben, während bisher mir diese Last oblag.

Ich kann mir nicht versagen, versprochenermassen noch zu zeigen, wie der letzte von Alexanders Kriegen hergenommene Einwand sich auch umgekehrt grade zu meinen Gunsten verwerthen lässt. Wie, wenn ich so sagte: Der Aufenthalt des Pythagoras in Egypten und Babylon war längst hergebrachte Volksmeinung. Der Gelehrte glaubte nur nicht recht daran. War gleich die hohe Kultur Egyptens ihm bekannt, so konnte er sich doch nicht denken, dass von den Barbaren Babylons so viel sollte zu lernen gewesen sein. Jetzt macht Alexander seinen Kriegeszug. Die volle Wahrheit des kritisch Angezweifelten wird offenkundig, und nun erst wagt die Wissenschaft sich an eine Zusammenstellung dessen, was ihr nicht mehr bloss sagenhaft erscheint. Das ist jedenfalls doch auch eine Auffassung, welche sich vertheidigen lässt, und welche neue Gegengründe verlangt, um vernichtet zu werden.

Ich will indessen meine, wie ich glaube, günstige Stellung

wieder für einen Augenblick aufgeben. Ich will so weit entgegenkommen, dass ich sage, es stehe hier Glaube gegen Glaube, Ueberzeugung gegen Ueberzeugung. Streng beweisen können weder die Einen, dass das, was sie nicht glauben, auch nicht existirt habe, noch soll der Beweis der Anderen stichhaltig sein, dass das, was sie glauben, Wahrheit und nicht nur Dichtung gewesen sei. Möge doch alsdann jeder auf seine Façon selig werden, und besprechen wir die Folgerungen, welche ebensowohl aus den Schriften der alten Biographen, als aus meinen neuen Untersuchungen sich ergeben. Als die Geschichtsschreiber des Pythagoras schrieben, waren die Sitten und auch wohl einige von den Lehren der Pythagoriker bekannt geworden. Finden sich doch bei Aristoteles mancherlei derartige Angaben. Ebenso kannte man jetzt Sitten und Lehren der Egypter und Babylonier. Durften unter solchen Verhältnissen jene Biographen es wagen, den Pythagoras in Egypten und Babylon lange verweilen zu lassen, wenn nicht seine Lehren mit den in beiden Ländern verbreiteten verwandtschaftliche Züge der Aehnlichkeit besessen hätten? In Uebereinstimmung damit habe ich gezeigt, dass die Arithmetik, die Geometrie, die Zahlensymbolik, das Zahlenrechnen und die Zahlzeichen, wenn nicht des Pythagoras, so doch seiner Schule ein Ganzes bilden und auf's Engste zusammenhängen, sowie man egyptische und babylonische, vielleicht auch chinesische durch Babylon vermittelte Einflüsse annimmt, während unter der gegentheiligen Hypothese Alles auseinanderfällt, wenigstens das geistige Band nicht ersichtlich ist.

Ich finde diese Copula in meiner Lebensbeschreibung des Pythagoras. Meine Gegner halten dieselbe für unglaublich. Nun, wenn sie sie verwerfen, müssen sie dann nicht an deren Stelle das noch weit Unglaublichere setzen, dass plötzlich egyptische und babylonische Einflüsse in der Schule des Pythagoras sich geltend machten, ohne dass man sagen könnte wie oder durch wen?

Und es kommt noch ein weiteres Moment hinzu. Ich sagte oben, der Schüler könne über den Lehrer hinausgehen; gewiss, wenn er auch anderweitig sich umgesehen hat; nicht so verhält es sich mit einer Schule, die so eng um den Lehrer geschlossen war, wie die des Pythagoras. Diese konnte die Gedanken des Lehrers ausbilden, aber die Wahrscheinlichkeit ist sehr gering, dass sie ganz neue Ideen mit hereingezogen, die nicht schon dem Keime nach in den Lehren des Pythagoras enthalten waren, und so gewinnt

meine Auffassung von dem Lehrgange des Pythagoras wieder eine neue Stütze.

Somit, glaube ich, wird jeder Leser, der unbefangen genug ist, sich den beigebrachten Gründen nicht, wenn auch unabsichtlich, vollständig zu verschliessen, so weit durch meine Betrachtungen geführt werden, dass er nochmals recht genau mit sich zu Rathe geht, ob denn wirklich alle diese Uebereinstimmungen blosse Zufälligkeiten sein können. Er wird aber darin sicherlich sich überzeugt fühlen, dass Babylon die Wiege von einer weit grösseren Anzahl von Kenntnissen ist, als man bisher anzunehmen pflegte, so hoch die Meinung mancher Gelehrten von babylonischer Kultur sich auch erstrecken mag.

Ein merkwürdiges Beispiel astronomischer Art von babylonischem Einflusse auf die Nachbarvölker haben im letzten Jahre die Entdeckungen von Professor Weber [665]) an's Licht gefördert, indem dieser unermüdliche Forscher auf dem Gebiete indischer Chronologie den Beweis geführt hat, dass die Dauer des längsten Tages bei Chaldäern, Chinesen und Indern genau in denselben Zahlen angegeben ist und jedenfalls bei dem zuerst genannten Volke ursprünglich berechnet wurde.

Ich habe an einer früheren Stelle dieses Buches die Möglichkeit berührt, dass die Sexagesimalbrüche, welche wir bei den Griechen, wie bei den Indern und den Arabern in Gebrauch fanden, nicht etwa von einem dieser Völker zu den andern übergingen, sondern einer gemeinsamen Quelle für alle drei entsprangen, dass sie babylonisch seien. Ich war nicht sehr geneigt diese Ansicht als die richtige anzunehmen, und bin auch jetzt noch nicht zu derselben bekehrt. Gleichwohl fühle ich mich gedrungen hier auf einige Stellen des Herodot aufmerksam zu machen, die meines Wissens noch nie in dieser Beziehung berücksichtigt wurden, und deren Kenntniss ich selbst einer mündlichen Mittheilung von Dr. Oncken verdanke.

Als Darius den Ister auf einer Schiffbrücke überschreitet, um die Skythen mit Krieg zu überziehen, lässt er ionische Truppen zum Schutze der Brücke zurück, und befiehlt ihnen 60 Tage auf ihn zu warten; [666]) sei er nach dieser Frist nicht wieder zurückgekehrt, so möchten sie aufbrechen und sich in ihre Heimath begeben. An der zweiten Stelle erzählt Herodot, wie der Hellespont, welcher die erste Brücke des Xerxes zerstört, 300 Ruthenstreiche

erhält;[667]) und endlich an einer dritten Stelle lässt Kyrus den Fluss Gyndes, in welchem eines seiner heiligen Rosse ertrunken war, zur Strafe dafür in 360 Rinseln abgraben.[668]) Die gemeinsame Bedeutung dieser Stellen finde ich darin, dass offenbar hier durchaus willkürliche Zahlen auftreten, also sicherlich solche gebraucht wurden, welche in der Sprache des täglichen Lebens vielfach dienten. So würden wir heute den Auftrag geben 14 Tage, 6 Wochen oder eine derartige Zeit zu warten; 5 Wochen etwa oder 7 Wochen würde man in freier Willkür, also ohne besonders bestimmenden Grund nicht sagen, so wenig wie 23 Tage. Die französische Sprache gebraucht hier gern das Wort quinzaine, welches ich wohl auch früher hätte erwähnen können, als von einem nach den Grundzahlen 10 und 12 gemischt fortschreitenden Zahlensysteme die Rede war. Bei körperlicher Züchtigung hat die Zahl 25 auf dem Continente eine schmerzliche Berühmtheit erlangt, ähnlich wie der Engländer von den Dutzenden seiner 9 geschwänzten Katze spricht. Der Perser benutzt, wie wir aus den angeführten Stellen sehen, hier einmal die Zahl 60, die beiden andernmal Zahlen, welche Vielfache von 60 sind, also lauter Zahlen jenes gemischten Systems mit den Grundzahlen 10 und 12 und darunter eine, welche als die Hälfte von 600 (sexcenti!) uns besonders auffallen muss. Dieser letzte Zusammenhang interessirt uns aber hier doch noch weniger als der Umstand, dass 300 und 360 Vielfache von 60 sind; denn wenn ich auch am Wenigsten behaupten will, dass dadurch die Existenz der Sexagesimalbrüche bei den Persern wahrscheinlicher würde, an die ich selbst nicht recht glaube, so ist doch soviel dadurch gesichert, dass die Zahl 60 ihnen eine hervorragende war, eine im täglichen Gebrauche zu irgend einem Zwecke benutzte.

Wenn nun mein nicht-mathematischer Leser in den Untersuchungen über älteste Culturzusammenhänge Stoff zum Nachdenken finden wird; wenn er, worauf ich vorhin schon beiläufig hindeutete, Veranlassung finden wird, auch chinesische Geschichte mitzuberücksichtigen, welche, wie sie eine Zeit hindurch zu sehr sich vordrängte, jetzt umgekehrt sicherlich zu sehr vernachlässigt wird; so glaube ich ihm versprechen zu dürfen, dass auch die weiteren Kapitel nicht ohne jedes Ergebniss für ihn sein werden. Freilich sind die Bildungswege der späteren Zeit viel bekannter, und es lässt sich kaum etwas Neues von irgend welcher Erheblichkeit in

dieser Beziehung angeben. Trotzdem, hoffe ich, wird wenigstens die Thatsache für Manchen als Gewinn erscheinen, dass das Studium lateinischen und griechischen Alterthums niemals so ganz unterging, als man wohl annimmt, dass wenigstens in der Mathematik solche Leistungen, welche von den römischen Schriftstellern beeinflusst waren, bis zum 13. Jahrhundert neben anderen hergingen, in denen der arabische Ursprung nicht zu verkennen ist.

Und nun zum Schlusse noch ein Wort an die Männer, deren Schriften ich im Verlaufe dieses Buches zu benutzen Gelegenheit hatte. Sie werden bei Vergleichung der einzelnen Stellen finden, dass ich bemüht war Jedem das zuzuweisen, was ihm angehört, dass ich wenigstens versucht habe, die Pflicht der Dankbarkeit zu üben, die jeder redliche Forscher seinen Vorgängern schuldet. Sollte hie und da ein Irrthum vorgekommen sein, sollte namentlich irgend Etwas, das ich für mein Eigenthum halte, schon von Anderen bemerkt worden sein, so wird sicherlich Niemand lieber als ich gerechten Ansprüchen weichen. Und nicht bloss in dieser Beziehung fordre ich die Fachgenossen auf, meine Arbeit rückhaltlos zu beurtheilen; auch wo thatsächliche Einwendungen gegen meine Ansichten sich äussern, werde ich stets mit Freuden mich eines Besseren belehren lassen, und eine anständige Polemik eben so gern erdulden, als ich sie ohne Scheu geführt habe, mochten auch die Männer, deren Meinungen ich anzugreifen genöthigt war, eine noch so hohe Stellung auf der Stufenleiter der Wissenschaft einnehmen.

Anmerkungen.

1. Julius Braun, Geschichte der Kunst in ihrem Entwicklungsgang durch alle Völker der alten Welt hindurch auf dem Boden der Ortskunde nachgewiesen. 2 Bände (bis jetzt). Wiesbaden 1856 und 1858. Vergl. Bd. I, S. 39.

2. Eduard Röth, Geschichte unserer abendländischen Philosophie. Von diesem grossartig angelegten Werke erschienen nur zwei Bände: I. Die ägyptische und die zoroastrische Glaubenslehre als die ältesten Quellen unserer speculativen Ideen. Mannheim 1846 und II. Die Uebertragung der orientalischen Ideenkreise nach Griechenland und ihre Fortbildung durch die ältesten jonischen Denker und Pythagoras. Mannheim 1858. Gegenwärtig wird eine zweite Auflage vorbereitet, zu welcher die hinterlassenen Notizen des am 7. Juli 1858 leider verstorbenen Verfassers mit benutzt werden. Bd. I, S. 95 wird die Regierungszeit des Sesostris von 1570—1503 angegeben. Nach Anderen hingegen wäre Sesostris der König Seti I. und hätte erst 1453—1394 regiert. Dessen Sohn wäre alsdann Rhamses II. Maiamun 1394—1328, der von Herodot nur mit seinem Vater irrthümlich verschmolzen wäre.

3. Braun l. c. I, 82. Röth l. c. I. 119. Diodorus Siculus I, 49.

4. Ich berufe mich hier hauptsächlich auf den Artikel: Hieroglyphen von J. G. L. Kosegarten in Ersch und Gruber's Encyklopädie Section II., Theil 13, S. 183—194. Dann G. Seyffarth, Alphabeta genuina Aegyptiorum. Leipzig 1840 (als 7. Heft der Beiträge zur Kenntniss der Literatur, Kunst, Mythologie und Geschichte des alten Aegypten gedruckt). Champollion le jeune, Grammaire egyptienne ou principes généraux de l'écriture sacrée Egyptienne appliquée à la représen-

tation de la langue parlée. Paris 1836, und M. G. Schwartze, das alte Aegypten. Leipzig 1843.

5. Horapollinis Niloei Hieroglyphica edidit Leemans. Amsterdam 1835 ist die von mir benutzte Ausgabe.

6. *Αὐτίκα οἱ παρ' Αἰγυπτίοις παιδευόμενοι πρῶτον μὲν πάντων τὴν Αἰγυπτίων γραμμάτων μέθοδον ἐκμανθάνουσι τὴν ἐπιστολογραφικὴν καλουμένην· δευτέραν δὲ τὴν ἱερατικὴν ῇ χρῶνται οἱ ἱερογραμματεῖς· ὑστάτην δὲ καὶ τελευταίαν, τὴν ἱερογλυφικήν· ἧς ἡ μέν ἐστι διὰ τῶν πρώτων στοιχείων κυριολογική· ἡ δὲ συμβολική· τῆς δὲ συμβολικῆς ἡ μὲν κυριολογεῖται κατὰ μίμησιν ἡ δὲ ὥςπερ τροπικῶς γράφεται ἡ δὲ ἄντικρυς ἀλληγορεῖται κατά τινας αἰνιγμούς· ἥλιόν γ' οὖν γράψαι βουλόμενοι κύκλον ποιοῦσι σελήνην δὲ σχῆμα μηνοειδὲς κατὰ τὸ κυριολογούμενον εἶδος· προπικῶς δὲ κατ' οἰκειότητα μετάγοντες καὶ μετατιθέντες τὰ δὲ ἐξαλλάττοντες τὰ δὲ πολλαχῶς μετασχηματίζοντες χαράττουσιν· τούς γ' οὖν τῶν βασιλέων ἐπαίνους θεολογουμένοις μύθοις παραδιδόντες ἀναγράφουσι διὰ τῶν ἀναγλύφων· τοῦ δὲ κατὰ τοὺς αἰνιγμοὺς τρίτου εἴδους δεῖγμα ἔστω τόδε· τὰ μὲν γὰρ τῶν ἄλλων ἄστρων διὰ τὴν πορείαν τὴν λοξήν, ὄφεων σώμασιν ἀπείκαζον· τὸν δὲ ἥλιον τῷ τοῦ κανθάρου· ἐπειδὴ κυκλοτερὲς ἐκ τῆς βοείας ὄνθου σχῆμα πλασάμενος ἀντιπρόσωπος κυλινδεῖ.*

7. Braun l. c. I, 51. Kosegarten l. c. S. 19.

8. Schwartze l. c. ist meiner Ansicht. Dagegen hat Dulaurier, Examen d'un passage des stromates de Saint Clément d'Alexandrie, Paris 1833 und seine Nachfolger das Wort *στοιχεῖον*, auf welches Alles ankommt, durch Umriss, Gestalt übersetzt. Dann wäre die kyriologische Schrift erst recht eine eigentliche Bilderschrift, welche die Dinge durch ihre ersten Gestalten von selbst bezeichnet. Aber wie kommt man dann zu einem Gegensatze zwischen der kyriologischen und der symbolischen Schrift? Ich kann keinen sehen.

9. Porphyr. Vita Pythagorae, sectio 12 (ed. Kiessling p. 24). *Καὶ ἐν Αἰγύπτῳ μὲν τοῖς ἱερεῦσι συνῆν καὶ τὴν σοφίαν ἐξέμαθε, καὶ τὴν Αἰγυπτίων φωνήν· γραμμάτων δὲ τρισσὰς διαφοράς, ἐπιστολογραφικῶν τε καὶ ἱερογλυφικῶν καὶ συμβολικῶν, τῶν μὲν κοινολογουμένων κατὰ μίμησιν, τῶν δὲ ἀλληγορουμένων κατά τινας αἰνιγμούς.*

10. Röth l. c. I, 126.

11. Ich gebe die Zeichen von Rosette nach W. Osburn, The mo-

numental history of Egypt. London 1854. Vol. I. pag. 147. Die Zeichen aus dem Grabe der Zahlen sind damit übereinstimmend. Vergl. Gardner Wilkinson, Manner and customs of the ancient Egyptians, second series. London 1841. Vol. I. pag. 130 und Supplement, plate 19. Ich bemerke, dass der englische Text die Zahl der Ziegen zu 3234 angiebt, während die Abbildung nur 2234 rechnet, so dass also das einemal ein Rechenfehler oder das anderemal ein Druckfehler sich eingeschlichen hat.

12. Seyffarth l. c. S. 25 und 29. Schwartze l. c. S. 274. Champollion l. c. pag. 211.

13. Zeitschr. Math. Phys. Bd. III. S. 331. Der Sanskritname von Lotos heisst padma.

14. Champollion l. c. pag. 236.

15. Seyffarth l. c. S. 11.

16. Aehnliche Ansichten über die Selbstständigkeit der Zeichen, wenn auch nicht über die multiplicative Bildung einiger derselben bei Seyffarth l. c. S. 20 und 30.

17. Horapollo, Hieroglyphica Liber I, cap. 13: *ἀστέρα γράφοντες δηλοῦσι τὸν πέντε ἄριθμον· ἐπειδὴ πλήθους ὄντος ἐν οὐρανῷ πέντε μόνοι ἐξ αὐτῶν κινούμενοι τὴν τοῦ κόσμου οἰκονομίαν ἐκτελοῦσιν.* Seyffarth l. c. S. 7.

18. Horapollo, Hierogl. II, 30: *γραμμὴ ὀρθὴ μία ἅμα γραμμῇ ἐπικεκαμμένῃ δέκα γραμμὰς ἐπιπέδους σημαίνουσιν.*

19. Horapollo, Hierogl. I, 11: *γῦπα γράφοντες δηλοῦσι δραχμὰς δύο διότι παρ' Αἰγυπτίοις μονάς ἐστιν αἱ δύο δραχμαί, μονὰς δὲ παντὸς ἀριθμοῦ γένεσις, εὐλόγως οὖν δύο δραχμὰς βουλόμενοι δηλῶσαι γῦπα γράφουσιν, ἐπεὶ μήτηρ δοκεῖ καὶ γένεσις εἶναι, καθάπερ καὶ ἡ μονάς.*

20. Seyffarth l. c. S. 10, 18 und öfters.

21. Herodot liber II. cap. 36: *Αἰγύπτιοι γράμματα γράφουσι καὶ λογίζονται ψήφοισι, Ἕλληνες μὲν ἀπὸ τῶν ἀριστερῶν ἐπὶ τὰ δεξιὰ φέροντες τὴν χεῖρα· Αἰγύπτιοι δὲ ἀπὸ τῶν δεξιῶν ἐπὶ τὰ ἀριστερά· διφασίοισι δὲ γράμμασι χρέωνται· καὶ τὰ μὲν αὐτῶν ἱρά, τὰ δὲ δημοτικὰ καλέεται.*

22. Plato de legibus lib. V, pag. 747 und lib. VII, pag. 819. Vergl. Röth II, 87.

23. Theon v. Smyrna, liber de astronomia (ed. Martin p. 270): *Μακροῖς χρόνοις ταύτας (τὰς τῶν πλανωμένων κινήσεις) τηρήσαντες διὰ τὸ εὐφυὲς τῆς χώρας αὐτῶν, Βαβυλώνιοι καὶ*

Χαλδαῖοι καὶ Αἰγύπτιοι, προθύμως ἀρχάς τινας καὶ ὑποθέσεις ἀνεζήτουν, αἷς ἐφαρμόζοι τὰ φαινόμενα, δι᾽ οὗ καὶ τὰ εὑρημένα πρόσθεν ἐπικρίνειν καὶ τὰ μέλλοντα προλήψεσθαι φέροντες, οἱ μὲν ἀριθμητικάς τινας, ὥςπερ Χαλδαῖοι, μεθόδους, οἱ δὲ καὶ γραμμικὰς, ὥςπερ οἱ Αἰγύπτιοι, πάντες μὲν ἀνεὺ φυσιολογίας ἀτελεῖς ποιούμενοι τὰς μεθόδους, δέον ἅμα καὶ φυσικῶς περὶ τούτων ἐπισκοπεῖν· ὅπερ οἱ παρὰ τοῖς Ἕλλησιν ἀστρολογήσαντες ἐπειρῶντο ποιεῖν, τὰς παρὰ τούτων, λάβοντες ἀρχὰς, καὶ τῶν φαινομένων τηρήσεις, καθὰ καὶ Πλάτων ἐν τῷ Ἐπινομίῳ μηνύει.

24. Vergl. Röth II, 515 und ganz besonders dessen Note 817 desselben Bandes.

25. Journal des savants 1843, Août pag. 481. Röth I, 94 und Note 40.

26. Plutarch, de placit. philos. II, 12. Die Stelle ist übersetzt bei Röth II, 109.

27. Suidas s. v. *Ἀναξίμανδρος: καὶ ὅλως γεωμετρίας ὑποτύπωσιν ἔδειξε.*

28. Grotefend's erste Arbeit: Praevia de cuneatis quas vocant inscriptionibus Persepolitanis legendis et explicandis relatio. Andeutungen in den göttinger gelehrten Anzeigen, Jahrgang 1802, Stück 149 und 178 und Jahrgang 1803, Stück 60 und 117. Eine Zusammenstellung von Grotefend selbst in der zweiten Auflage des vortrefflichen Werkes von Heeren: Ideen über die Politik, den Verkehr und den Handel der vornehmsten Völker der alten Welt. Göttingen 1805, Bd. I, S. 931—960. Eine Geschichte der Entzifferung bei Fr. Spiegel: Die altpersischen Inschriften im Grundtexte mit Uebersetzung, Grammatik und Glossar. Leipzig 1862.

29. Journal of the Asiatic society X, 46.

30. Braun l. c. I, 262.

31. Dr. A. D. Mordtmann: Erklärung der Keilinschriften zweiter Gattung in der Zeitschrift der deutschen morgenländischen Gesellschaft. Bd. XVI. Leipzig 1862.

32. Grotefend in den Abhandlungen der königl. Academie zu Göttingen. Bd. V, S. 210.

33. Gehalten am 17. Januar 1862 in Heidelberg.

34. Heeren, Ideen u. s. w., Bd. I, S. 479.

35. Grotefend, die Tributverzeichnisse des Obelisken aus Nimrud in den Abhandlungen der königl. Academie der Wissenschaften zu

Göttingen Bd. V. (Jahrgang 1853) S. 207—298, besonders S. 214—216. Hincks, On the inscription of Van in dem Journal of the Asiatic society IX, S. 387—449, besonders S. 423—430. Rawlinson in derselben Zeitschrift der ganze Bd. X. besonders S. 172—173.

36. Staunton: Embassy to China. Vol. I, p. 311, nach einem Citate von Hager in seiner Memoria sulle cifre arabiche, Fundgruben des Orients Bd. II, S. 65—81. Das hier erwähnte Citat S. 68.

37. Spiegel, die altpersischen Inschriften u. s. w. S. 160 behauptet, die Einer werden durch den Vertikalkeil, die Zehner durch den Winkelhacken bezeichnet. „Für die Hunderte ist wieder ein neues Zeichen in Gebrauch gewesen, das wir noch nicht kennen, wahrscheinlich war es der horizontal liegende Keil." Von noch höheren Zahlen, 1000 u. s. w. schweigt er ganz. Bei diesem offenen Widerspruche gegen die Anmerkg. 35 angeführten Autoritäten glaubte ich mich jenen in meiner Darstellung anschliessen zu müssen.

38. Hincks l. c. S. 424.

39. Hincks l. c. S. 425.

40. Grotefend l. c. S. 216.

41. Buch Daniel, Kapitel 7, Vers 10.

42. Psalm 68, Vers 18.

43. Hincks l. c. S. 423. Grotefend l. c. S. 215.

44. Abdruck der assyrischen Keilschriften des britischen Museums: Pl. 13, No. 2. Grotefend l. c. S. 215.

45. Röth l. c. II, 339.

46. Heeren, Ideen u. s. w. Bd. I, S. 806—876.

47. Herodot, lib. I, cap. 199.

48. Die Königsstrasse zwischen Sardes und Susa. Vergl. Kiepert in den Monatsberichten der berliner Academie, Februar 1857, dann auch Braun l. c. II, 119.

49. Herodot lib. II, cap. 195.

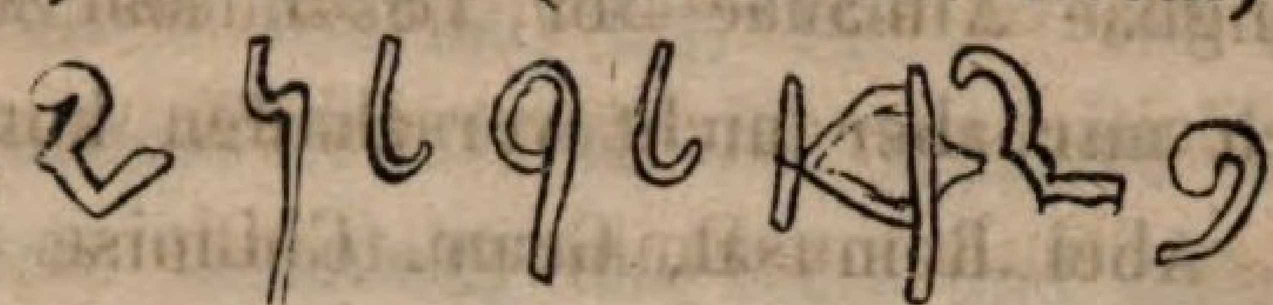
50. Prophet Jesaia, Kapitel 49, Vers 12.

51. Fundgruben des Orients II, 77.

52. Nesselmann, die Algebra der Griechen. Berlin 1842. S. 1.

53. D'Ansse de Villoison, Anecdota Graeca. Venedig 1781. Bd. II, S. 264 in der Note: Jamblici *Βαβυλωνικὰ*, quorum Photius meminit, ad editionem parata habuisse Jungermanum jam in prima pagina mearum ad Longi *Ποιμενικὰ* animadversionum post alios observavi. Im Register steht alsdann s. v. Jamblichus: Jamblichi *Βαβυλωνικὰ* hodie perdita.

54. Layard, Nineveh and its remains. London 1849. Vol. II, p. 165.

55. Röth l. c. Bd. I., Note 46 (S. 26 der Noten) giebt die Inschrift in folgender Gestalt:  und überträgt sie in folgende hebräische Buchstaben: ב י ת א ל ב ל נ ו oder Bet El Balenu.

56. Norris, On the Assyrian and Babylonian weights im Journal of the Asiatic society. Vol. XVI, pag. 215.

57. *Εὕρημα δ' αὐτήν φασιν εἶναι Βαβυλωνίων, καὶ διὰ Πυθαγόρου πρῶτον εἰς Ἕλληνας ἐλθεῖν.* Vergl. Röth l. c. Bd. II. Note 865.

58. Isidor Hispaliensis, Origines lib. III. cap. 2: Numeri disciplinam primum apud Graecos Pythagoram autumant conscripsisse ac deinde a Nicomacho diffusius esse dispositam, quam apud Latinos primus Appulejus deinde Boethius transtulerunt.

59. Nesselmann, Alg. d. Griechen. S. 188.

60. Ich habe darauf aufmerksam gemacht in der Kritischen Zeitschrift für Chemie, Physik und Mathematik Bd. I, S. 68 (Erlangen 1858).

61. Herodot lib. II. cap. 109: *Πόλον μὲν γὰρ καὶ γνώμονα καὶ τὰ δώδεκα μέρεα τῆς ἡμέρης παρὰ Βαβυλωνίων ἔμαθε οἱ Ἕλληνες.*

62. August Böckh, Metrologische Untersuchungen über Gewichte, Münzfüsse und Masse des Alterthums in ihrem Zusammenhange. Berlin 1838. S. 37 flgg.

63. Meine Hauptquellen in diesem Kapitel sind Abel Remusat, Elemens de la grammaire Chinoise. Paris 1822. Dann die gedrängte Zusammenstellung von Schott über Chinesische Sprache in Ersch und Gruber's Encyclopädie Bd. XVI. S. 359—373. Weniger brauchbar erwies sich bei kritischer Vergleichung Hager, Memoria sulle cifre arabiche. Diese Abhandlung ist zuerst abgedruckt in den Fundgruben des Orients. Wien 1811. Bd. II. S. 65—81. Dann in der Bibliothèque Britannique, Genève 1812, Mai No. 393 Litérature p. 15. Endlich als selbstständige Brochüre, Mailand 1813. Ich konnte den ersten und den sehr seltenen dritten Abdruck benutzen, der sich auf der grossherzgl. Hofbibliothek in Darmstadt befindet. Manches dankenswerthe Material fand ich zusammengestellt von Biernatzki, die Arithmetik der Chinesen in Crelle's Journal für reine und angewandte Ma-

thematik Bd. LII, S. 59—94. Der Verfasser citirt als seine eigene Hauptquelle einen Aufsatz, Jottings on the science of chinese arithmetic im Shanghae Almanac for 1853 and Miscellany printed Shanghae, welchen ich mir aber nicht verschaffen konnte.

64. Abel Remusat, Gram. Chinoise p. 33.

65. Abel Remusat, Gram. Chinoise p. 36.

66. Journal Asiatique 3ième série. Vol. VIII. pag. 90. Paris. Juillet 1839.

67. Duhalde, Ausführliche Beschreibung des chinesischen Reiches und der grossen Tartarei übersetzt von Mosheim, Rostock 1747. Bd. II, S. 338. Le Chouking un des livres sacrés Chinois traduit par le P. Gaubil revu et corrigé par Mr. de Guignes, Paris 1770 an sehr verschiedenen Stellen, die im Register s. v. Koua zu entnehmen sind; die Abbildung S. 352. De Paravey, Essai sur l'origine unique et hieroglyphique des chiffres et des lettres de tous les peuples. Paris 1826 pag. 1 und planche II.

68. Eine Andeutung, wenn auch noch keine consequente Durchführung dieser Ansicht vergl. bei Hager, Fundgr. d. Or. II, 68.

69. Alex. v. Humboldt, Ueber die bei verschiedenen Völkern üblichen Systeme von Zahlzeichen und über den Ursprung des Stellenwerthes in den indischen Zahlen, abgedruckt in Crelle's Journal Bd. IV, S. 205—231. Das hier Angeführte vergl. S. 214.

70. Abel Remusat, Gram. Chinoise p. 49.

71. Aristoteles, Problemata Sectio XV, quaestio 3. edit. Casauboni 1605, Vol. II. p. 578.

72. Humboldt in Crelle's Journal IV, 231.

73. So meldet Paul Hunfalvy vergl. Krist, Ueber Zahlensysteme und deren Geschichte S. 57 (Schulprogramm der ofener Realschule für 1859).

74. Kohl, Reisen in Südrussland Bd. II. S. 216.

75. Klügel, Mathematisches Wörterbuch s. v. Zahlzeichen: Bd. V. S. 1168.

76. Die hier mitgetheilten altchinesischen Zahlzeichen sind Abel Remusat, Gram. Chinoise p. 49 entnommen, mit Ausnahme des Zeichens ling, welches ebenso wie die Zeichen Figur 14 ibid. p. 115 entlehnt sind.

77. Abel Remusat, Gram. Chinoise p. 23.

78. Ed. Biot, Note sur la connoissance que les Chinois on

eue de la valeur de position des chiffres im Journal Asiatique série 3ième, Vol. VIII. Décembre 1839, p. 497—502.

79. Biernatzki in Crelle's Journal, LII, 72.

80. Auch Hager, Fundgr. d. Or. II, 76 schreibt den Chinesen ähnlich wie Biernatzki die Erfindung der Null und überhaupt der Positionsarithmetik zu. Aber er macht niemals Unterschiede zwischen älterer und neuerer Zeit, so dass mit seinem Ausspruche gar Nichts bewiesen ist, als dass die Sinologen gewiss in ihrem Rechte sind, Hagers Autorität sehr niedrig zu stellen, und ihn als unkritisch zu bezeichnen, wie z. B. Schott es thut (bei Ersch & Gruber XVI, 368). Abel Remusat übergeht ihn ganz bei der Aufzählung der Werke über chinesische Literatur und Grammatik. Meine Ansichten stimmen dagegen bis zu einem gewissen Grade mit dem überein, was Martin über die Positionsarithmetik sagt. H. Martin (de Rennes), Origine de notre système de numération écrite in der Revue archéologique année 13ième (1856) p. 509—543 u. 588—609. Diese überaus wichtige Abhandlung soll künftig immer als Martin, Origine citirt werden, die Seitenzahl bezieht sich auf den Separatabdruck. Die hier beigezogene Stelle findet sich S. 53 und heisst: Les Chinois ont emprunté ce système aux Indiens, mais après le V^e siècle. Nur weiss ich nicht, wie er zu diesem Datum kommt. Er citirt allerdings eine Angabe von Reinaud, aber diese sagt selbst nur: Les Chinois se servent depuis longtemps de signes ayant une valeur de position; mais les formes ne sont pas toujours restées les mêmes. Martin scheint daher hier ein irrthümliches Citat zu liefern.

81. Vergl. in Biernatzki's Abhandlung, Crelle's Journal LII, 71.

82. Omnibus ex nihilo ducendis sufficit unum schrieb Leibnitz in einem Briefe an den Herzog Rudolph August von Braunschweig von 1697.

83. Mémoires de l'académie des sciences année 1703 p. 87 flgg.

84. Zeitschr. Math. Phys. V, 338.

85. Wilkinson, Manners and customs of the ancient Egyptians. London 1837. III, 107.

86. Layard, Nineveh and Babylon, London 1853. p. 279.

87. Braun l. c. I, 63.

88. Die Identität des Landes Sinim mit China ist namentlich erwiesen bei Gesenius, thesaurus II, 948. Vergl. auch Knobel, der Prophet Jesaia S. 342.

89. Buddha oder genauer Gautama Buddha d. h. Gautama der

Weise lebte 548—468, Kong-fu-tse 550—477. Vergl. Röth l. c. I, 348.

90. Du Halde l. c. I, 312 und II, 336.

91. Hauptquellen für das Allgemein-Historische und für das Grammatikalische in diesem Capitel waren: Benfey, Artikel Indien in Ersch & Gruber's Encyklopädie Section II, Bd. 17. Reinaud, Mémoire géographique, historique et scientifique sur l'Inde antérieurement au milieu du XIe siècle de l'ère chrétienne in den Mémoires de l'académie de France, Académie des Inscriptions et Belles lettres XVIII, 2. Bopp, Kritische Grammatik der Sanskrita-Sprache in kürzerer Fassung. Berlin 1845.

92. Alex. v. Humboldt in Crelle's Journal IV, 215.

93. Benfey l. c. S. 274.

94. Benfey l. c. S. 248, welchem diese Stelle nahezu wörtlich entnommen ist.

95. Bopp l. c. S. 3.

96. Lassen, Ueber den Gebrauch der Buchstaben zur Bezeichnung der Zahlen bei den indischen Mathematikern in der Zeitschrift für die Kunde des Morgenlandes Bd. II. S. 419—427. Die hier gemeinte Stelle S. 420.

97. Zeitschrift für die Kunde des Morgenlandes Bd. IV. S. 82. Anmerkung.

98. Algebra with arithmetic and mensuration from the Sanscrit of Brahmegupta and Bhascara. Translated by Henry Thomas Colebrooke. London 1817. Introduction pag. XLV.

99. Martin, Origine p. 52.

100. Der Aufsatz von Whish ist überarbeitet von Jacquet in dem Nouveau Journal Asiatique XVI, 5—42 und 97—130. Die hier citirte Stelle S. 118.

101. Benfey l. c. S. 273 nach Asiatic researches IX, 86.

102. Asiatic researches IX, 242.

103. Reinaud, Mémoire sur l'Inde l. c. S. 336.

104. Hunter's und Bentley's Angaben über die Lebenszeit des Brahmegupta vergl. bei Colebrooke in der schon angeführten Introduction.

105. Benfey l. c. S. 264 und Colebrooke in der Introduction liefern die Angaben für die Lebenszeit des zweiten Bhascara-Acharya.

106. Reinaud l. c. S. 324.

107. Reinaud l. c. S. 565.

108. D'Ansse de Villoison, Anecdota Graeca II, 153 Anmerkung: Οἱ τῶν ἀστρονόμων φιλοσοφώτεροι, ἐπεὶ ὁ μὲν ἀριθμὸς ἔχει τὸ ἄπειρον, τοῦ δὲ ἀπείρου γνῶσις οὐκ ἔστιν, ἐφεῦρον σχήματά τινα καὶ μέθοδον δι' αὐτῶν, ὡς ἂν τὰ τῶν ἐν χρήσει ἀριθμῶν εὐσυνοπτότερον κατανοῆται καὶ ἀκριβέστερον· εἰσὶ δὲ τὰ σχήματα ἐννέα μόνα, ἃ καὶ εἰσὶ ταῦτα. (Hier folgen in den Manuscripten die Zeichen Figur 17) τιθέασι δὲ καὶ ἕτερόν τι σχῆμα ὃ καλοῦσι τζίφραν κατ' Ἰνδοὺς σημαῖνον οὐδέν· καὶ τὰ ἐννέα σχήματα καὶ αὐτὰ Ἰνδικά ἐστιν· ἡ δὲ τζίφρα γράφεται οὕτως, o.

109. Brockhaus, Zur Geschichte des indischen Ziffernsystems in der Zeitschrift für die Kunde des Morgenlandes Bd. IV. S. 74—83.

110. Brockhaus l. c. S. 77. Im Widerspruche dagegen setzt Benfey l. c. S. 194 die Haupteinwirkung Indiens auf Ceylon um zwei Jahrhunderte später, indem unter dem buddhistischen Könige Asoka von Indien um 240 v. Ch. Geb. der Buddhismus auch auf Ceylon als Staatsreligion eingeführt wurde.

111. Ich kann diese Behauptung von Brockhaus um so weniger einer Controle unterwerfen, als mir die von Rask angegebenen Zeichen unbekannt geblieben sind, wie ich die ganze Abhandlung des Letzteren nie zu Gesicht bekam.

112. Prinsep's Aufsatz erschien im Journal of Bengal 1838, April p. 348. Vergl. Essays on Indian Antiquities of the late James Prinsep edited with notes and additional matter by Edward Thomas. London 1858. Vol. II. p. 70—84.

113. Ant. Müller, Arithmetik und Algebra, Heidelberg 1833. Die angedeutete Uebereinstimmung soll darin bestehen, dass Hundert, Tausend wesentlich deutsche Klänge und nicht aus fremden Sprachen abgeleitete Namen sind.

114. Mémoire sur la forme et de la provenance des chiffres servant à la numération décimale chez les anciens et les modernes par Mr. Piccard, commissaire général. Séances du 20 Avril et du 4 Mai 1859 de la Société Vaudoise des sciences naturelles. Die hier citirten Stellen S. 176 u. 184.

115. Weidler, De characteribus numerorum vulgaribus dissertatio mathematica-critica, Wittembergae 1727. p. 13 giebt an: Quoad ipsam autem originem primam numerorum Kircherus (in Arithmologia edita Romae 1665, 4°.) fidem habet tum Planudi tum Abenrageli Arabi. Uterque enim Indis inventum adscribit et posterior praeterea in libro

de introductione ad astronomiam de zyphris scribit, hi numeri sunt Indiani, a Brachmanis indiae sapientibus ex figura circuli secti inventi v. l. c. p. 41. Das Werk von Kircher habe ich nicht nachschlagen können, und ebensowenig konnte ich die Originalstelle des Abenragel vergleichen.

116. Chr. Rauch, Elementare Arithmetik für Berg-, Gewerbe- und Fortbildungsschulen. Zweite vermehrte Auflage. Duisburg 1857.

117. Seyffarth l. c. S. 91.

118. Der Worttheiler der Keilschrift war allerdings anfänglich dazu bestimmt, ein neues Wort einzuleiten (Spiegel, die altpersischen Keilschriften S. 145), aber später scheint er diese Bestimmung in ein blosses Interpunktionszeichen abgeändert zu haben und schliesst dann auch Wörter ab. Ob an einen Zusammenhang mit dem Virama zu denken ist?

119. Colebrooke, Algebra etc. p. 4.

120. Abel-Remusat, Melanges posthumes d'histoire et de littérature orientales. Paris 1843. p. 68. Der Herausgeber Felix Lajard hat sich offenbar manche Irrthümer zu Schulden kommen lassen. So heisst es z. B. Le premier est le système inférieur, où les nombres croissent de dix en dix, cent, mille, dix mille etc.; dans ce système les nombres croissent par centaines comme quand on multiplie un lo-cha (laksha, lack, 1000000) par cent pour avoir un kiu-khi (kôti, dix millions). Enfin dans le système supérieur les nombres se multiplient par eux mêmes: c'est ce qu'on nomme la méthode des 10 grands nombres u. s. w. Das Fehlerhafte dieses Abdruckes springt in die Augen, und ebenso leuchtet ein, dass es ungefähr so heissen muss, wie *ich es* übersetze. Dass zudem laksha = 100000 und nicht eine *Million*, ist bekannt genug.

121. Colebrooke l. c. giebt für diese Zahl den Namen parardha.

122. Colebrooke l. c. S. 339. Die Addition, Subtraction und Multiplication der Null wird ganz richtig dargelegt. In Bezug auf Division lautet die Stelle etwas dunkel: Cipher divided by cipher is nought. Positive or negative divided by cipher is a fraction with that for denomination or cipher divided by negative or affirmative. (?)

123. Prinsep, Essais on Ind. ant. (ed. Thomas) II., 83 ist Stevenson in der Note citirt: Our present decimal notation is, as I have noticed elsewhere a comparatively modern invention of the Scindian merchants of the middle age (Jour. Roy. As. Soc. Bombay. Vol. IV.) Diese Originalabhandlung habe ich noch nicht zu Gesicht bekommen.

124. Benfey l. c. S. 102 und S. 107.

125. Ein Vikramaditja lebte um 50 v. Ch. Geb. (Benfey l. c. S. 82), ein anderer etwa 230 n. Ch. Geb. (Benfey l. c. S. 83. Note 48). Beide Angaben beruhen selbst auf Untersuchungen von Lassen. Um so weniger kann man wissen, welcher hier gemeint ist. Ich erinnere übrigens nochmals daran, dass Lassen auch den Arya-Bhaṭṭa viel zu früh setzt.

126. Nouveau Journal Asiatique XVI, p. 12 und 25, Beispiele p. 34—40. Vergl. auch Al. v. Humboldt in Crelle's Journal IV, 212.

127. Humboldt l. c. erklärt souryamanou nach Colebrooke für 1214, aber offenbar mit Unrecht.

128. Nach Reinaud l c. p. 299 hat z. B. Brahmegupta so geschrieben.

129. Röth l. c. II, 297—302.

130. Röth l. c. II, 106—130.

131. Röth l. c. II, 132—160.

132. Röth l. c. II, 303—311.

133. Röth l. c. II, 312—335.

134. Herodot lib. II, cap. 37: *τά τε αἰδοῖα περιτάμνονται καθαριότητος εἵνεκεν, προτιμῶντες καθαροὶ εἶναι ἢ εὐπρεπέστεροι.*

135. Röth l. c II, 336—350.

136. Röth l. c. I, 349 flgg. 375 flgg. II, 343 flgg.

137. Röth l. c. II, 351—355.

138. Röth l. c. II, 391.

139. Jamblichus theilt die Reden ausführlich mit; ihm folgt Röth l. c. II, 425—451.

140. Röth l. c. II, 456.

141. Röth l. c. II, 460—472.

142. Röth l. c II, 934.

143. Röth l. c. II, 943—981.

144. Nesselmann, Algebra d. Griechen S. 2.

145. Proclus, Lib. II. c. VII, p. 42. Elementa igitur nominantur illa quidem quorum consideratio ad aliorum pertransit scientiam, et ex quibus dubiorum, quae in ipsis contingunt succurrit nobis solutio. Dieses Citat sowie alle folgenden lateinischen Citate des Proclus entnehme ich der leider häufig mangelhaften Uebersetzung des Barocius (Patavii 1560), da das Originalwerk mir nicht zu Händen ist. Einige Originalstellen nur konnte ich den schon oft erwähnten

Werken von Röth und Nesselmann entnehmen, die dann jedesmal genannt werden sollen.

146. Heilbronner, Historia matheseos universae a mundo condito ad seculum p. C. n. XVI praecipuorum mathematicorum vitas, dogmata, scripta et manuscripta complexa. Lipsiae 1741. 4⁰. S. 382. Dieses Buch citire ich künftig kurzweg als Heilbronner.

147. Proclus, Lib. II. c. IV, pag. 38. Vergl. Röth l. c. II. Note 878: *Ἐφ᾽ οἷς Ἱπποκράτης ὁ Χῖος ἐγένετο περὶ γεωμετρίαν ἐπιφανεὶς· πρῶτος γὰρ ὁ Ἱπποκράτης τῶν μνημονευομένων καὶ στοιχεῖα συνέγραψε.* Und etwas weiter: *ὥςτε τὸν Λέοντα καὶ τὰ στοιχεῖα συνθεῖναι τῷ τε πλήθει καὶ τῇ χρείᾳ τῶν δεικνυμένων ἐπιμελέστερον. Θεύδιος δὲ ὁ Μάγνης καὶ τὰ στοιχεῖα καλῶς συνέταξε. Ἑρμότιμος δὲ ὁ Κολοφώνιος τῶν στοιχείων πολλὰ ἀνεῦρε.*

148. Röth l. c. II, 588.

149. Proclus, Lib. II. c. IV am Ende, pag. 39 Euclides secta autem Platonicus huicque philosophiae familiaris est.

150. Jamblich, de vita Pythagor.: *Τὸν τῆς διδασκαλίας τρόπον συμβολικὸν ποιεῖν ἐπιχείρει* (ὁ *Πυθάγορας*) *καὶ πάντῃ ὅμοιον τοῖς ἐν Αἰγύπτῳ διδάγμασι καθ᾽ ἃ ἐπαιδεύθη.* Ibid. s. 164: *Ὤοντο δὲ δεῖν κατέχειν καὶ διασώζειν ἐν τῇ μνήμῃ πάντα τά διδασκόμενα καὶ μέχρι τούτου συσκευάζεσθαι τάς τε μαθήσαι καὶ τὰς ἀκροάσεις, μέχρις ὅτου δύναπαι παραδέχεσθαι τὸ μανθάνον καὶ διαμνημονεῦον· ὅτι ἐκεῖνό ἐστιν, ᾧ δεῖ γινώσκειν, τοῦτο δὲ ᾧ τὴν γνώμην φυλάσσειν· ἐτίμων γοῦν σφόδρα τὴν μνήμην καὶ πολλὴν αὐτῆς ἐποιοῦντο γυμνασίαν τε καὶ ἐπιμέλειαν, ἔν γε τῷ μανθάνειν οὐ πρότερον ἀφίεντες τὸ διδασκόμενον, ἕως περιλάβοιεν βεβαίως τὰ ἐπὶ τῆς πρώτης μαθήσεως.*

151. Herodot lib. II. cap. 77: *Αὐτῶν δὲ τῶν Αἰγυπτίων οἱ μὲν περὶ τὴν σπειρομένην Αἴγυπτον οἰκέουσι, μνήμην ἀνθρώπων πάντων ἐπασκέοντες μάλιστα λογιώτατοί εἰσι μακρῷ τῶν ἐγὼ ἐς διάπειραν ἀπικόμην.*

152. Proclus (vergl. Röth l. c. II. Note 830): *Ἐπὶ δὲ τούτοις Πυθαγόρας τὴν περὶ αὐτὴν* (sc. *τὴν γεωμετρίαν*) *φιλοσοφίαν εἰς σχῆμα παιδείας ἐλευθέρου μετέστησεν· ὃς δὴ καὶ τὴν τῶν ἀλόγων πραγματείαν καὶ τὴν τῶν κοσμικῶν σχημάτων σύστασιν ἀνεῦρε.*

153. Ich möchte wenigstens einen Zusammenhang finden zwi-

schen dem pythagorischen Lehrplan und den bekannten Worten *Οὐδεὶς ἀγεωμέτρητος εἰςίτω,* welche über Platos Hörsaal standen. Eben in diesem Sinne fasse ich auch die bekannte Antwort des Xenocrates, welcher einen angehenden Schüler, der noch nicht in der Geometrie bewandert war, fortschickte, indem er zu ihm sagte: *Λαβὰς οὐκ ἔχεις φιλοσοφίας.* Vergl. Vossius, De universae mathesios natura et constitutione liber, cui subjungitur chronologia mathematicorum. Amstelaedami. 1650. 4° Cap. IV, § 5 u. 6. pag. 18. Dieses wichtige Buch, welches von Heilbronner vielfach kritiklos abgeschrieben wurde, citire ich künftig kurzweg als Vossius.

154. Röth l. c. II, 589 und die Noten 678 und 878 b.

155. *ἁρπεδονάπται* Ordo quidem sapientum et sacerdotum in Aegyptis. Cl. Alex. Stromata I. p. 304 = *ἱερογραμμάται* nach Jablonski.

156. Röth l. c. II, 590.

157. Dass Theon ein 5theiliges Werk des angegebenen Inhaltes schreiben will, sagt er selbst am Anfange des ersten Buches in einer Stelle, welche auch für das Verhältniss zu Plato interessant ist: *Ὅτι μὲν οὐχ οἷοντε συνιέναι τῶν μαθηματικῶς λεγομένων παρὰ Πλάτωνι μὴ καὶ αὐτὸν ἠσκημένον ἐν τῇ θεωρίᾳ ταύτῃ, πᾶς ἄν που ὁμολογήσειεν ὡς δὲ οὔτε τὰ ἄλλα ἀνωφελὴς οὐδὲ ἀνόητος ἡ περὶ ταῦτα ἐμπειρία, διὰ πολλῶν αὐτὸς ἐμφανίζειν ἔοικε· τὸ μὲν οὖν συμπάσης γεωμετρίας καὶ συμπάσης μουσικῆς καὶ ἀστρονομίας ἔμπειρον γενόμενον τοῖς Πλάτωνος συγγράμμασιν ἐντυγχάνειν, μακαριστὸν μὲν εἴ τῳ γένοιτο, οὐ μὲν εὔπορον οὐδὲ ῥάδιον ἀλλὰ πανὺ πολλοῦ τοῦ ἐκ παίδων πόνου δεόμενον. Ὥστε καί τοὺς διημαρτηκότας τοῦ ἐν τοῖς μαθήμασιν ἀσκηθῆναι, ὀρεγομένους δὲ τῆς γνώσεως τῶν συγγραμμάτων αὐτοῦ μὴ παντάπασιν ὧν ποθοῦσι διαμαρτεῖν κεφαλαιώδη καὶ σύντομον ποιησόμεθα τῶν ἀναγκαίων, καὶ ὧν δεῖ μάλιστα τοῖς ἐντευξομένοις Πλάτωνι μαθηματικῶν θεωρημάτων παράδοσιν, ἀριθμητικῶν τε καὶ μουσικῶν καὶ γεωμετρικῶν, τῶν τε κατὰ στερεομετρίαν καὶ ἀστρονομίαν, ὧν χωρὶς οὐχ οἷοντε εἶναί φησι τυχεῖν τοῦ ἀρίστου βίου διὰ πολλῶν πανὺ δηλώσας ὡς οὐ χρῆ τῶν μαθημάτων ἀμέλειν.* Noch deutlicher vielleicht ist das 2. Kapitel (ed. Bull. p. 21—23), welches die Reihenfolge angiebt, die ich im Texte beobachte. Theon unterscheidet darnach die *μουσικὴ ἐν ἀριθμοῖς*

von der *μουσικὴ τῶν ἐν κόσμῳ λογῶν*. Diese gehört an das Ende, jene bildet einen Theil der Arithmetik, in welche sie sich nach Kap. 32 einschiebt und Kap. 33—49 bildet. Kap. 50—66 handelt sodann von den Proportionen, oder nach der griechischen Bezeichnung von den Analogien. Kap. 67—70 kehrt zu der musikalischen Anwendung derselben zurück, und behandelt etwas eingehend die berühmte Stelle von der Entstehung der Seele in Platos Timäus. Kap. 71—93 kehrt als Schluss des ersten Buches zu den Zahlen zurück, über deren Symbolik auch einige Andeutungen einfliessen. Martin scheint mir daher im Rechte zu sein, wenn er S. 15—17 seiner Ausgabe der Astronomie (Theonis Smyrnaei Platonici liber de astronomia ed. Martin. Paris 1849) Boulliau tadelt, dass er geglaubt habe, von Kap. 33 an „die Musik“ annehmen zu müssen, und daher eine neue Ueberschrift und neue Numeration der Kapitel von 1—61 gewählt habe. Der Titel *περὶ μουσικῆς* gehe wie alle Manuscripte mit Ausnahme des einzigen, das Boulliau grade benutzte, deutlich zeigen, nur auf das specielle Kapitel 33 ebenso wie der Titel *περὶ ἀριθμητικῆς* nur speciell auf Kap. 2. Boulliau's Irrthum ist um so unbegreiflicher, als grade jenes Kapitel *περὶ μουσικῆς* wiederholt angiebt, die eigentliche Musik, die Harmonie der Welten, solle erst am Schlusse der ganzen Mathematik behandelt werden. Dass De Gelder es missversteht, kann am Ende nicht Wunder nehmen, in Beziehung auf dessen Arbeit ich vollkommen den Ausspruch Nesselmanns (Algeb. d. Gr. S. 225) unterschreibe, er sei der Sache nicht gewachsen gewesen. Wie konnte aber dieser gelehrte Forscher selbst sich irre führen lassen und glauben, das von Bouillau Herausgegebene seien wirklich zwei *Bücher?* Andrerseits muss freilich zugegeben werden, dass es jetzt viel leichter ist, die von Martin angeregte Ueberzeugung zu theilen, als selbst auf den Gedanken zu kommen, wie es sich eigentlich mit der Musik verhalte. Auch der letzte Zweifel daran, dass die Musik der Welten den Schluss des Ganzen bildete, verschwindet, wenn man noch den Epilog der Astronomie (ed. Martin p. 338) vergleicht: *Ταυτὶ μὲν τὰ ἀναγκαιότατα καὶ ἐξ ἀστρολογίας κυριώτατα πρὸς τὴν τῶν Πλατωνικῶν ἀνάγνωσιν. Ἐπεὶ δὲ ἔφαμεν εἶναι μουσικὴν καὶ ἁρμονίαν τὴν μὲν ἐν ὀργάνοις τὴν δὲ ἐν ἀριθμοῖς τὴν δὲ ἐν κόσμῳ καὶ περὶ τῆς ἐν κόσμῳ τἀναγκαῖα πάντα ἑξῆς ἐπηγγειλάμεθα μετὰ τὴν περὶ ἀστρολογίας παράδοσιν· ταύτην γὰρ ἔφη καὶ Πλάτων ἐν τοῖς μαθήμασι πέμπτην εἶναι μετὰ ἀριθμητικήν, γεωμετρίαν, στερεομετρίαν, ἀστονομίαν·. ἃ καὶ περὶ τούτων*

ἐν κεφαλαίοις παραδείκνυσιν ὁ Θράσυλλος σὺν οἷς καὶ αὐτοὶ προεξειργασάμεθα δηλωτέον.

158. Proclus, Lib. II, c. IV, p. 37 . . . dicimus . . . apud Aegyptios geometriam primum inventam fuisse, quae ab agrorum emensione ortum habuit. Haec si quidem illis necessaria fuit propter Nili inundationem convenientes singulis terminos diluentis Quemadmodum ergo apud Phenicas propter mercaturas atque commertia numerorum certa cognitio sumpsit exortium, ita sane apud Aegyptios quoque Geometria ob jam memoratam reperta est causam.

159. Proclus pag. 89, 143, 161, 212.

160. Diogenes Laertius, Thales, cap. 6: *Ὁ δὲ Ἱερώνυμος καὶ ἐκμετρῆσαί φησιν αὐτὸν τὰς πυραμίδας ἐκ τῆς σκιᾶς παρατηρήσαντα ὅτε ἡμῖν ἰσομεγέθεις.*

161. Diogenes Laertius, Thales, cap. 3: *Παρά τε Αἰγυπτίων γεωμετρεῖν μαθόντα, φησὶ Παμφίλη, πρῶτον καταγράψαι ἐπὶ ἡμικυκλίου τὸ τρίγωνον ὀρθογώνιον.* Ueber diese Pamphila meldet Pauly, Real-Encyclopädie. Stuttgart 1848. Bd. V, S. 1094: Pamphila, Tochter des Soteridas, eine gelehrte Egypterin (nach Suidas eine Epidaurierin) aus der Zeit des Nero, welche Alles, was sie in 13jähriger Ehe mit ihrem Manne Sokratidas und im Umgange mit vielen gelehrten Personen von wissenswürdigen Dingen aufgesammelt, ohne Ordnung und Plan in 33 Büchern unter dem Titel *σύμμικτα ἱστορικὰ ὑπομνήματα* zusammenstellte.

162. Proclus pag. 264, 270.

163. Proclus pag. 162, 191 Theonis Smyrnaei Astronomia (ed. Martin) p. 51.

164. Proclus p. 228.

165. Proclus pag. 95, 98, 174.

166. Etudes sur le Timée de Platon par Th. Henri Martin. Paris 1841. 2 Bände. Die Uebersetzung der für uns wesentlichen Stelle vergl. Bd. I. S. 145 flg. Die Erklärung Bd. II. S. 234—250.

167. Theon Smyrnaeus, Arithmetica cap. 1. ed. Bulliald. p. 15: *Οἱ Πυθαγόρικοι δὲ, οἷς πολλαχῇ ἕπεται Πλάτων κ. τ. λ.* Aristoteles, Metaphys. lib. I. cap. 6: *Μετὰ δὲ τὰς εἰρημένας* (sc. *Πυθαγορίκας*) *φιλοσοφίας ἡ Πλάτωνος ἐπεγένετο πραγματεία, τὰ μὲν πολλὰ τούτοις ἀκολουθοῦσα, τὰ δὲ καὶ ἴδια παρὰ τὴν τῶν Ἰταλικῶν ἔχουσα φιλοσοφίαν.*

168. Röth l. c. II, 583.

169. Röth l. c. II. Note 843.

170. Chasles, Geschichte der Geometrie übersetzt von Sohncke. Halle 1839. S. 548: „Kircher spricht in seiner Arithmologie (Th. V de magicis amuletis) in demselben Sinne von dem sternförmigen Fünfeck, welches er pentalpha nennt, weil zwei zusammenstossende Seiten mit einer sie schneidenden den Buchstaben *A* bilden. Er bezeichnet die Scheitelpunkte mit den Buchstaben *υ γ ι ϑ α*." Das französische Originalwerk von Chasles ist in Deutschland überaus viel seltener als die Uebersetzung. Ich werde künftig immer diese letztere meinen, wenn ich Chasles, Gesch. d. Geom. citire.

171. Kästner, Geometrische Abhandlungen, erste Sammlung (der mathem. Anfangsgr. I. Theils III. Abtheilung) Göttingen 1790. S. 334.

172. Porphyr. De vita Pythagor. s. 6 (ed. Kiessling p. 12): *Γεωμετρίας μὲν γὰρ ἐκ παλαιῶν χρόνων ἐπιμεληθῆναι Αἰγυπτίους τὰ δὲ περὶ ἀριθμούς τε καὶ λογισμοὺς Φοίνικας· Χαλδαίους δὲ τὰ περὶ τὸν οὐρανὸν θεωρήματα.*

173. Röth l. c. II, 572 und Note 868.

174. Plato, Phaedrus cap. 59. Wenn Vossius pag. 32 bei Citirung dieser Stelle hinzufügt: Sub verbis *πεττείαν καὶ κυβείαν* neutiquam intelligit ludum cuborum et aleae sed artem calculis et cubis numerandi. Nam is ludus, quem dixi, Palamedis est inventum: ut est apud Sophoclem in Palamede, so thut er damit den beiden Wörtern wohl zu viel Zwang an. Statt dessen hätte er die Instrumentalarithmetik der Egypter viel besser aus der Stelle des Herodot nachweisen können.

175. Thymaridas wird bei Jamblich, De vita Pythagor. Cap. 23 unter den unmittelbaren Schülern des Pythagoras aufgezählt. Unbegreiflich ist daher, was Nesselmann (Algeb. d. Griech. S. 232 flgg.) vermocht hat, dessen Lebenszeit erst in das 2te Jahrhundert n. Ch. Geb. zu setzen. Irgend eine Quelle führt er dafür nicht an. In der Darstellung des Epanthem folge ich Nesselmann, da mir leider weder Nicomachus noch des Jamblichus Commentar zu diesem Schriftsteller zu Gebote steht. Aus demselben Grunde sehe ich mich genöthigt im weiteren Verlaufe dieses Capitels häufig auf Theon von Smyrna zu verweisen, wo höchst wahrscheinlich Nicomachus mir bessere Dienste hätte leisten können

176. Nesselmann, Algebr. d. Griech. S. 236: *Ἀόριστος* die Unbekannte, *Ὡρισμένος* das Gegebene.

177. Proclus p. 23 species namque numeri per sese considerat.

178. Aug. Comte, Philosphie positive I, 134. La théorie des nombres a pour objet de découvrir les propriétés inhérentes aux différents nombres en vertu de leur valeur et indépendamment de toute numération particulière.

179. Aristoteles, Metaphys. Lib. I, cap. V, §. 6. *Ἕτεροι δὲ τῶν αὐτῶν τούτων τὰς ἀρχὰς δέκα λέγουσιν εἶναι τὰς κατὰ συστοιχίαν λεγομένας, πέρας ἄπειρον, περιττὸν ἄρτιον, ἓν πλῆθος, δεξιὸν ἀριστερόν, ἄρρεν θῆλυ, ἠρεμοῦν κινόμενον, εὐθὺ καμπύλον, φῶς σκότος, ἀγαθὸν κακόν, τετράγωνον ἑτερόμηκες.*

180. Nesselmann, Algeb. d. Griech. S. 232.

181. Etudes sur le Timée de Platon par Th. H. Martin, I, 91 und 337—345.

182. Theon Smyrn. Arithmet. cap. 6 (ed. Bull. p. 32): *λέγονται δὲ οἱ αὐτοὶ οὗτοι* (sc. *ἀριθμοὶ πρῶτοι*) *γραμμικοὶ καὶ ἐνθυμετρικοὶ διὰ τὸ καὶ τὰ μήκη καὶ τὰς γραμμὰς κατὰ μίαν διάστασιν θεωρεῖσθαι.*

183. Theon Smyrn. Arithmet. cap. 18. (ed. Bull. p. 47): *Εἰσὶ δὲ τῶν ἀριθμῶν οἱ μὲν ἐπίπεδοι ὅσοι ὑπὸ δύο ἀριθμῶν πολλαπλασιάζονται, οἷον μήκους καὶ πλάτους.*

184. Theon Smyrn. Arithmet. cap. 29 (ed. Bull. p. 65): *Ἔτι τῶν στερεῶν ἀριθμῶν οἱ μὲν ἴσας πλευράς ἔχουσιν, ὡς ἀριθμοὺς τρεῖς ἴσους ἐπ' ἴσους πολλαπλασιάζεσθαι, οἱ δὲ ἀνίσους οἱ μὲν οὖν ἴσας ἔχοντες πλευρὰς ἰσάκις ἴσοι ἰσάκις ὄντεε, κύβοι καλοῦνται.*

185. Röth l. c. II, Note 1196.

186. Zeitschr. Math. Phys. III, 336.

187. J. F. Montucla, Histoire des mathématiques (édit. La Lande) 1799. I, 124.

188. Im Chou-king (s. Anmerkung 67) sind einige Stellen S. 352—354 und S. 315, welche mit Montucla übereinstimmen, aber doch nicht so genau, dass sie ihm als Quelle gedient haben können. Namentlich ist von Vou-vang dort keine Rede.

189. Röth l. c. II, 868—934; die wörtlich angeführte Stelle S. 912.

190. Verhandlungen des naturhistorisch-medizinischen Vereins in Heidelberg Bd. I, S. 164. Sitzung vom 29. November 1858.

191. *σκέλος* = crus = Schenkel.

192. Röth l. c. II, Note 826.

193. Nesselmann, Algeb. d. Griech. S. 151, Note 13.

194. Vitruvius l. c. praef. s. 6. u. 7. Item Pythagoras normam sine artificis fabricationibus inventam ostendit, et quam magno labore fabri normam facientes vix ad verum perducere possunt id rationibus et methodis emendatum ex ejus praeceptis explicatur. Namque si sumantur regulae tres, e quibus una sit pedes tres, altera pedes quatuor, tertia pedes quinque haeque regulae inter se compositae tangant alia aliam suis cacuminibus extremis schema habentes trigoni deformabunt normam emendatam.

195. $1=1$; $1+3=4$; $1+3+5=9$; u. s. w. $1+3+5+..+(2n-1)=n^2$.

196. Theon Smyrn. Arithmet. cap. 15: *Περὶ τετραγώνων ἀριθμῶν* (ed. Bull. p. 41) beginnt mit den Worten: *Τετράγωνοί εἰσι οἱ ἐκ τῶν κατὰ τὸ ἑξῆς περισσῶν ἐπισυντιθεμένων ἀλλήλαις γεννώμενοι.*

197. Theon Smyrn. Arithmet. cap. 30; *Περὶ πυραμοειδῶν ἀριθμῶν* (ed Bull. p. 66).

198. $2=2=1.2$; $2+4=6=2.3$; $2+4+6=12=3.4$; u. s. w. $2+4+6+..+2n=n(n+1)$.

199. Theon Smyrn. Arithmet. cap. 13: *Περὶ ἑτερομηκῶν* (ed. Bull. p. 39) setzt das im Texte Angegebene vollständig auseinander; an einer anderen Stelle (cap. 19 ed. Bull. p. 47) nennt er die 2 ausdrücklich eine heteromeke Zahl: *οἷον ὁ β πρῶτος ἄρτιος καὶ ἐστὶν ἑτερομήκης.*

200. Theon Smyrn. Arithmet. cap. 19 (ed. Bull. p. 50) *ἐκκείσθωσαν γὰρ ἐφεξῆς περισσοὶ καὶ ἄρτιοι α, β, γ, δ... γίνονται κατὰ τὴν τούτων σύνθεσιν οἱ τρίγωνοι.*

201. Theon Smyrn. Arithmet. cap. 19 (ed. Bull. p. 49).

202. Nesselmann, Algeb. d. Griech. S. 204.

203. $n^2+(n+1)^2=(n+2)^2$ ist nur dann möglich, wenn $n=3$ oder $n=-1$. Negative Zahlen waren aber dem Alterthum unbekannt, also fällt für damals die zweite Auflösung weg, und als einzige mögliche erscheint: $3^2+4^2=5^2$.

204. Aristoteles *Ἀναλυτικὰ πρώτερα* lib. I, cap. 23, §. 11 führt an, die Diagonale eines Quadrates sei der Einheit incommensurabel, weil sonst Grades und Ungrades gleich sein müsste. In der That setze man $\sqrt{2}=\frac{\alpha}{\beta}$, wo α und β theilerfremd sein sollen. Nun ist $\alpha^2=2\beta^2$, folglich α grade und β ungrade, folglich $\frac{\alpha}{2}\cdot\alpha$ eine grade

Zahl $= \beta^2$, welches ungrad sein muss. Derselbe Satz mit diesem Beweise ist von Euclid als 117. Satz des 10. Buches aufgenommen, Ramus (Scholae mathematicae, Francofurti ad Moenum 1627, pag. 267) glaubt, grade weil Aristoteles ihn so häufig citire. Liesse aus eben dieser Häufigkeit des Citates bei Aristoteles sich etwa folgern, dass Satz und Beweis altpythagorisch sind?

205. Proclus p. 111.

206. Boethius, Geometria lib. II. (ed. Venet. 1491) fol. 217; (ed. Basil. 1570) p. 1523, die Seitenzahl ist jedoch falsch gedruckt, nämlich 1533.

207. Theon Smyrn. Arithmet. *Περὶ ὁμοίων ἀριθμῶν* cap. 22 (ed. Bull. p. 57) beginnt mit den Worten: *Ὅμοιοι δὲ εἰσὶν ἀριθμοὶ ἐν μὲν ἐπιπέδοις τετράγωνοι οἱ πάντες πᾶσιν.*

208. Röth l. c. II, 527.

209. An historical survey of the astronomy of the ancients by the right hon. Sir George Cornwall Lewis. London 1862. 8⁰. V und 527 Seiten.

210. Joh. Franz, Elementa epigraphices Graecae. Berlin 1840. S. 347.

211. Boeckh, Metrologische Untersuchungen u. s. w. (vergl. Anmerk. 62) S. 295. Die ganze tauromenitanische Inschrift in desselben Verfassers Corpus inscriptionum Graecarum Nro. 5640, Bd. III, S. 629. Berlin 1853.

212. Nesselmann, Algeb. d. Griech. S. 202, Note 43 citirt die Stelle folgendermassen: *Ἰστέον γὰρ ὅτι ὡς τὸ παλαιὸν φυσικώτερον, οἱ πρόσθεν ἐσημαίνοντο τὰς του ἀριθμοῦ ποσότητας ἀναλύοντες εἰς μονάδας, ἀλλ' οὐχ, ὥσπερ οἱ νῦν, συμβολικῶς.*

213. Joseph Krist, Ueber Zahlensysteme und deren Geschichte in dem 4. Jahresbericht der k. k. Ober-Realschule in Ofen S. 32—73. Die hier citirte Stelle S. 36.

214. Franz, Elementa epigraph. Graec. S. 347. Boeckh, Corp. inscript. Graec. Nro. 2919, Bd. II, S. 584. Berlin 1843.

215. Das Herodianische Fragment *περὶ τῶν ἀριθμῶν* ist verschiedentlich abgedruckt, unter Andern in den dem Thesaurus graecae linguae von H. Stephanus beigefügten Glossarien. Vergl. die londoner Ausgabe des Thesaurus Bd. IX, S. 689.

216. Priscianus, De figuris numerorum in der Sammlung: Grammatici latini ex recensione Henrici Keilii Bd. III, 2. S. 403—417 (Leipzig 1860). Das eigentliche Thema behandelt nur S. 406—407, vor-

her findet sich ein Widmungsschreiben an Symmachus (der Aeltere oder der Schwiegervater des Boethius?), nachher Bemerkungen über Gewichte und über die Flexion der Zahlwörter in trostlos pedantischer und langweiliger Darstellung.

217. Vergl. Abhandlung von Kirchhoff in den Monatsberichten der berliner Academie von August 1861, S. 860 flgg. Eine von Franz, Elem. epigr. Graec. S. 154 flg. abgedruckte attische Inschrift scheint von etwa 395 v. Chr. Geb. zu sein. Eine andere Inschrift aus Orchomene (Franz l. c. S. 193 flgg.) stammt vielleicht erst aus dem Jahr 333 oder gar aus noch späterer Zeit.

218. Franz l. c. S. 348: Praeter hunc vetutissimam numerorum consignationem alia ratio in usu quotidiano obtinuit a litterarum in alphabeto serie petita. Haec autem neque ante inventam litteraturam Ionicam increbuisse et mature duplex fuisse videtur. Ferner ibid. S. 24: Antiquissima monumenta, in quibus haec litteratura (sc. Ionica) comparet, tituli sunt Ionici Nro. 45 et 46 quos inter Olymp. 75—80 ponere non dubitavimus.

219. Einige dieser sogenannten σύμβολα ἡλιαστικά vergl. Boeckh, Corp. inscript. Graec. Nro. 207—210, Bd. I, S. 341. Berlin 1828. Dann auch Schoemann, Antiquitates juris publici Graecorum. Gryphiswaldiae 1838. S. 265.

220. Angelo Fumagalli, Delle istituzioni diplomatiche. Milano 1802. 4⁰. Bd. I. S. 171.

221. Röth, Proklamation des Amasis an die Cyprier 1855. Vergl. auch Braun l. c. I, 514.

222. Franz l. c. S. 17.

223. Braun l. c. I, 511.

224. Nesselmann, Algeb. d. Griech. S. 76, Note 18.

225. Franz l. c. S. 15 hat die Beweisstellen gesammelt.

226. Montucla, Histoire des mathématiques I, 46.

227. Ich folge hier Nesselmann, Algeb. d. Griech. S. 74 flgg., wo die entgegenstehenden Annahmen von Böckh (Staatshaushaltung der Athener. Berlin 1817. Th. II. S. 386) nach meiner Ansicht siegreich widerlegt sind.

228. Heilbronner l. c. p. 727.

229. Delambre, Histoire de l'astronomie ancienne I, 298.

230. Heilbronner l. c. p. 730. Bartholomaei, Zehn Vorlesungen über Philosophie der Mathematik. Jena 1860. 8⁰. S. 169. Seit den Untersuchungen von Fritzsche (Annalen der gesammten theologi-

schen Literatur I, 3, 1, 1831 S. 42—69) und den damit übereinstimmenden, aber von ihnen wie unter sich wohl unabhängigen Arbeiten von Benary, Hitzig u. A. sind jedoch, nach Mittheilungen, die mir Prof. Holtzmann machte, die Theologen zu der Ansicht gelangt, als beziehe sich die Zahl 666 mit aller Bestimmtheit auf den Kaiser Nero, den man als noch lebend annahm. Man setzt in Verfolgung dieser Hypothese den Namen jetzt aus hebräischen Buchstaben zusammen, נֵרוֹן קֵסַר, die, wie im 18. Kapitel gezeigt werden wird, gleichfalls Zahlenbedeutung haben.

231. Sagt doch Reuchlin, De arte cabbalistica: Jam clare video Cabbalistarum et Pythagoristarum inter se cuncta ejusdem esse farinae.

232. Ich erinnere an das bekannte Vae papa vae tibi des Michael Stifel und an seine Prophezeiung des Weltuntergangs für das Jahr 1533. Vergl. Zeitschr. Math. Phys. II, 364.

233. Franz l. c. p. 350 giebt Beispiele auch der umgekehrten Reihenfolge an, aber nur in Inschriften sicilischen und thracischen Ursprungs. Boeckh, Index lectionum quae auspiciis regis august. Frid. Guil. IV in universitate litteraria Friderica Guilelma per semestre aestivum MDCCCXLI instituentur pag. V dehnt die Beispiele auch auf Asien aus, sowie auf einzelne attische Ueberreste.

234. Heilbronner l. c. p. 728 Anmerkung 1.

235. Nesselmann, Algeb. d. Griech. S. 79.

236. Delambre l. c. I, 190—212; II, 6.

237. *Μαθηματικαὶ συναγωγαί.* Vergl. für die uns interessirenden Stellen Wallis, Opera mathematica. Oxoniae 1699. fol. Bd. III, S. 597—614, insbesondere Satz XXIII (S. 604), wo 18000 geschrieben ist: *μυριάδες ᾱ μονάδες η̄.*

238. Diophant IV, 29: $\varrho\nu \,.\, {}_1\zeta$ ⅄ $\pi\delta = 1507984$; ferner V, 11: ${}_1\alpha$ ⅄ ╘ $\alpha \,.\, {}_1\varepsilon\sigma\iota\delta = 19915214$ und häufiger.

239. Heilbronner l. c. p. 728.

240. Nesselmann, Algeb. d. Griech. S. 81, Note 24.

241. limites, ὅροι. Das letztere Wort kömmt auch bei Archimed vor.

242. Georg Henischius, De numeratione, Augustae Vindelicorum 1605 ist der vollständige Titel dieser Schrift, die ich aber nicht zu Gesicht bekommen habe.

243. Humboldt bei Crelle IV, 224 citirt dabei Ducange, Palaeogr. p. XII, welches ich aber nicht nachschlagen konnte.

244. Delambre, Hist. de l'astron. anc. Paris 1817. I, 547:

Nous avons vu dans Planude que le zero s'appelle plus ordinairement le rien. On trouve aussi ce mot dans Theon. Damit meint D. bei Planudes wechseln die Wörter τζίφρα und οὐδέν, letzteres sei das Häufigere. Die andere Stelle, welche im Texte angeführt ist, steht ibid. II, 14—15.

245. Zeitschr. Math. Phys. I, 67.

246. Nesselmann, Algeb. d. Griech. S. 138, Note 25.

247. B. G. Niebuhr, M. Tullii Ciceronis Orationum pro M. Fontejo et pro C. Rabirio fragmenta, T. Livii lib. XCI fragmentum etc. Romae 1820. pag. 16—17: Illud autem nullo modo praetermittam tribus in locis ubi pondera indicantur conspectas esse notas numerorum quas indicas sive arabicas dicere consuevimus: et ita plane formatas quales antiquitus apud Indos et nunc apud universas Europae gentes scribuntur, non ea figura, quam, ab Arabis acceptam in Graecis mathematici argumenti codicibus decimi quarti saeculi interdum conspicimus. Illis certe locis numeri 10, 100, 14 perspicue apparent, quorum imaginem, propter rei novitatem, in tabula expressi. Atque ut testem haberem locupletem me vana specie deceptum haud fuisse, advocavi Johannem Playfair V. Cl., professorem Edinensem, qui forte in urbe aderat isque me recte vidisse protinus agnovit.

248. Abschrift des Briefes des Herrn Professor Spezi an den Prinzen B. Boncompagni vom 23. Juni 1862: Eccelenza, Perche potessi io meglio corrispondere a' gentilissimi desiderj, che mi ebbe ieri manifestato l'E. V. con la sua lettera portami dal signor Narducci; mi sono recato nuovamente stamane alla bibliotheca Vaticana, ed ho voluto con più di studio e diligenza esaminare il codice latino *palatino* 24 nelle due pagine 41 e 42. Primieramente mi conviene dire, che i miei studj ed esami sono stati volti unicamente nelle due pagine predette di quel codice palatino. Il quale è un palimpsesto greco del settimo secolo; e sopra l'antica scrittura greca egli contiene il libro di Giuditta secondo la volgata latina: e cotesta scrittura latina è del secolo nono. Le pagine del codice son molto nere, perchè certamente il Mai le ha toccate con gli acidi per meglio leggere la sottoposta scrittura greca. La pagina 41 comincia dalle parole del versetto settimo del capitolo quarto del libro di Giuditta = filii Israel secundum quod constituerat eis sacerdos domini Heliacim... Ma l'antica scrittura greca è da leggere nella parte contraria alla nuova latina sovrapposta. Ora nella pagine 41 e 42 verso e nelle prime linee del palimpsesto si leggono molto chiaramente alcune

parole greche siccome le ha lette e pubblicate il Niebuhr; ma io non vi ho potuto leggere, ne vedere i numeri arabi 10, 100, 14 non solo nelle prime, ma nemmeno nelle altre linee delle due pagine suddette. Pertanto io stimo di non errare dicendo, che il Niebuhr abbia qui dato in fallo, avendo egli prese e spiegate alcune abbreviature greche come numeri arabi. Aprirò meglio la mia opinione. Nella pagine 41 verso del codice palatino 24 si leggono queste parole greche (pag. 41 verso linea 1) *KHPOY* (di cera) *Γος* *MICIOC* (di succo) e non altro perche le pagine del palimpsesto furono tagliate. Dipoi si leggono queste parole nella linea seconda di essa pagine 41 verso *ΚολοΦωΝIΑC* (di colofonia, pece, o resina) *Γος CTYΠTHPIAC* (die allume, solfato di potassa) — nella linea 3 *CTEATOCXYPIOY* (di sevo o grasso porcino) *IOY* (di viola). Nella pag. 42 verso linea 1 *KACTOPIOY* (del castorio) *ΓοᾹ*; linea 2 *MANNHC* (di manna) *Γος̄*: nella linea 3 si legge *AMMωNIAKOY* (di sale ammoniaco) *Θ Ιος̄*. Cotesti abbreviamenti greci *Γος̄* ovvero *ΓοᾹ* e *ιος̄* si leggono anche nelle altre linee delle due pagine; come nella pagina 42 verso linea 11 *ΓοᾹ*, nella linea 12 *ΓοᾹ*, nella linea 13 *ΓοᾹ*. I quali segni greci abbreviati debbono avere indotto in errore il Niebuhr, che li lesse e interpretò per numeri arabi. Il palimpsesto greco dee continere cose e materie di medicina e propriamente composizioni di farmachi o medicamenti e vi è notata la quantità di succhi e di erbe ed altro per formarli. A cagione di esempio nella pagine 41 verso linea 1 si legge *KHPOY Γος̄* „di cera *Γος*“ che io interpreterei *γιγνεται ογδοα ς̄* cioè formansi (sono) ottave sei; nella linea 2 *ΚΟλΟΦΟΝΙΑC Γος* di colofonia sono ottave sei e via discorrendo. Nella pagine 42 verso lin. 1 *KACTOPIOY ΓοᾹ* del castorio e ottava una. Nella linea 3 di essa pagine *AMMωNIA-KOY Θ ιος̄* qui la *Γ* è mal conservata come la ς̄, perche qui leggo *Γος̄* cioè di sale ammoniaco sono ottave sei. Questa mia interpretazione dell' abbreviatura greca *Γος̄* ovvero *ΓοᾹ* e *|οᾹ*, io la do come un opinione mia, meritando quella greca abbreviazione uno studio maggiore e forse una migliore interpretazione. M a p o s s o a f f i r m a r e c o n o g n i v e r i t a, c h e q u e l l e p a r o l e g r e c h e a b b r e v i a t e n o n p o s s o n o m u t a r s i i n n u m e r i a r a b i. Questa mattina ho mostrasto il codice a due alemanni e valentissimi grecisti e professori, l'uno in Berlino e l'altro in Padova: ed ho loro esposta la mia interpretazione suddetta, nonchè l'opinione del Niebuhr. Tutti e due i professori (e specialmente il Müller, di cui non conosco un al-

tro più valente conoscitore e leggitore di greci codici) non hanno rigettata la mia interpretazione della parola abbreviata *Γος*, *ΓοΔ*: come hanno rigettata l'opinione del Niebuhr: e stimano anch' essi lui aver dato in fallo allorche lesse i numeri arabi 10, 100, 14 in luogo delle abbreviate parole greche. Poichè se la mia interpretazione della greca sigla ovvero abbreviatura può ricevere un altra e forse migliore interpretazione egli è certo nondimeno che quei numeri arabi del Niebuhr sono veramente parole greche abbreviate e qui non ci ha dubbio nessuno. La onde stimo che tanto il Niebuhr quanto il prof. Playfair da lui citato e mal vedessero e mal leggessero i numeri arabi. Il che forma il vero ed unico argumento della lettera e dei quesiti di V. E. e della presente mia risposta. Spero di avere soddiffatto interamente a voleri e desideri umanissimi di V. E. e mi dichiaro col più profondo rispetto di V. E. etc.

249. Corp. Inscr. Graec. P. II, cl. II. Urkunden über das Seewesen des attischen Staates p. 547 flgg. und Einkünfte des Tempels auf Delos in den Memoiren der berliner Academie für 1834.

250. Vergl. Z. 2, IV; Z. 6, II, III; Z. 12, IV, V.

251. Die sogen. Malberg'sche Glosse zur lex Salica schreibt tue septun chunna (2 . 7 . 100) für 1400; tue nene chunna (2 . 9 . 100) für 1800; ebendieselbe drückt 24000 durch 3000 + (3 . 7 . 1000) aus und 32000 durch 4000 + (4 . 7 . 1000), wobei nach Grimm die Siebenzahl beliebt zu sein scheint. Vergl. Lex Salica herausgegeben von Johann Merkel mit einer Vorrede von Jac. Grimm. Berlin 1850. Vorrede S. XVI.

252. Nesselmann, Algebr. d. Griech. S. 95 flgg.

253. Hager giebt in der mailänder Ausgabe seiner oft citirten Abhandlung (vergl. Anmerkung 63) die Nachricht, die Rechenmaschine sei in Russland durch die Familie Stroganoff eingeführt worden. Ob damit etwa der Stroganoff gemeint ist, der am Hofe Peter d. G. wegen der Unterjochung asiatischer Stämme von Einfluss war? Hager's Quelle ist: Anecdotes et recueils des coutumes et de traités particuliers à la Russie par un voyageur qui y a séjourné 13 ans. Londres 1792. Tom. I.

254. Chasles in den Compt. rend. de l'académie vom 26. Juni 1843: XVI, 1409.

255. Jul. Klaproth, Asiatisches Magazin (Weimar 1802) II, 78: Bei ihren Gebeten bedienen sich die Ho-shang oder Priester des Fo einer Art von Rosenkranz, den sie am Halse hängen haben; eine Sitte,

die seit langer Zeit über ganz Mittelasien verbreitet, und von da aus in die katholische Kirche übergegangen ist. Humboldt bei Crelle, IV, 206 macht in der Note darauf aufmerksam, dass der Rosenkranz russisch tschotki heisst, also dem Namen der Rechenmaschine nahe verwandt ist.

256. Nesselmann, Algeb. d. Griech. S. 107.

257. Eine Abbildung des chinesischen Suanpan bei Duhalde (s. Anmerkung 67) III, 350.

258. Revue archéologique, année III. Rangabé S. 295—304 (die Abbildung S. 296). Letronne S. 305—308. Vincent S. 401—405.

259. *ἀριθμομαχία.*

260. Humboldt bei Crelle IV, 217 in der Note.

261. Damit scheint sich auch Floquet, Histoire du parlement de Normandie beschäftigt zu haben.

262. Nouvelle Revue encyclopédique publiée par Mrs. Firmin Didot frères Nro. 1. S. 97 (Paris 1846). Der Aufsatz, dem ich die Stelle entnehme, ist eine von S. 95—102 abgedruckte, anonyme Recension von den Grands rôles des échiquiers de Normandie publiés par Lechaudé d'Anisy, Paris 1845 (t. 5. sér. II der Mémoires de la société des antiquaires de la Normandie).

263. Ich verdanke diese Notiz brieflicher Mittheilung des Herrn Dr. Jul. Faucher, welcher sie selbst aus einer sehr seltenen Brochüre: Thomas, On the exchequer schöpfte, die um 1774 etwa erschien und auf der berliner Bibliothek sich vorfindet. Demselben Briefe entnehme ich, dass Prof. Gneist gleichfalls die richtige Bedeutung des Wortes exchequer aus einer alten Abhandlung des 12. Jahrhunderts de scaccario im englischen Staatsarchive entdeckte und in sein Werk über das englische Staatsrecht aufgenommen hat.

264. Rees, The Cyclopaedia Vol. 35 fol. H (London 1819) s. v. Tally (taile or tailie), a piece of wood, on which retail traders use to score or mark by notches or incisions the several quantities of goods, they deliver out on credit, to save the trouble of writing down somany little articles in books. Each score consists of two pieces of wood, or rather of a single piece cleft length-wise, the partsof which falling in with one another, things delivered are scored on both at the same time; the seller keeping one and the buyer the other. Tallies are taken as evidences in courts of justice as much as books. The ancient way of keeping all accounts was by tallies; the

debtor keeping one part and the creditor the other. Hence the t a l-l i e r of the exchequer, now called the t e l l e r.

265. Auch diese Notiz verdanke ich brieflicher Mittheilung von Dr. Faucher.

266. Auf diese Analogie hat Vincent, Revue archéologique III, 402 aufmerksam gemacht.

267. Rangabé, Revue archéologique III, 300.

268. Molinet, Le cabinet de Sainte-Geneviève p. 23 wird dafür von Vincent citirt.

269. Zeichnung und Beschreibung mit den Worten des Marcus Welser findet sich in dem 1616 von Gruter herausgegebenen Inscriptionum Romanarum corpus absolutissimum, deutsch in Klügels mathematischem Wörterbuche Bd. II, S. 736 s. v. Instrumentale Arithmetik.

270. Die beiden Rechenmaschinen des Welser und des Ursinus sind abgebildet bei Pignorius. De servis, Amsterdam 1674 p. 338—342. Ob das Citat von Vincent: Pignor. de serv. p. 165 sich auf eine andere Ausgabe bezieht, oder Irrthum ist, kann ich nicht entscheiden.

271. Klügel macht hier einen groben Fehler, indem er Unzen und Assen gradezu vertauscht.

272. Vincent, Rev. archéol. III, 404.

273. Nesselmann, Algeb. d. Griech. S. 107, Note 5 giebt die Ableitung des Wortes *ἄβαξ*, abacus von אבק an. Ebendieselbe findet sich in einem Aufsatze von Vincent (in Liouville's Journal des Mathématiques IV, 275 Note), der sie Etienne Guichart, Harmonie des *langues* zuschreibt.

274. Humboldt bei Crelle IV, 216 in der Note nennt diese Kunst raml und verweist dafür auf Richardson & Wilkins Diction. Persian and Arabic. 1806. T. 1, p. 482.

275. Diese Ableitung des Wortes Staubbrett hält auch Friedlein, Gerbert die Geometrie des Boethius und die indischen Ziffern (Erlangen 1861) S. 49 für die richtige.

276. Polybius V, 26, 13: *Ὄντως γάρ εἰσιν οὗτοι παραπλήσιοι ταῖς ἐπὶ τῶν ἀβακίων ψήφοις. Ἐκεῖναί τε γὰρ κατὰ τὴν τοῦ ψηφίζοντος βούλησιν ἄρτι χαλκοῦν καὶ παραυτίκα τάλαντα ἴσχουσιν· οἵ τε περὶ τὰς αὐλὰς κατὰ τὸ τοῦ βασιλέως νεῦμα μακάριοι, καὶ παρὰ πόδας ἐλεεινοὶ γίγνονται.*

277. Diogenes Laertius I, 59.

278. Kritische Zeitschrift für Chemie, Physik und Mathematik 1858. S. 479. Die Stelle selbst heisst Jamblichus, De vita Pythagorica Cap. V, §. 22: εἰς τὴν δι᾿ ἀριθμῶν μάθησιν καὶ γεωμετρίας ἐνάγειν αὐτὸν ἐπειρᾶτο, ἐπ᾿ ἄβακος τὰς ἑκάστου ἀποδείξεις ποιούμενος.

279. Darauf bezieht sich vielleicht Horaz Satyr. I, 6, 74: Laevo suspensi loculos tabulamque lacerto, indem loculos die Kästchen mit Rechenpfennigen andeuten soll.

280. Vergl. Persius Satyr. 1, 132: Nec qui abaco numeros et secto in pulvere metas scit.

281. Friedlein l. c. S. 5 in der Note.

282. C. A. Boettiger, kleine Schriften archäologischen und antiquarischen Inhaltes Bd. III, S. 9—13. (Dresden und Leipzig 1838) Diese Abhandlung lernte ich durch ein Citat von Friedlein l. c. S. 5. in der Note kennen. Friedlein bemerkt auch l. c. S. 9, dass bei Bekker, Charikles I, S. 50—51 ziemlich viele Stellen gesammelt seien, welche beweisen, dass Römer und Griechen einen Abacus hatten. Da diese Stellen über die Lage des Abacus Nichts enthalten, die Existenz des Abacus aber hinlänglich gesichert ist, so begnüge ich mich damit auf jene Zusammenstellung zu verweisen.

283. G. W. Panzer, Annales typographici VII, 58 (Norimbergae 1799): (Gregorii Reisch) Margarita Philosophica. Tabula ligno incisa varias figuras v. g. septem Musas etc. repraesentans. Haec in fronte Fol. 1. a. Post indicem contentorum sequitur carmen hac praemissa inscriptione: „Suo Gregorio Reisch generosi Comitis de Zolrn alumno: Adam Vuenherus Temarensis Salutem P. D.“ In fine: „Epigramma Pauli Volzii ad rev. patrem Georgium Reisch domus Carthusiane prope Friburgum Priorem meritissimum.“ Tandem Chalcographatum primiciali hac pressura, Friburgi per Joannem Schottum Argent. circa festum Margarethae anno gratiae M.ccccc.iii Insignae typogr. cum figg. lign. incis. 4. Diese Stelle beweist, wie Drobisch in einem Programme: Ad historiam literariam arithmeticae communis symbolae p. 15 in der Note (Leipzig, März 1840) richtig bemerkt, dass die Marg. philos. nicht 1496 oder gar schon 1486 erschien, wie Chasles und Andere glauben, sondern im ersten Druck 1503.

284. Ich bediene mich einer strassburger Ausgabe mindestens von 1512 nach den Schlussworten des eigentlichen Werkes. Keinenfalls war es jedoch dieselbe Ausgabe, welche Kästner in seiner Geschichte der Mathematik II, 661—670 ziemlich ausführlich beschrie-

ben hat, da auf dem Titelblatte weder Ort noch Zeit angegeben ist, und ausserdem noch verschiedene Anhänge hinzugefügt sind, welche Kästner nicht erwähnt.

285. Compt. rend. de l'académie vom 24. Juli 1843, XVII, 152.

286. Eine fleissige Abhandlung über Adam Riese hat Herr Bruno Berlet im 12. Berichte über die Progymnasial- und Realschulanstalt zu Annaberg 1855 veröffentlicht. Riese lebte darnach 1492—1559 meistens in Annaberg, wo er aber nicht geboren sein kann, weil die Stadt erst 1496 gegründet ward. Sein Rechenbuch scheint zuerst 1535 gedruckt. Einige Ausgaben desselben beschreibt auch Kästner, Geschichte der Mathematik I, 108—112. Dieser Beschreibung S. 109 entnehme ich das im Texte folgende Citat.

287. Tennulius schreibt im Jahre 1667 (Notae in Jamblichum p. 100 fin.): Sic etiam hodie calculum ridicule ponunt docti viri et post inventas fruges glandibus vescuntur. Dieses Citat entnehme ich Friedlein l. c. S. 60.

288. A. D. Mordtmann, Die Amazonen S. 80 (Hannover 1862): Ob ihr Heer (der Amazonen) grade aus 40 Personen bestand, wage ich nicht zu behaupten, da 40 im Türkischen eine unbestimmte Zahl ist.

289. Pott, Etymologische Forschungen auf dem Gebiete der indogermanischen Sprachen II, 221 (Lemgo 1836): Man könnte darauf rathen, dass es Stufenzahl eines anderen Zahlensystems als das decadische gewesen; das lässt die Arithmetik nicht zu: vielleicht liegt der Grund in irgend einer ominösen Beziehung des sex.

290. Vergl. meine Anzeige von J. Krist, über Zahlensysteme und deren Geschichte in der Zeitschr. Math. Phys. Bd. V, Literaturzeitung S. 50. Dann noch Sachse, Historische Grundlagen des deutschen Staats- und Rechtslebens. Heidelberg 1844. S. 217 flgg. und Bartholomäi, Zehn Vorlesungen über Philosophie der Mathematik. Jena 1860. S. 167. Letzerer citirt auch Cramer in Langbein's pädagogischem Archiv I, 273—290, welches ich aber nicht selbst verglichen habe.

291. Reinaud l. c. (vergl. Anmerkung 91) S. 303: Les Arabes n'ont que quatre nombres l'unité, la dixaine, la centaine et le mille; quand ils sont arrivés à mille ils recommencent et ils disent dix mille, cent mille et mille mille.

292. Paravey l. c. (vergl. Anmerkung 67) S. 111.

293. Im 27. Satze des angeführten Buches des Pappus ist 5601052800000 ausgedrückt durch *Mγ.* $\overline{ε}$ *καὶ Mβ.* $\overline{͵ϛι}$ *καὶ*

$\overline{M\alpha.\,{}_{\iota}\varepsilon\sigma\pi}$. Vergl. Wallis III, 608 Z. 39 und Nesselmann, Alg. d. Griech. S. 127.

294. Chasles, Gesch. d. Geom. S. 544.

295. Archimedes von Syrakus vorhandene Werke übersetzt von Nizze. Stralsund 1824. S. 217 (§. 8. der Sandrechnung): Nun besitzen wir die Namen der Zahlen bis 10000 durch Ueberlieferung.

296. Libri, Histoire des sciences mathématiques en Italie II, 295 (Paris 1838) Archimède a écrit, comme on sait, un traité intitulé l'Arénaire, qui n'a d'autre but, que de simplifier la numération des Grecs. Dagegen Chasles, Eclaircissement sur le traité „de numero arenae" par Archimède in den Compt. rend. de l'académie vom 11. April 1842. XIV, 547: Le but d'Archimède était de détruire une opinion erronée, savoir que le nombre des grains de sable de la terre était infini, ou du moins, qu'on ne pouvait assigner un nombre plus grand.

297. Archimed-Nizze S. 209.

298. Archimed-Nizze S. 212: unter den in den Grundzügen benannten Zahlen. Der Auszug aus den Grundzügen ibid. S. 217. Der griechische Name jener Schrift heisst *ἀρχαί*.

299. Die Beispiele sind die beiden Verse: *Ἀρτέμιδος κλεῖτε κράτος ἔξοχον ἐννέα κοῦραι* und *Μῆνιν ἄειδε θεὰ Δημήτερος ἀγλαοκάρπου.*

300. Archimed-Nizze S. 278—280. Das dritte Beispiel heisst 265 mal 265 und sieht so aus:

$$\begin{array}{llllll}
\sigma & \xi & \varepsilon & & & \\
\sigma & \xi & \varepsilon & & & \\
\hline
\overset{\delta}{M} & \overset{\alpha}{M} & {}_{\iota}\beta & {}_{\iota}\alpha & & \\
\overset{\alpha}{M} & {}_{\iota}\beta & {}_{\iota}\gamma & \chi & \tau & \\
{}_{\iota}\alpha & \tau & \varkappa & \varepsilon & & \\
\hline
\overset{\zeta}{M} & \sigma & \varkappa & \varepsilon & &
\end{array}$$

301. Vossius p. 179 führt die Grabschrift an

M Christi bis C quarto deno quater anno
De Sacrobosco discrevit tempora ramus
Gratia cui nomen dederat divina Joannes.

Heilbronner p. 471 hat offenbar den Vossius nur abgeschrieben.

302. Als Quelle für das Folgende diente der Osterprogramm 1840 von Drobisch S. 8—10 (vergl. Anmerkung 283).

303. Der Titel der Venetianer Ausgabe heisst Algorismus domini Joannis de Sacrobosco, der der pariser Ausgabe Opusculum de praxi numerorum quod algorismum vocant.

304. Chasles, Gesch. d. Geom. S. 662.

305. Chasles in den Compt. rend. de l'académie vom 26. Juni 1843. XVI, 1402.

306. Gemma Frisius geb. 1508 zu Dockum, 1541 Prof. d. Medicin in Löwen, wo er 1555 starb. Seine Methodus Arithmeticae practicae erschien zuerst 1540 in Antwerpen.

307. Petrus Ramus, Arithmeticae libri duo, Geometriae septem et viginti Basel 1569, sowie auch die von Laz. Schoner besorgte Ausgabe Frankfurt 1592, die von der vorigen vielfach verschieden ist.

308. Es ist somit, beiläufig bemerkt, irrig, wenn Terquem (Nouv. annales de mathém. 1856 Bulletin de bibliogr. p. 71) die Erfindung dreiziffriger Zahlenabschnitte einem Italiener des 14. Jahrhunderts, dem Dagomar Paolo dell'abaco zuschreibt.

309. Das 11 drähtige Exemplar eines echt-chinesischen Suanpans findet sich in der ethnographischen Sammlung des Missionshauses in Basel.

310. Nouv. Annales de mathém. XVI (année 1857) Bulletin de bibliogr. p. 1.

311. *δυοῖν δέοντες ἑξήκοντα* = 58. *ἑνὸς δέοντος πεντήκοντα* = 49.

312. Bopp, Kritische Grammatik der Sanskritsprache in kürzerer Fassung. Berlin 1849. S. 125.

313. sesquialter = *ἐπιδεύτερος* = anderthalb; sesquitertius = *ἐπίτριτος* = $1\frac{1}{3}$; sesquioctavus = *ἐπόγδοος* = $1\frac{1}{8}$.

314. Nouveau Journal Asiatique XVI, p. 7 in der Note.

315. G. E. Lessing Sämmtliche Werke. Carlsruhe 1824. Bd. 21, S. 136 flgg. (Kollektaneen u. s. w. s. v. Cornelius Nepos).

316. So schreibt z. B. Cicero an Atticus (Lib. I, epist. 7 edit. Orelli Gesammtwerke Bd. 3, Th. 2. S. 8) L. Cincio HS XXCD constitui me curaturum und in dem darauf folgenden sich offenbar auf dieselbe Summe beziehenden Briefe C. Cincio HS ccIↄↄ ccIↄↄ cccc pro signis Megaricis ut tu ad me scripseras curavi. Die Summe ist also 20400 und wird im ersten Briefe rund zu 20000 angegeben, indem CD offenbar in CIↄ d. h. in das Zeichen für 1000 zu corrigiren ist, welchem 20 multiplicativ vorhergeht.

317. Vergl. Valerius Probus, De notis Romanis.

318. Die sonst sehr vollständige neue Auflage der Biographie universelle kennt Mathaeus Hostus nicht einmal bei Namen. Das über seine Lebensumstände hier Mitgetheilte stammt aus Ersch & Gruber's Encyclopädie, in welcher H. Baur den Artikel Hostus bearbeitete. Doch fehlt auch bei ihm der Titel der uns interessirenden Schrift: De numeratione emendata veteribus Latinis et Graecis usitata Mathaeo Hosto auctore, Antverpiae ex officina Christophori Plautini 1582.

319. P. Rami, Scholarum mathematicarum libri unus et triginta. Basel 1569. 4⁰. S. 117. Ueber das Leben des Ramus vergl. Zeitschr. Math. Phys. II, 353 flgg. und III, 133 flgg.

320. Ottfried Müller, die Etrusker. Breslau 1828. Bd. 2, S. 312.

321. Theodor Mommsen, die unteritalischen Dialekte. Leipzig 1850. S. 26.

322. Mommsen l. c. S. 34.

323. Mommsen l. c. S. 19 und 33 flgg. Müller, die Etrusker II, 317—320 und Tafel IV, 1—5.

324. Müller l. c. S. 320.

325. Zeitschr. Math. Phys. III, 330.

326. Mommsen l. c. S. 30.

327. Ich benutzte die Ausgabe: C. Plinii Secundi naturalis historiae libros XXXVII recensuit et commentariis criticis indicibusque instruxit Julius Sillig in 5 Bänden. Hamburg und Gotha 1851. Die einzelnen citirten Stellen sind im ersten Bande dieser Ausgabe lib. 6 c. 17 §. 62 (S. 425 Z. 13); lib. 6 c. 20 §. 72 (S. 429 Z. 2); lib. 6 c. 24 §. 108 (S. 441 Z. 2 v. u.); lib. 6 c. 33 (S. 474 Z. 15 und S. 475 Z. 1 und 2). Dann im fünften Bande lib. 33 c. 3 §. 55 (S. 84 Z. 14).

328. Gosselin, Géographie des Grecs analysée. Paris 1790. S. 112.

329. Gu. Budaei de asse partibus ejus libri quinque. Paris 1516 und mit dieser Ausgabe Seite für Seite übereinstimmend Paris 1524. Die hier citirte Stelle findet sich im 2. Buche fol. XLI recto.

330. Hostus l. c. S. 19. Heilbronner l. c. S. 734 Anmerk. s. Nesselmann, Algeb. d. Griech. S. 91.

331. Margaritha philosophica, Liber 4, Tractatus 2, cap. 4: In prima figura incipientes dicamus ordine retrogrado: prima per se,

secunda decem, tertia centum, quarta millesies; sic de aliis super boca millenaria etc. signando punctis ut $\dot{4}593\dot{6}2\dot{9}022$.

332. Compt. rend. de l'académie vom 3. Januar 1842. XIV, 43.

333. Martin, Origine etc. p. 47 Note 176.

334. Veterum Mathematicorum Opera. Paris 1693. pag. 315: *πρὸς τούτοις καί τι τολμῶσι Ῥωμαῖοι· ἐμοὶ δὲ καὶ λίαν θαυμαζόμενον πάντα ὅσα καὶ βούλονται διὰ πυρσῶν γράφοντες· ποιοῦσι δὲ ὧδε. ἀφορίζουσι τοὺς τόπους οἳ ἐπιτηδείως ἔχουσιν εἰς τὴν τῶν πυρσῶν χρείαν τὸν μὲν δεξιὸν τὸν δὲ εὐώνυμον τὸν δὲ μεταξὺ τάττοντες. διαιροῦσι δὲ τούτοις τὰ στοιχεῖα, τὰ μὲν ἀπὸ τοῦ ἑνὸς μέχρι τοῦ $\bar{\vartheta}$ ἀφορίζοντες τῷ ἀριστερῷ μέρει. τὰ δὲ ἀπὸ τοῦ $\bar{\alpha}$*) μέχρι τοῦ $\bar{\pi}$**) τῷ μέσῳ· τὰ δε ἀπὸ τοῦ $\bar{\varrho}$ μέχρι του $\bar{\pi}$***) τῷ δεξιῷ. ὅταν δὲ τὸ $\bar{\alpha}$ βουληθῶσι σημάναι ἅπαξ ἀνάπτουσι τὸν πυρσὸν κατὰ τὸ εὐώνυμον μέρος. ὅταν δὲ τὸ $\bar{\beta}$ δίς τρίτον δὲ ὅταν τὸ $\bar{\gamma}$ καὶ ἐφεξῆς. ὅταν δὲ τὸ $\bar{\iota}$ βουληθῶσι σημάναι ἅπαξ ἀνάπτουσι τὸν πυρσὸν κατὰ τὸν μέσον τόπον καὶ τρίτον ὅταν τὸ $\bar{\lambda}$ καὶ ἐφεξῆς. ὁμοίως δὲ ὅταν τὸ $\bar{\varrho}$ βουληθῶσι σημάναι κατὰ τὸ δέξιον μέρος ἅπαξ ἀνάπτουσι τὸν πυρσόν. δύο δὲ ὅταν τὸ $\bar{\sigma}$ καὶ τρίτον τὸ $\bar{\tau}$ καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων ὁμοίως· τοῦτοδὲ ποιοῦσι τὴν ἀπὸ στοιχείων σημασίαν ἀριθμὸν φεύγοντες. οὐ γὰρ ἂν τὸ $\bar{\varrho}$ σημάναι βουλόμενοι ἑκατοντάκις ἀνάψουσι τοὺς πυρσοὺς, ἀλλ' ἅπαξ κατὰ τὸδεξιὸν μέρος καθάπερ πρότερον εἴρηται. καὶ ταῦτα ποιοῦσι μετὰ συμφωνίας ἀλλήλων οἵ τε διδάσκοντες διὰ τῶν σημείων οἵ τε μανθάνοντες γράφοντες τὰ διὰ τῶν πυρσῶν δηλούμενα τῶν στοιχείων. εἶτα ἀναγινώσκοντες καὶ δηλοῦντες ὁμοίως ταῦτα τοῖς μετ' ἐκείνοις τεταγμένοις, καὶ τὴν τῶν πυρσῶν ἐπιμέλειαν ἔχουσι καὶ αὐτοῖ ὁμοίως τοῖς μετ' ἐκείνοις μέχρι τῶν τελευταίων οἳ ποιοῦνται τῶν πυρσῶν ἐπιμελείαν.*

335. Nesselmann, Algeb. d. Griech. S. 84 und vor ihm Heilbronner citiren Hostus p. 561. Das scheint auf einer anderen Schrift zu beruhen, als die ich von Hostus benutzte (vergl. Anmerk. 318) und die im Ganzen nur 62 Octavseiten stark ist. Auf S. 33 dieser Schrift heisst es: Placet hic subjungere ex Johanne Noviomago compendiosam Astronomis quibusdam usitatam notandi rationem per unam

*) Soll jedenfalls $\bar{\iota}$ heissen.

**) Soll jedenfalls $\bar{ϟ}$ heissen.

***) Soll jedenfalls $\bar{\omega}$ heissen.

perpetuam lineolam vel prostratam: cui ad sinistram dextramque superne et inferne apex brevior addatur, nunc erectus, nunc declivis, nunc acclivis, nunc aliter auctus etc. hoc modo per quatuor classes nonarias.

336. Piccard l. c. S. 169 giebt wenigstens Georg Henisch, De numeratione, Augsburg 1605 als seine Quelle an, aber ohne die Seitenzahl zu nennen.

337. Möglicherweise ist die richtige Quelle: Joh. Noviomagus, De astrolabii compositione. Köln 1533. Noch wahrscheinlicher Noviomagus, De numeris. 12^{0}. Paris 1539. Eine nahe liegende Vermuthung will ich hier ausdrücklich zerstören. Die 8bändige Ausgabe von Beda's Werken durch Joh. Hervagius (Basel 1563) enthält Bd. I, S. 159—167 einige auf Zahlenrechnen sich beziehende Abhandlungen, und von letzterer Seite an Scholien von Noviomagus. Hier hoffte ich selbst das Citat des Hostus zu entdecken, aber vergebens; es ergab sich beim sorgfältigsten Durchlesen durchaus Nichts hierher Gehöriges.

338. Kopp, Palaeographia critica. Mannheim 1817. Bd. I, S. 47 citirt Vossius ad Melam Lib. I, cap. 12, S. 64.

339. Kopp l. c. S. 22.

340. Kopp l. c. S. 273.

341. Lex 2 Codicis de malificis et mathematicis et ceteris similibus: Artem geometriae discere atque exercere publice interest.

Ars autem mathematica damnabilis interdicta est omnino.

Lex 4: Eorum est scientia punienda et severissimis merito punienda, qui magicis accincti artibus aut contra salutem hominum molliti aut pudicos animos ad libidinem deflexisse detegentur.

Lex 5: Nemo haruspicem consulat aut mathematicum, nemo hariolum.

Sileat omnibus perpetuo divinandi curiositas, et enim supplicium capitis feret gladio ultore prostratus quicumque jussis obsequium denegaverit.

Lex 6: Culpa similis tam prohibita discere quam docere.

342. Aul. Gellius, Noctes Atticae, Lib. III, cap. 10, §. 17: M. Varro ibi (in primo librorum qui inscribuntur Hebdomades vel De imaginibus) addit se quoque jam duodecimam annorum hebdomadam ingressum esse et ad eum diem septuaginta hebdomadas librorum conscripsisse.

343. Vossius l. c. S. 60: Terentius Varro de geometria librum

reliquit ad M. Caelium Rufum uti est apud Frontinum de limitibus agrorum, sive ut in aliis est libris ad Sylvium Rufum.

344. Cassiodorus, Gesammtausgabe seiner Werke ed. J. Garet. Venedig 1729. fol. De Geometria, cap. 7 (Bd. II, S. 560, Col. 2, Z. 9 v. u.): Mundi quoque figuram curiosissimus Varro longae rotunditati in geometriae volumine comparavit, formam ipsius ad ovi similitudinem trahens, quod in latitudine quidem rotundum, sed in longitudine probatur oblongum. Darnach irrt Chasles offenbar, wenn er meint (Gesch. der Geom. S. 517): „Dieser Schriftsteller verdient besonders desshalb angeführt zu werden, weil er, wie eine Stelle im Cassiodorus bezeugt, die Abplattung der Erde vermuthet hat."

345. Vossius l. c. p. 39 giebt nähere Auskunft über dieses Werk, welches die Ueberschrift De numeris führte. Noch im Jahre 1564 schrieb Vertranius Maurus: De arithmetica libellus ejusdem est hodie quoque superstes divinitus a M. Varrone scriptus; uti sunt omnia ab illo profecta. Eum nos Romae cum P. Fabro, Augerioque Ferrario, viris doctis amicisque nostris ex bibliotheca Rudolphi Cardinalis adservatum apud Laurentem Strossium Cardinalem vidimus. Vossius verwundert sich daher schon, dass das Werk nicht publicirt sei, und noch mehr, dass Cassiodorus es nicht erwähne, welcher (vergl. Anmerkung 350) den Appulejus als ersten römischen Arithmetiker nannte. In ersterer Beziehung schreibt Vossius: Haec cum ille (sc. Vertranius Maurus) jam ante annos LXXXVI scripserit mirum sane necdum lucem videre. Diese Stelle ist geeignet, die Gedankenlosigkeit Heilbronners in das rechte Licht zu setzen. Dieser schreibt nämlich l. c. S. 291 das Ganze wörtlich ab, natürlich ohne Vossius als Quelle *zu nennen*, und lässt somit denselben Vertranius Maurus 86 Jahre vor dem Erscheinen seines eigenen Buches gelebt haben!

346. Curator aquarum. Vergl. Abriss der römischen Litteraturgeschichte von J. C. F. Baehr. Heidelberg und Leipzig 1833. S. 221.

347. Chasles, Gesch. der Geom. S. 517 flgg.

348. secundum Julium Frontinum geometriae artis inspectorem providissimum. Vergl. Boethius Gesammtwerke. Basel 1517. fol. S. 1520 Z. 13 v. u.

349. Mit diesem Urtheile von Chasles stimmt überein Baehr, Abriss d. röm. Literaturgesch. S. 221: Aber einer offenbar späteren Zeit gehört das ihm wohl zugeschriebene Büchlein De re agraria oder de agrorum qualitate sowie das Fragment de limitibus und de coloniis zu.

350. Cassiodor ed. Garet. Venedig 1729. Bd. II, S. 555 Col. 2 Z. 14 v. u. Reliquae indigent Arithmetica disciplina: quam apud Graecos Nicomachus diligenter exposuit. Hunc primum Madaurensis Appulejus deinde magnificus vir Boethius latino sermone translatum Romanis contulit lectitandum. Quibus, ut ajunt, si quis saepius utitur lucidissima procul dubio ratione perfunditur.

351. Hujus disciplinae tota vis in exemplis additionibus et detractionibus partium est sita; quam partem qui volet plenissime pernosse, L. Appulejum legat qui primus Latinis haec argumenta illustravit. Diese höchst bedeutsame Stelle findet sich nach Vossius (l. c. S. 40) in einem Compendium, welches 1540 anonym in Paris erschien. Der Verfasser sei Wilh. Postellus, und er habe aus Cassiodor geschöpft. Diese letztere Behauptung des Vossius kann ich in Bezug auf die hier abgedruckte Stelle nicht bestätigen. Es wäre aber sehr wichtig zu wissen, wer hier als Quelle gedient hat, da es jedenfalls ein Autor gewesen sein muss, dem die Arithmetik des Appulejus noch zugänglich war.

352. Compt. rend. de l'académie vom 22. October 1860, LI, 630. Mein eigener Glaube in dieser Beziehung ist indessen etwas wankend geworden, seit ich aus einem von Röth II, 268 und Note 306, 7. angegebenen Citate des Eusebius (pr. ev. X, 3, d.) erfuhr, dass es auch noch einen Andron von Ephesus etwa zu Platos Zeiten gab, der dadurch dem Oenopides sehr nahe rückt und damit eine ungezwungenere Erklärung der damals von mir in Bezug auf Andron von Catanea interpretirten Stelle zulässt.

353. Die Schriften der römischen Feldmesser, herausgegeben und erläutert von F. Blume, K. Lachmann und A. Rudorff. 2 Bände. 1848—1852. Ferner: Hygini Gromatici liber de munitionibus castrorum, edid. Lange. Göttingen 1848.

354. Blume, Ueber die Handschriften der Agrimensoren im Rheinischen Museum für Jurisprudenz VII, 173—248 und eine Abhandlung desselben Titels in der Ausgabe der römischen Feldmesser II, 1—78 und 473—478. Diese zweite Abhandlung benutzt auch schon die Resultate von Lange, dessen Untersuchungen seiner Ausgabe des Hyginus vorausgeschickt sind als Cap. I. De codicibus manuscriptis S. 6—32.

355. Baehr, Abriss d. röm. Literaturgesch. S. 240. Chasles, Gesch. d. Geom. S. 523.

356. Quod tellus non sit centrum omnibus planetis.

357. A. Boeckh, Philolaos des Pythagoreers Lehren nebst den Bruchstücken seines Werkes. Berlin 1819. S. 114—123. Vergl. auch Röth l. c. Bd. II, Note 1286.

358. Weidler, Historia astronomiae, Wittenberg 1741. S. 343. Auffallend genug vermisse ich den Namen des Martianus Capella in der im Uebrigen vortrefflich durchgearbeiteten Biographie: Nicolaus Kopernikus dargestellt und Dr. Johann Heinrich Westphal. Constanz 1822.

359. Vossius l. c. S. 60. Heilbronner l. c. S. 391. Baehr, Abriss d. röm. Liter. Gesch. S. 196. Wattenbach, Deutschlands Geschichtsquellen im Mittelalter bis zur Mitte des 13. Jahrhunders. Berlin 1858. S. 46.

360. Variarum (epistolarum) libri XII ed. Fornerius. Paris 1583, auch in der Garet'schen Gesammtausgabe und häufiger.

361. Cassiodorus, De artibus ac disciplinis liberalium litterarum.

362. Die Biographie des Boethius von Hand in Ersch u. Gruber's Encyklopädie Bd. XI, S. 283—287 hat allen späteren Arbeiten, die ich verglich, fast einzig als Quelle gedient und konnte daher auch hier um so eher allein benutzt werden.

363. Artikel Symmaque in der Biographie universelle. I. Ausgabe. Bd. 44, S. 332.

364. Variarum ed. Paris 1583. lib. 1, epistola 45, S. 43: Sic enim Atheniensium scholas longe positus introisti.

365. Die meisten im Texte angeführten Thatsachen schöpfte ich aus Diogenes Laertius lib. 8, cap. 4. Was ich über die *Schriften* des Archytas von Tarent sage, stammt grösstentheils aus L. Boeckh, Ueber den Zusammenhang der Schriften, welche der Pythagoreer Archytas hinterlassen haben soll, Beilage zum Herbstprogramme 1841 des karlsruher Lyceums. Die Schrift von Gruppe, Ueber die Fragmente des Archytas und der älteren Pythagoreer, Berlin 1840, habe ich leider nicht zu Gesicht bekommen. Einige Resultate derselben entlehne ich der Beilage I (Ueber die Entstehung und Ausbreitung des dekadischen Zahlensystems) zu Gerhardt, die Entdeckung der höheren Analysis, Halle 1855. S. 96 flgg.

366. Aulus Gellius, Noctes Atticae lib. 12 cap. 12: Nam et plerique nobilium Graecorum et Phavorinus philosophus memoriarum veterum exequentissimus affirmatissime scripserunt, simulacrum columbae e ligno ab Archyta ratione quadam disciplinaque mechanica factum

volasse: ita erat scilicet libramentis suspensum et aura spiritus inclusa atque occulta concitum.

367. Boeckh l. c. (vergl. Anmerkung 233) p. XI: Quem librum (sc. Archyteum) ut concedimus subditicium fuisse. . tamen haec Archytea certe primo a Christiana epocha saeculo non inferiora sunt.

368. Boeckh, Philolaos (vergl. Anmerkung 357) S. 37 flgg.

369. Nach Friedlein l. c. S. 12, Note 4 findet sich die Vorrede des Judecus auch in einer Ausgabe von 1499.

370. Translationibus enim tuis Pythagoras musicus, Ptolemaeus astronomus leguntur Itali. Nicomachus arithmeticus, geometricus Euclides audiuntur Ausoniis. Plato theologus, Aristoteles logicus Quirinali voce disceptant. Mechanicum etiam Archimedem Latialem Siculis reddidisti. Et quascunque disciplinas vel artes foecunda Graecia per singulos viros edidit, te uno auctore, patrio sermone Roma suscepit.

371. Duchesne, Historiae Francorum scriptores. Paris 1636. Bd. 2. S. 790: Reperimus octo volumina Boetii de Astrologia praeclarissima quoque figurarum Geometriae aliaque non minus admiranda.

372. Arithm. Lib. I. cap. I ed. Bas. S. 1296: Inter omnes priscae autoritatis viros, qui Pythagora duce puriore mentis ratione viguerunt, constare manifestum est haud quemquam in philosophiae disciplinis ad cumulum perfectionis evadere nisi cui talis prudentiae nobilitas quodam quasi quadrivio vestigatur.... Illam multitudinem quae per se est Arithmetica speculatur integritas; illam vero quae ad aliquid Musici modulaminis temperamenta pernoscunt. Immobilis vero magnitudinis Geometria noticiam pollicetur, mobilis scientiam Astronomicae disciplinae peritia vendicavit. Quibus quatuor partibus si careat inquisitor, verum invenire non possit ac sine hac quidem speculatione veritatis nulli recte sapiendum est. Est enim sapientia earum quae vere sunt cognitio et integra comprehensio. Quod haec qui spernit, id est has semitas sapientiae ei denuncio non recte Philosophandum.

373. Tu artem praedictam ex disciplinis nobilibus natam per quadrifarias Mathesis januas instroisti.

374. Musica lib. 2. cap. 3. ed. Bas. S. 1398. Sed immobilis magnitudinis Geometria speculationem tenet. Mobilis vero scientiam Astronomia persequitur. Per se vero discretae quantitatis Arithmetica autor est. Ad aliquid vero relatae Musica probatur obtinere peritiam.

375. Arithmetica lib. 1, cap. 1. ed. Bas. S. 1298. Quare quo-

niam prior, ut caruit, Arithmeticae vis est, hinc disputationis sumamus exordium.

376. Cassiodorus ed. Garet. Venedig 1729. Bd. II. S. 558. Col. 2. Z. 9. Cujus disciplinae apud Graecos Euclides, Apollonius, Archimedes nec non et alii scriptores probabiles extiterunt: ex quibus Euclidem translatum in latinam linguam idem vir magnificus Boetius dedit.

377. Arithmetica praefatio ed. Bas. S. 1295. Nam et ea quae de numeris a Nicomacho diffusius disputata sunt moderata brevitate collegi. Et quae transcursa velocius angustiorem intelligentiae praestabant aditum mediocri adjectione reseravi ut aliquando ad evidentiam rerum nostris etiam formulis ac descriptionibus uteremur. Quod nobis quantis vigiliis ac sudore constiterit facile sobrius lector agnoscet.

378. Nesselmann, Alg. d. Griech. S. 221.

379. Martin, Origine etc. §. II. Authenticité de la Géométrie de Boèce et spécialement du passage concernant l'abacus.

380. Heilbronner l. c. S. 541: a) Geometrica quaedam inter quae Boetii liber ex Euclide ad Patricium filium. S. 548: b) Boetii Geometria et Arithmetica. S. 553: c) Boetii Geometria. S. 560: d) Boetii Arithmetica, Musica et Geometria. S. 563: e) Boetii varia opera, Arithmetica, Geometria etc. S. 580: f) Boetii et Arithmetica. ibid. g) Euclidis Geometria interprete Boetio. S. 629: h) Boetii Geometria.

381. In the Lansdown collection (842) in the British Museum is a very beautiful MS. of the whole works of Boetius (Halliwell, Rara Mathematica. London 1839. S. 109).

382. Geometria ed. Bas. S. 1487: Euclidis Megarensis Geometriae ab Anitio Manlio Severino Boethio translatus liber I.

Quia vero, mi Patrici, Geometrarum exercitatissime, Euclidis de arte Geometricae figuris obscure prolata, te adhortante exponenda et lucidiore aditu expolienda suscepi in primis quid sit mensura definiendum opinor.

383. Hand bei Ersch und Gruber XI, 284.

384. Geometria ed. Bas. S. 1514: ad quae intelligenda quicunque in nostrorum Arithmeticorum theorematibus instructus accesserit. S. 1518: De Arithmetica vero Geometrica quid attinet dicere, cum si vis numerorum pereat, nec in nominando appareat, de qua, quia in Arithmeticis et in Musicis sat dictum est, ad dicenda revertamur. ibid.: unitas ut in Arithmeticis est dictum numerus non est sed fons et origo numerorum.

385. Arithmetica lib. 1. cap. 7. ed. Bas. S. 1299: Quare con-

stat primam esse unitatem cunctorum, qui sunt in naturali dispositione numerorum, et etiam rite totius quantumvis complixae genitricem pluralitatis agnosci. lib. 2, cap. 5. S. 1329: Sic etiam in numero unitas quidem cum ipsa linearis numerus non sit, in longitudinem tamen distenti numeri principium est.

386. ed. Bas. S. 114; S. 1352; S. 1428; S. 1479 u. 1480.

387. Friedlein l. c. S. 16: „Darnach steht Boethius seinem Archytas gegenüber wie ein selbstständiger Forscher einem andern, findet aber eher Anlass zu Widerspruch, als er wie einem Wegweiser ihm folgen kann.“

388. Geometria ed. Bas. S. 1516: Sed jam opus est ad Geometricalis mensae traditionem ab Archyta non sordido hujus disciplinae autore latino accomodatam venire (ed. Venet. und gute Handschriften haben Latio statt latino). S. 1523: Quarto nimirum loco trigonus orthogonius ab Euclide inseritur.... Cujus si latera ignorantur hoc modo investigari ab Archyta praecipiuntur. S. 1526: Num (soll heissen nunc) etiam quod Archytae judicio in hoc eodem orthogonio approbatum est et Euclidis diligentissime perscrutatione prius est rationabiliter adinventum operae pretium duximus non esse praetermittendum. ibid.: Sed Archytas in cunctis utens ratione alio modo hujus amblygonii aream reperiri constituit. S. 1535: Reliquum est ut de unciali et digitali mensura et de punctorum et minutorum caeterisque minutiis, sicut promisimus dicamus, mirabilem et arti huic caeterisque mathesios disciplinis necessariam figuram, quam Archyta praemonstrante didicimus edituri.

389. Geometria ed. Bas. S. 1520. Superioris vero tractatu voluminis omnia Geometricae artis theoremata quamvis succincte tamen sunt dicta. Sed podismorum notitiam hic liber quasi quaestionarius et omnium podismalium quaestionum scrupulositates incunctanter absolvet enodando. Veteres enim agrimensores omnem mensurae quadraturam dimidio longiorem latioremve facere consueverunt etc. und gleich darauf: Prisci igitur podismatici cautissimi dispectores etc.

390. Geometria ed. Bas. S. 1516. Z. 8: Sed jam opus est — S. 1517. Z. 22 ut itinera plerumque pergunt sollen wörtlich ebenso in einer Schrift von Balbus an Celsus vorkommen.

391. Ausgabe der Agrimensoren Bd. 2, S. 90.

392. Geometria ed. Bas. S. 1528: Tetragonus autem parte latere longior ab Euclide quidem rectiangulum sed non aequilaterum definitur; a Nicomacho autem heteromeces dicitur.

393. Arithmetica lib. 2, cap. 26, ed. Bas. S. 1341: Hujus modi vero formas quales sunt, quae vocantur a Graecis ἑτερομήκει nos dicere possumus.

394. Geometria ed. Bas. S. 1522: ab Euclide Geometricae peritissimo; ibid. S. 1527: ab Euclide non segni Geometra.

395. Chasles, Gesch. d. Geom. S. 545 flgg. Bei der Uebersetzung hat sich der Druckfehler eingeschlichen, dass für gleichwinklig (aequiangulum) gleichschenklig gesetzt wurde. Geometria ed. Bas. S. 1514.

396. Ausgabe der Agrimensoren Bd. 2. S. 96.

397. Pergamentcodex Nro. 87 in folio fängt an mit den Worten: Incipit vi.... Anici Manlii Boetii Artis Geometriae et arithmetice.... ab Euclide translati de Grèco in latinum. Dann heisst es fol. 8 verso: Explicit Anicii Manilii Severini Boetii lib. V artis geometriae de greco in latinum translatus ab Euclide peritissimo geometrico. Hi namque libri continent numerorum caussas et divisiones circulorum et omnium figurarum rationes; extremitatum et summitatum genera angulorum et mensurarum expositiones. Endlich am Schlusse von fol. 17 verso heisst es: Ego constantius peccator et indignus sacerdos sancti Petri luxoviensis coenobii scripsi ad serviendum ei hos libros boetii de geometria diebus tantum XI infra r̃d n̄m et VI ht. anno M̃IIII ab incarnatione domini conversionis autem nostrae II praecepto pii patris milonis. Sit ergo utenti gratia, scriptori venia, fraudatori anathema.

398. Demonstratio artis geometricae. Vergl. hierüber Chasles, Gesch. d. Geom. S. 525 flgg. Lachmann, Ausgabe der Agrimensoren Bd. 2, S. 81—90. Martin, Origine S. 9.

399. Libri, Histoire des sciences mathématiques en Italie. Paris 1838. Bd. 1, S. 89. Auch Prinz Boncompagni in Rom besitzt in seiner reichen Manuscriptensammlung einen Codex der Geometrie des Boethius in 5 Büchern. Vergl. Nro. 177 des von Herrn Narducci angefertigten Kataloges jener Sammlung. Diese Handschrift hat freilich keinerlei beweisende Kraft, da sie nach der Beschreibung des Kataloges erst dem 16. Jahrhundert angehört.

400. De characteribus numerorum vulgaribus et eorum aetatibus veterum monimentorum fide illustratis, dissertatio mathematico-critica a Joanne Fried. Weidlero. Witembergae A. C. MDCCXXVII d. xvIII Julii. Die Bestimmung des Alters der Handschrift E auf S. 20.

401. De numerorum quos Arabicos vocant vera origine Pythagorica commentatur Conrad Mannert, Histor. Prof. P. O. in acad. Alt-

dorfina. Norimbergae 1801. Die Beschreibung der Handschrift E auf S. 7 flg.

402. Auffallend genug ist es, dass Mannert diesen so charakteristischen Umstand nicht hervorhob, während Weidler ihn bereits bemerkte.

403. So steht z. B. ed. Bas. S 1492 Z. 7: Quintae autem si in duas rectas lineas linea recta incidens interiores duos angulos e t i n e a d e m p a r t e duobus rectis fecerit minores etc. In E fehlen die gesperrt gedruckten Worte. Dagegen steht ed. Bas. S. 1516 Z. 8: Sed jam opus est, der venetianer Druck hat gar: Sed jam ipsus est, in E heisst es: Sed jam tempus est. Ferner ed. Bas. S. 1492 Z. 1: De petitionibus, quae sunt in Geometrica; E hat: in Geometria u. s. w.

404. Ich füge dieser meiner Abschrift aus E einige in dem Manuscripte natürlich nicht vorhandene Buchstaben bei, welche die einzelnen Abschnitte unterscheiden und bei künftigen Citaten dienen sollen: De ratione abaci.

a) Priscae igitur prudentiae viri pytagoricum dogma secuti platonicaeque auctoritatis investigatores speculatoresque curiosi totum philosophiae culmen in numerorum vi constituerunt. Quis enim musicarum modulamina simphoniarum numerorum expertia censendo pernoscat. Quis ipsius firmamenti siderea corpora stellis compacta naturae numerorum ignarus deprehendat ortusque signorum et occasus colligat. De arithmetica vero e t (dieses Wort fehlt im Drucke, der dadurch unverständlich wird) geometrica quid attinet dicere cum si vis numerorum pereat nec innominando appareant.

De quibus quia in arithmeticis et in musicis sat dictum est ad dicenda revertamur.

b) Pitagorici vero ne in multiplicationibus et participationibus et in podimis (corrigirt podismis) aliquando fallerentur ut in omnibus erant ingeniosissimi et subtilissimi descripserunt sibi quandam formulam quam ob honorem sui praeceptoris mensam pitagoricam nominabant quia hoc quod depinxerant magistro premonstrante cognoverant. A posterioribus apellabatur abacus; ut quod alta mente conceperant melius si quasi videndo ostenderent in noticiam omnium transfundere possent eamque subterius habita sat mira descriptione formabant.

Hier folgt im Manuscripte die Tafel, welche ich als Figur 39 abgezeichnet habe. In dem folgenden Texte finden sich die Zeichen Figur 40, welche ich zum bequemeren Drucke durch moderne Ziffern ersetze.

c) Superius vero digestae descriptionis formula hoc modo ute-

bantur. Habebant enim diverse formatos apices vel caracteres. Quidam enim hujuscemodi apicum notas sibi conscripserant ut haec notula responderet unitati 1, ista autem binario 2, tercia vero tribus 3, quarta vero quaternario 4, haec autem quinque ascriberetur 5, ista autem senario 6, septima autem septenario 7, haec vero octo 8, ista autem novenario jungeretur 9. Quidam vero in hujus formae descriptione literas alfabeti sibi assumebant hoc pacto, ut litera quae esset prima unitati, secunda binario, tercia ternario ceteraeque in ordine naturali numero [responderent naturali. Alii autem in hujusmodi opus apices naturali numero] insignitos et inscriptos tantummodo sortiti sunt.

d) Hos enim apices ita varie ceu pulverem dispergere in multiplicando et in dividendo consuerunt, ut si sub unitate naturalis numeri ordinem jam dictos caracteres adjungendo locarent non alii quam digiti nascerent. Primum autem numerum idem binarium, unitas enim ut in arithmeticis est dictum numerus non est sed fons et origo numerorum, sub linea X inscripta ponentes XX et ternarium XXX et quaternarium XL ceterosque in ordine sese sequentes proprias secundum denominationes assignare constituerunt. Sub linea vero centeno insignita numero eosdem apices ponentes binarium CC tis, ternarium CCC quaternarium CCCC ceterosque certis denominationibus respondere decreverunt. In sequentibus vero paginularum lineis idem facientes nullo errore nubilo obtenebantur.

e) Scire autem oportet et diligenti examinatione discutere in multiplicando et partiendo cui paginulae digiti et cui articuli sint *adjungendi*. Nam singularis multiplicator deceni digitos in *decenis articulos* in centenis idem vero singularis multiplicator centeni digitos in centenis, articulos in millenis et multiplicator milleni digitos in millenis et articulos in decenis millenis, et multiplicator centum milleni digitos in centenis millenis articulos autem in millenis milibus habebit.

Decenus autem suimet ipsius multiplicator digitos in pagina C inscripta articulos in millenis, et multiplicator centeni digitos in millenis et articulos in $\overline{\mathrm{X}}$, et multiplicator milleni digitos in $\overline{\mathrm{X}}$ et articulos in centum $\overline{\mathrm{M}}$, et multiplicator centini milleni digitos in millenis milibus et articulos in $\mathrm{X}\overline{\mathrm{M}}\overline{\mathrm{I}}$ habebit.

Centenus vero aeque suimet ipsius multiplicator digitos in X′ et articulos in C, et millenum multiplicans digitos in C′ et articulos in XC′. Et centenum millenum multiplicans digitos in X es $\overline{\mathrm{M}}\overline{\mathrm{I}}$ et arti-

culos in C$\overline{\mathrm{M}}\,\overline{\mathrm{I}}$. Et decenum millenum multiplicans digitos in $\overline{\mathrm{M}}\,\overline{\mathrm{I}}$ et articulos in X es $\overline{\mathrm{M}}\,\overline{\mathrm{I}}$ subtendet.

Millenus itidem se ipsum multiplicans digitos in X es $\overline{\mathrm{C}}$ et articulos in C ies $\overline{\mathrm{C}}$. Et centeni milleni multiplicator digitos in C$\overline{\mathrm{M}}\,\overline{\mathrm{I}}$ et articulos in $\overline{\mathrm{M}}\,\overline{\mathrm{M}}\,\overline{\mathrm{I}}$ et decenum millenum millenum excrescere faciens digitos in X ies $\overline{\mathrm{M}}\,\overline{\mathrm{I}}$* et articulos in C ies $\overline{\mathrm{M}}\,\overline{\mathrm{I}}$* habere dinoscetur.

Decenus autem millenus multiplicator centeni milleni digitos in $\overline{\mathrm{M}}\,\overline{\mathrm{M}}\,\overline{\mathrm{I}}$ et articulos in X ies $\overline{\mathrm{M}}\,\overline{\mathrm{I}}$* seque ipsum adaugens digitos in C$\overline{\mathrm{M}}\,\overline{\mathrm{I}}$ et articulos in $\overline{\mathrm{M}}\,\overline{\mathrm{M}}\,\overline{\mathrm{I}}$ habere deprehenditur.

Centenus autem millenus se ipsum multiplicans digitos X ies $\overline{\mathrm{M}}\,\overline{\mathrm{I}}$* et articulos $\overline{\mathrm{C}}\,\overline{\mathrm{M}}\,\overline{\mathrm{I}}$** supponet. (Bei den vier mit einem * bezeichneten Zahlen fehlt offenbar ein Factor 1000, der nach Analogie der mit zwei ** bezeichneten Zahl durch einen kleinen Querstrich über dem multiplicirenden X ies und C ies ausgedrückt gewesen sein wird.)

f) De divisionibus.

Divisiones igitur quanta libet jam ex parte lectoris animus introductus facile valet dinoscere. Breviter etenim de his et summatenus dicturi, si qua obscura intervenerint diligenti lectorum exerticio ad investiganda committimus.

Si decenus per se, vel centenus per se, vel ulteriores per semet ipsos dividendi proponantur minores a majoribus quoadusque dividantur sunt subtrahendi.

Singularem autem divisorem deceni aut centeni aut milleni aut ulteriorum vel decenum divisorem sequentium sumpta differentia eos dividere oportet.

Compositus autem decenus cum singulari per secundas vel tertias et deinceps secundum denominationem partium decenum vel simplicem vel compositum divisurus est.

Centenum vero vel millenum vel ulteriores per decenum compositum si diligens investigator accesserit, differentia et primis articulis dividendo vel secundatis appositis, acutis (muss offenbar heissen auctis) autem dividendo suppositis dividi posse pernoscet.

g) Centenus autem cum singulari compositus centenum vel millenum hoc pacto dividere cognoscitur. Sumpto igitur uno dividendorum, quod residuum fuerit, divisori est coaequandum et quod superabundaverit sepositis reservandum.

Singularis autem vel ut alii volunt minutum peraequatione majorum est multiplicandum et digitis quidem perfecta differentia supponenda, articulis autem imperfecta est preponenda. Et hae differentiae

et si forte aliquis seclusus sit, significant quod residuum sit ex dividendis.

Haec vero brevi introductione praelibantes si qua obscure sunt dicta, vel ne taedio forent praetermissa diligentis exercitio lectoris committimus, terminum hujus libri facientes et quasi ad utiliora sequentium nos convertentes. Incipit liber II. Geometriae.

405. In der berner Foliohandschrift Nro. 87 fehlt der ganze Abschnitt De ratione abaci.

406. Nesselmann, Algeb. d. Griech. S. 196.

407. Arithmetica lib. I. cap. 26. ed. Bas. S. 1314.

408. Zu derselben Meinung bekennt sich auch Vincent in Liouville, Journal des Mathématiques IV, 276: Ces caractères devaient être mobiles: ils étaient sans doute tracés sur des especes de dés ou de fiches.

409. Chasles Gesch. d. Geom. S. 534: „Andere endlich begnügten sich, bei diesen Operationen die Charaktere anzuwenden, die schon vor ihnen zur Bezeichnung der natürlichen Zahlen gebraucht waren.“

410. Zeitschr. Math. Phys. Bd. III, Figurentafel 4.

411. Compt. rend. de l'academie vom 14. October 1839: IX, 472.

412. Boeckh im Sommerkatalog 1841, S. XI, Note 13 *καθάπερ οἱ τῶν ἀριθαητικῶν δάκτυλοι νῦν μὲν μυριάδας, νῦν δὲ μονάδας τιθέναι δύνανται* Tamen hic locus non videtur ad abacum pertinere, nec digiti illi esse numerales, sed manuum: notissima est enim in digitis manuum computatio, et verbum *τιθέναι* magis aptum est de manuum digitis, quam de digitis numeralibus.

413. Variarum ed. Paris 1583. lib. I, epistola 10 ad Boethium, S. 18: Juvat inspicere, quemadmodum denarius numerus more Coeli et in se ipsum revolvitur et nunquam deficiens invenitur: crescit nova conditione, per se redeundo, addita sibi semper ipsa calculatio: ut cum denarius non videatur excedi ex modicis praevalet majora complecti. Hoc saepe repetitum inflexis manualibus digitis et erectis redditur semper extensum; et quanto ad principium suum supputatio redditur tanto amplius indubitanter augetur.

414. Compt. rend. de l'academie vom 23. Januar 1843. XVI, 168 sagt Chasles bei Gelegenheit des Manuscriptes 533 fond St. Victor (welches ibid. S. 237—246 abgedruckt ist und zwar die hier angeführten Stellen in § III und IV auf S. 239): Toutefois l'auteur dit,

que ces expressions digits articles proviennent de la manière d'exprimer des nombres par les doigts, et à ce sujet il décrit cette manière tout au long telle qu'on la trouve enseignée par Bède, par Raban Maur etc. On sait qu'une foule d'auteurs latins de tous les ages présentent des traces de cet ancien procédé.

Quand à savoir si les expressions digits articles en usage dans le système de l'Abacus proviennent du calcul digital la question est douteuse, car quelques auteurs dans leurs traités de l'Abacus donnent une autre explication de ces expressions.

Diese andere Erklärung hat Chasles bisher noch nicht veröffentlicht. Ich selbst fand nichts Derartiges in den wenigen mir zugänglichen Schriften.

415. Friedlein l. c. S. 23: „Auch bei Beda finde ich den Ausdruck articulus nicht in seinem Werke de indigitatione. Das in dieser Schrift angegebene Verfahren ist aber nach dem Scholion des Jo. Noviomagus (Beda, Basel 1563, I, col. 168) gerade dasjenige, dessen sich die Alten bedienten. Von dem damals gebräuchlichen Fingerrechnen sagt aber derselbe Noviomagus vorher: Arithmetici digitum vocant numerum omnem infra denarium. Horum enim quisque digito aliquo exprimitur. — Articulos quoque vocant numeratores, qui in decem aequales partes dividi possunt. Hi enim articulis digitorum exprimuntur. — Sed haec numerandi ratio vulgatissima et pueris nota, quam ob id posui, ut quae esset digitorum et articulorum origo apud arithmeticos indicaretur pueris. Hier ist also die nöthige Aufklärung. Die Ausdrücke digiti und articuli bei den Arithmetikern stammen von einer Art des Fingerrechnens, welche die Alten nicht übten, sondern von einer späteren, die aber so allgemein gebraucht wurde, dass sie die Knaben lernen mussten."

416. Hanc igitur artem numerandi apud Grecos Samius Pitagoras et Aristoteles scripserunt diffusiusque Nicomachus et Euclides; licet et alii in eadem floreunt, ut est Eratosthenes et Crisippus. Apud Latinos primus Apuleius deinde Boecius. (Halliwell, Rara Mathematica. London 1839. S. 108. Note 2.)

417. Chasles Gesch. d. Geom. S. 536: „Die Dunkelheit des Textes erlaubt uns nicht die Fortsetzung zu übersetzen; wir vermuthen, dass sie uns verstümmelt und lückenhaft überliefert ist."

418. Compt. rend. de l'académie vom 23. Januar 1843, XVI, 172 flgg.

419. Wilhelm von Malmesbury: Abacum certe a Saracenis ra-

piens regulas dedit quae a sudantibus abacistis vix intelliguntur. vergl. Bouquet, Recueil des historiens des Gaules et de la France X, 243.

420. Crelle's Divisionsmethode vergl. Journal für reine und angewandte Mathematik XIII, 209.

421. Zeitschr. Math. Phys. II, 360 flgg.

422. $a \, . \, b = (10-a) \, . \, (10-b) + 10 \, . \, [b-(10-a)] = (10-a) \, . \, (10-b) + 10 \, . \, [a-(10-b)]$. Gemma Frisius macht daher in seiner von Pelletarius herausgegebenen Arithmetica practica S. 9 die vollkommen richtige Bemerkung: Haec tamen regula te fallet nisi duo digiti simul juncti plus decem efficiant; verum in illis ob summam facilitatem nulla opus est regula. In derselben Schrift werden die Unterschiede 10—a, 10—b bald als distantiae bald als differentiae bezeichnet.

423. Joh. Müller aus Königsberg in Franken und daher Regiomontanus genannt, geb. 1436, gest. 1475. Dafür dass er wirklich der Verfasser ist, spricht mir jetzt besonders ein Citat von Halliwell, welcher in seiner Rara Mathematica, London 1839, S. 2, Note 3 den algorismus demonstratus Regiomontani edit. 1534 ausdrücklich erwähnt.

424. Friedlein l. c. S. 56.

425. Eine Vergleichung mit Friedlein's Auffassung ergiebt, dass dieser zwar jede einzelne Operation ausführt, die ich im Texte nannte, doch aber den ganzen zweiten Theil nicht richtig auffasst, weil der Unterschied ihm entging, der principiell darin liegt, ob man 18 abzieht, oder dessen Ergänzung 82 addirt. Hätte er diesen Unterschied erfasst, so könnte er nicht sagen: „Uebrigens lässt sich in dem angegebenen Verfahren die Aehnlichkeit mit dem sogenannten *Dividiren* über dem Striche (Vergl. Raumer, Geschichte der Pädagogik III, 277) nicht verkennen." Denn eine solche Aehnlichkeit ist bei richtiger Verständniss der Methode des Boethius absolut nicht vorhanden.

426. Veteres igitur geometricae artis indigatores subtilissimi maximeque pytagorici cum omnia certis mensurarum dividentes rationibus ad ea quae natura renueret dividi et secari usque pervenirent ingenio prosignante ea, quae naturaliter erant indivisibilia, positis notis nominibusque datis dispartiere. Cum vero agros per actus, per perticas, idem per radios per gradus, per cubitos, per pedes, per semipedes et per palmos dispersissent non habentes palmum, per quod id quod palmo esset minus digito aut majus unciam vocare maluerunt. In secundo vero loco digitum subscripserunt, in tercio stateram idem semiunciam, in quarto quadrantem, in V dragmam, in VI scripulum,

in VII obolum, in VIII semiobolum quem Greci ceratim nuncupant, in VIIII siliquam, in X punctum, in XI minutum, in XII momentum nominando posuerunt. His ergo minutis adinventis nominibusque editis multiformes eis notas indidere. Quae quia partim Graecae partim erant barbarae nobis non videbantur latinae orationi adjungendae. Quapropter nos rem obscuram obscuris ignotisque notarum signis involvere nolentes. loco earundem notarum latinorum elementorum notas ordine ponemus ita ut a unciae responderet, b digito, c stateri, d quadranti, e dragmae, f scripulo, g obolo, h semiobolo, i siliquae, k puncto, l momento ascribatur. Describatur itaque his literis quam diximus loco hoc figura minutiarum hoc modo. (Dieser Text füllt, soweit mitgetheilt, in E von fol. 72 recto Z. 8 bis fol. 73 verso Z. 6 der Rest der Seite, auf welche die Tabelle nicht mehr gegangen wäre, ist rein. fol. 74 recto zeigt dann die Tabelle (Figur 42). Auf fol. 74 verso beginnt dann der Text auf's Neue.)

Superius vero digestae formulae in descriptione diverse formatis multiformisque utebantur caracteribus. Sed nos non alios praeter quos supra in deformatione abaci depinximus in hujuscemodi opus assumere curamus. Assignavimus enim primam hujus formae lineam unitatibus, secundam X, terciam C, quartam $\overline{\mathrm{I}}$ ed deinceps ceteras lineas ceterorum numerorum limitibus limitavimus. In qua si apices primae opposueris lineae unitates solae tibi occurrent, si lineae secundae X, si terciae C, si quartae mille et deinceps. Sed quia momenti et minuti et ceterorum quantitatis (oder tes?) in ultimo hujus formae positorum non poterat ut aliae multiplicari rursus a secunda notas earum linea angulariter inscribere proposuimus ut si quando aliquis vel C vel $\overline{\mathrm{I}}$ diminutionem vel $\overline{\mathrm{X}}$ vel $\overline{\mathrm{C}}$ momentorum vel minutorum vel punctorum et deinceps proferre juberet sine ullius obstaculi' impeditione ediceret. Illud etiam divisione harum minutiarum non est praetereundum. Dividebant enim unciam in XXIIII scripulos digitum autem in XVIII scripulis, staterem in XII, quadrantem in VI, dragmam in III scripulos, scripulum autem sex siliquis constare decreverunt. Obolum vero tribus siliquis mensurari voluerunt. Ceratim unam et semis siliquam habere constituerunt. Siliquam igitur vicesimam quartam partem solidi vel quadrantis partem significari sanxerunt. In puncto autem duo minuta et dimidium et in minuto IIII momenta esse asseruerunt.

Finitur. (Dieses Wort ist roth geschrieben).

Epilogus incipit (gleichfalls roth geschrieben).

Si qui vero de controversiis et de qualitatibus et nominibus

agrorum deque limitibus et de statibus controversiarum scire desideret Julium Frontinum nec non urbicum aggenum lectitet. Nos vero haec ad praesens dicta dixisse sufficiat.

427. Der Actus ist = 120 Fuss; der Schritt = 5 Fuss; die Handbreite = $\frac{1}{4}$ Fuss oder 4 Zoll; der Finger = $\frac{1}{16}$ Fuss oder 1 Zoll; die Unze = $\frac{1}{12}$ Fuss oder $1\frac{1}{3}$ Zoll.

428. Chasles, Gesch. d. Geomet. S. 537.

429. Damit stimmt auch überein Friedlein l. c. S. 19: „Es ist nicht länger zu zweifeln, dass hier ein Abschnitt aus dem Werk des erwähnten Archytas vorliegt, mag dieser nun was immer für eine Persönlichkeit sein.“

430. Die hier genannte Handschrift findet sich auf der Bibliothek der Stadt Bern unter Nro. 299 in 4°. Sie ist auf Pergament geschrieben und enthält verschiedene wichtige Stücke, welche eine genauere Durchmusterung wünschenswerth machen, als ich bei der kurzen Dauer meines noch obendrein durch die Foliohandschrift Nr. 87 in Anspruch genommenen Aufenthaltes durchführen konnte. Nach der Geometrie des Boethius findet sich eine Abhandlung fol. 30 verso — 40 verso mit der Ueberschrift: Incipit liber Abaci de multiplicationibus ejusdem artis. Von Boethius ist diese Abhandlung keinenfalls, doch kennt der Verfasser die Schrift des Boethius über den Porphyr und citirt sie mit Namen fol. 38 recto, col. 2, lin. 11. Die Zeichen der Minutien stehen fol. 40 recto im Texte, fol. 40 verso bilden sie eine dem Abacus ähnliche Tabelle von sicherlich gleichzeitiger Handschrift mit dem übrigen. Daran schliesst sich alsdann noch merkwürdiger Weise eine Arithmomachie, welche ich aber nicht mehr durchsehen konnte.

430a. Halliwell, Rara mathematica, London 1839. vergl. die dem Appendix vorgeheftete Tafel, die dem Cod. Arund. 343 fol. 1 nachgeahmt ist.

431. Boeckh l. c. (vergl. Anmerkung 233) S. X flg.

432. Auch diesen Ausspruch halte ich für irrig, wenngleich hier nicht näher darauf eingegangen werden soll.

433. So ist doch wohl der Satz zu verstehen: quum is praesertim ex palpabili sive manuali abaco... videatur imitatione expressus esse? wenigstens spricht dafür die hierhergehörige Note 13.

434. Chasles in den Compt. rend. de l'académie vom 26. Juni 1843: XVI, 1412 flgg. Martin, Origine S. 3 flg. Friedlein l. c. S. 14.

435. Compt. rend. de l'académie vom 26. Juni 1843: XVI, 1414.

436. Chasles, Gesch. d. Geom. S. 532 flgg. Auch diese Stelle ist Friedlein entgangen, der, wie schon an mehreren Beispielen sich zeigte, die Arbeiten von Chasles lange nicht genug studirt hat. Sonst hätte er S. 43 sich nicht des Ausdruckes gegen Chasles bedienen dürfen: „Jedenfalls darf ich nicht wie Chasles die nun (sc. unter den Kopfzahlen) folgenden Reihen ganz ausser Acht lassen" und etwas weiter unten: „sie (die letzten Reihen) scheinen wie zur blossen Unterhaltung oder Uebung geschrieben, und mögen desshalb Chasles als unbedeutend erschienen sein."

437. In der Gesch. d. Geom. S. 533 sind zwar nur 11 Kolumnen vorhanden, aber das ist sicherlich ein Druckfehler. Den Beweis liefert S. 532. Z. 23: „in einer anderen Zeile sind die Zahlen 1, 2, 3, 4...12 in römischen Ziffern geschrieben." Das konnte unmöglich bei 11 Kolumnen der Fall sein.

438. Friedlein l. c. S. 43.

439. Friedlein l. c. S. 30.

440. Vincent in Liouville, Journal des mathématiques IV, 261 und in der Revue archéologique II, 601.

441. Martin, Origine S. 36 flg.

442. Aristoteles, Metaphys. VII, II. Ἔνιοι δὲ τὰ μὲν εἴδη καὶ τοὺς ἀριθμοὺς τὴν αὐτὴν ἔχειν φασὶν φύσιν ibid. XVIII, VIII. μέχρι τῆς δεκάδος ὁ ἀριθμός.

443. Meiners, Geschichte des Ursprungs, Fortgangs und Verfalles der Wissenschaften in Griechenland und Rom. Lemgo 1781. Bd. 1, S. 248—250.

444. Kaestner, Geschichte der Mathematik I, 523.

445. Luca Pacciolo: La divina proporzione della disciplina mathematica gedruckt mit gothischen Lettern. Venedig 1494. fol. 19 recto: Abaco cioe modo arabico corropto per ignorantia: over secundo altri e dicta Abaco dal greco vocabulo. Das griechische Wort ἄβαξ ist aber nicht angegeben.

446. Theologoumena ed. Ast. p. 7: εἴκαζον αὐτὴν (τὴν δυάδα) ἐν ἀρεταῖς ἀνδρείᾳ. Dieses Citat entnehme ich Vincent und bezeichne dasselbe durch (V.) wie künftig alle diesem Gelehrten entnommenen Citate.

447. Theon Smyrnaeus, Musica cap. 41 ed. Bulliald. p. 156: κατὰ τὴν δυάδα ἐστὶν ἡ γένεσις.

448. Theon Smyrnaeus, Musica cap. 42 ed. Bullald. p. 157: ἡ δὲ δυὰς συνέλθουσα τῇ μονάδι γίγνεται τριάς.

449. κλειδοῦχος τῆς φύσεως nach Photius (V.)

450. Theologoumena p. 28 (V.)

451. ἀτάλαντα (V.)

452. Variarum ed. Paris 1583 lib. 1. epistola 10. S. 18: Senarium vero quem non immerito perfectum docta Antiquitas definuit unciae, qui mensurae primus gradus est, appellatione signavit (V.).

453. Vergl. darüber Cousin in dem Journal des Savants 1834, S. 432. (V.)

454. Vincent, Journal de Mathématiques (Liouville) IV, 278 in der Note.

455. Nach C. N. de Winsheim (Novi Commentarii Academ. Petrop. Bd. 2. S. 68) sind die vier ersten vollkommenen Zahlen 6, 28, 496, 8128. Nach diesen folgt als fünfte schon: 33550336.

456. Theon Smyrnaeus, Musica cap. 48. ed. Bulliald p. 165: ὁ δὲ τῶν ἐννέα πρῶτος ἐστὶ τετράγωνος ἐν περιττοῖς.

457. καιρός bei Röth l. c. Bd. II, S. 919.

458. Theon Smyrnaeus, Musica cap. 47. ed. Bulliald p. 165: Ὀκτὼ δ' ἐν σφαίρεσσι κυλίνδεται κύκλῳ ἰόντα.

459. Heilbronner l. c. S. 544. Chasles, Gesch. der Geom. S. 526.

460. Chasles, Gesch. der Geom. S. 540:

Ordine primigeno (sibi?) nomen possidet Igin.
Andras ecce locum previndicat ipse secundum.
Ormis post numerus non compositus sibi primus.
Denique bis binos succedens indicat Arbas.
Significat quinos ficto de nomine Quimas.
Sexta tenet Calcis perfecto munere gaudens.
Zenis enim digne septeno fulget honore.
Octo beatificos Termenias exprimit unus.
Hinc sequitur Sipos est, qui rota namque vocatur.

461. Huet, Demonstratio Evangelica, prop. IX. Heilbronner l. c. S. 744. Chasles, Gesch. d. Geom. S. 532, Note 158. Nesselmann, Algeb. d. Gr. S. 97. Graevius, einer der bedeutendsten Philologen des 17. Jahrhunderts, wurde 1622 in Naumburg geboren und starb 1703 in Utrecht.

462. Nesselmann, Algeb. d. Gr. S. 102.

463. Ueber das Manuscript des britischen Museums Nro. 343 von Arundel vergl. Anmerkung 430a und Vincent im Journal des Mathématiques (Liouville) IV, 262 in der Note.

464. Gildemeisters Ansichten s. bei Büdinger, Ueber Gerbert's wissenschaftliche und politische Stellung. Inauguraldissertation 1851. S. 33.

465. Spiegels Ansichten s. bei Friedlein l. c. S. 30.

466. Pollux lib. IX cap. 6. Die von ihm benutzten griechischen Wörter sind *οὐγγία* und *χαλκοῦς* (V.).

467. Gerhardt l. c. S. 99 flg.

468. Nesselmann, Algeb. d. Gr. S. 103.

469. Martin, Origine S. 38.

470. Vincent in der Revue archéologique II, 606. Note 2.

471. Gerhardt l. c S. 105.

472. Chasles, Gesch. d. Geom S. 561.

473. Nesselmann, Algeb. d. Gr. S. 72 flg.

474. Als Quellen dienten mir für arabische Schrift besonders Silvestre de Sacy, Grammaire arabe. Paris 1810 und einige Artikel in Ersch & Gruber's Encyklopädie Bd. V: Arabien in geschichtlicher Hinsicht, S. 39—44, von Rommel, und Arabische Schrift, S. 53 56, Arabische Litteratur, S. 56—69, beide von Gesenius. Einiges entnahm ich auch der schon häufig citirten Abhandlung von Reinaud über Indien, vergl. Anmerkung 91.

475. Vergl. 1. Könige 4, 30.

476. Philosophical Transactions Bd. 48, S. 690—756: An explication of all the inscriptions in the Palmyrene language and character hitherto published in five letters from the reverend Mr. John Swinton etc. Juni 1754. Die auf Zahlzeichen bezüglichen Stellen vergl. S. 712, 721, 728, 741. Beiläufig bemerke ich dass in Pauly's Realencyclopädie s. v. Palmyra auch noch ein anderer Aufsatz citirt ist: Barthélemy in den Mém. de l'acad. des Inscr. Tom. XXIV. Das ist aber ein Druckfehler, der in XXVI verbessert werden muss. Für unsere Zwecke enthält dieser Aufsatz Nichts von irgend welcher Wichtigkeit.

477. Braun, Geschichte der Kunst I, 363.

478. Swinton l c. S. 722: We learn from Diodorus Siculus (Biblioth. Histor. lib. XIX, p. 723 edit. Rhodoman Hanoviae 1604) that the Arabs of Petra, or Al Hejr, on the confines of the desarts of Syria, and at no very great distance from the borders of Irâk, used

the very same letters with those of the neighbouring Syrians and therefor probably of the people of Tadmor (i. e. Palmyra) 311 years before the Birth of Christ. This gives us some reason to believe, considering the situation of the aforesaid Arabs that those letters could not have been very different from those, which three or four centuries afterwards formed the alphabet of the Palmyrenes.

479. Alex. v. Humboldt in Crelle's Journal IV, 212.

480. Alex. v. Humboldt in Crelle's Journal IV, 210. Schätzbares Material findet sich ohne Zweifel noch in dem mir bis jetzt nur dem Namen nach bekannten Werke von Pott, die quinare und vigesimale Zählmethode bei Völkern aller Welttheile. Halle 1847.

481. Zeitschrift der deutschen morgenländischen Gesellschaft Bd. XVI, S. 577. E. Rödiger: die syrischen Zahlzeichen, wie sie in älteren Handschriften zur Numerirung der Pergamentlagen oder Hefte, wie auch zur Zählung von Hymnen, Sentenzen u. dergl. angewendet werden, sind denen, welche sich mit den syrischen Handschriften im britischen Museum beschäftigt haben, nichts Neues..... W. Wright fand solche Zahlen bisher nur in Handschriften des 6. und 7. Jahrhunderts und meint, dass sie später selten vorkommen. Bis jetzt fand er die meisten davon beisammen in Ms. 14581 des Brit. Mus. fol. 12b—23a.... Die Aehnlichkeit dieser Zahlzeichen mit den palmyrenischen im System und in der Art der Zusammensetzung, wie einigermaassen auch in den Figuren ist augenfällig.

482. Friedr. Uhlemann, Grammatik der syrischen Sprache, 2. Auflage. Berlin 1857. S. 4.

483. Silv. de Sacy, Grammaire arabe Bd. 1, S. 76. *Note a* und Tabelle VIII.

484. Silv. de Sacy, l. c. S. 74, Note b.

485. Libri, Histoire des sciences mathématiques en Italie I, 378. Er citirt dabei Abul-Pharajius, Historia Compendiosa Dynastiarum (ed. Pocock, Oxoniae 1663) S. 127 der Uebersetzung und Theophanes, Chronographia (ed. Franc. Combefis, Paris 1655) S. 314. Das erste Citat ist unrichtig und muss heissen S. 129 der Uebersetzung. Dort steht übri ens nur: Christianorum scribis ne amplius graece sed arabice libros (rationum) exararent interdixit. Die Stelle des Theophanes lautet vollständig so: *Καὶ εκώλυσε γράφεσθαι Ἑλληνιστὶ τοὺς δημοσίους τῶν λογοθεσίων κώδικας ἀλλ᾽ Ἀραβίοις αὐτὰ παρασημαίνεσθαι χωρὶς τῶν ψήφων ἐπειδὴ ἀδύνατον τῇ ἐκείνων γλώσσῃ μονάδα ἢ δυάδα ἢ τριάδα ἢ ὀκτὼ ἥμισυ*

ἢ τρία γράφεσθαι· διὸ καὶ ἕως σήμερόν εἰσιν σὺν αὐτοῖς νοτάριοι Χριστιανοί. Martin irrt demnach, wenn er Origine S. 50 Note 186 diese ihm von Brunet de Presle mitgetheilte Stelle als noch nicht von Mathematikern berücksichtigt anführt. Ich selbst habe sie früher besprochen, Zeitschr. Math. Phys. I, 70, kam aber damals noch nicht zum richtigen Verständniss, weil ich versäumt hatte, mir darüber Aufschluss zu verschaffen, wann eigentlich die Bezeichnung der Zahlen durch den Abudjed aufkam. Jetzt ist bekannt, dass diese zu Welid I. Zeiten noch nicht existirte. Darauf möchte ich indessen doch aufmerksam machen, dass, wie ich l. c. schon erwähnte, Herr Prof. Weil, der gelehrte Verfasser der Geschichte der Khalifen, mir versicherte, dass das von Abul-Pharajius angeführte Gesetz in älteren Quellen nirgends erwähnt werde.

486. Die Algebra des Mohammed ben Mousa, das erste Werk welches den Titel Algebra zu führen scheint, ist mehrfach übersetzt. Die älteste lateinische Uebersetzung ist bei Libri, l. c. I, 253—297 abgedruckt. Eine neue Ausgabe des Originals nebst Uebersetzung hat Rosen, London 1833 besorgt.

487. Casiri, Bibliotheca arabico-hispana Escurialensis I, 427: Liber artis logisticae a Mohamado ben Musa Alkhuarezmita exornatus, qui caeteros omnes brevitate methodi ac facilitate praestat, Indorumque in praeclarissimis inventis ingenium et acumen ostendit. Ich entnehme dieses Citat einer Abhandlung von Chasles Compt. rend. de l'académie vom 6. Juni 1859 (XLVIII, 1058 Note 1).

488. Reinaud l. c. S. 302 Note 1 verweist hierfür auf Casiri I, 357.

489. Libri l. c. I, 119 Note 2 verweist auf Notices des manucrits de la bibl. du roi I, 7.

490. Es ist falsch, wenn Libri l. c. I, 378 Avicenna in das 12. Jahrhundert setzt.

491. Abul Pharajius l. c. (s. Anmerkung 485) S. 229 der Uebersetzung: Claruit etiam scientiis philosophicis Abu Ali Al Hosain Abdalla Ebn Sina (Avicenna) doctorum princeps qui haec de se retulit. Pater, inquit, meus Belchensis fuit, unde se in Bocharam transtulit diebus Nuhi Ebn Mansur et villa Harmatain procuranda occupatus est: matremque meam e villa, cui nomen Aphshana, duxit atque ibi ex ea nati sumus, ego et frater meus. Inde quum Bocharam migrassemus, missus sum ad praeceptorem qui Alkoranum et literas humaniores doceret; nec ante decimum aetatis annum complevi, quam Alkoranum magnamque humanioris literaturae partem perdidiceram, adeo ut admirationi

essem. Deinde misit me pater ad Olitorem quemdam, qui Indorum computandi rationem callebat, ut ab eo discerem.

492. Diese Bemerkung hat schon Alex. v. Humboldt gemacht, s. Crelle's Journal IV, 219.

493. Humboldt in Crelle's Journal IV, 223. Eine Notiz von Woepcke über die Gobarziffern, Gobarschreibart und Gobarrechnung (Journal asiatique für October 1854 S. 358 Anmerkung) wurde mir zu spät bekannt, um im Texte mit benutzt zu werden. Wesentlich Verschiedenes von dem, was ich behaupte, liefert sie überdies nicht. Ob der Verfasser derselben seitdem seine Untersuchungen vervollständigte, weiss ich nicht. Veröffentlicht ist, wie es scheint, keine Fortsetzung derselben.

494. Friedlein l. c. S. 41.

495. Gerhardt l. c. S. 99 in der Note.

496. Friedlein l. c. S. 40.

497. Humboldt in Crelle's Journal IV, 227. Böckh hat in dem oft benutzten Sommerkatalog 1841 den griechischen Text auf S. VIII Note 10 mitgetheilt. Er heisst: *ἀριθμοὶ Ἰνδικοί*, worauf in zwei Zeilen die Zahlen von 1 bis 100 folgen. Die Zeichen sind die von Figur 50 nur mit dem im Texte erläuterten Unterschiede, dass die kleinen Kreise, welche Null bedeuten, über den Ziffern stehen. Dann heisst es weiter: *Τζύφρα ἔστι καὶ λέγεται τὸ ἐπάνω ἑκάστου τῶν στοιχείων ἀπὸ τοῦ δέκα καὶ τῶν καθεξῆς ἀριθμῶν κείμενον ὡς ō μικρόν· σημαίνει δὲ διὰ ταύτης τῆς Ἰνδικῆς φωνῆς τὸ τοιοῦτον τὴν ἀναλογίαν τῶν ἀριθμῶν. ἔνθα οὖν κεῖται ὅμοιον μὲν τοῦ πρώτου στοιχείου ἄλφα, κειμένου δὲ ἀντὶ ἑνὸς ἀριθμοῦ, καὶ ὑπερκείμενον ἔχον ἢ στιγμὴν ἢ ὡς ō μικρόν, ἔχον δὲ συγκείμενον αὐτῷ καὶ ἕτερον σχῆμα στοιχείου Ἰνδικοῦ τὴν διαφορὰν καὶ αὔξησιν τῶν ἀριθμῶν δηλοῖ· οἷον ἀντὶ τοῦ καθ' Ἕλληνας πρώτου ἀριθμοῦ α κειμένου παρ' Ἰνδοῖς I, ἤγουν γραμμή τις εὐθεῖα κατὰ κάθετον φερομένη, ἐπειδὴ οὐκ ἔχει ὑπὲρ αὐτὴν ἢ στιγμὴν ἢ ō μικρόν, αὐτὸ τοῦτο δηλοῖ ἕνα ἀριθμόν. εἰ δὲ τεθῇ ἐπάνω ἢ στιγμὴ ἢ ō μικρόν, προτεθῇ δὲ καὶ ἕτερον στοιχεῖον, εἰ μὲν ὅμοιον κατὰ σχῆμά ἐστι τοῦ πρώτου, δηλοῖ ια διὰ τὴν προςθήκην τοῦ ὁμοίου στοιχείου καὶ τῆς ὑπερκειμένης μιᾶς στιγμῆς. ὁμοίως καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων στοιχείων, ὡς καὶ ἡ ἄισθησις δηλοῖ. εἰ δὲ πλείονας ἔχει στιγμάς, πλείονα δηλοῖ. γνῶθι οὖν ὁ ἀνογινώσκων, καὶ ἀναλόγιζε ἕκαστον αὐτῶν.*

498. Für die Notizen über die Cultur der Araber benutzte ich besonders Gesenius in Ersch & Gruber's Encyclopädie V, 58 flg. und Reinaud l. c. S. 310 flgg.

499. Dass schon unter Welid griechische Schreiber bei den Arabern lebten, zeigte die Stelle des Theophanes, Anmerkung 485. Ueber den Einfluss nestorianischer Christen seit den ersten Jahrhunderten moderner Zeitrechnung vergl. auch Libri l. c. I, 113.

500. Friedlein l. c. S. 41. Note 19.

501. Weil, Geschichte der Khalifen II, 283 flgg.

502. Reinaud l. c. S. 298 flg.

503. Sedillot, Matériaux pour servir à l'histoire comparée des sciences mathématiques chez les Grecs et les Orientaux. Paris 1845—49. S. 461.

504. Ersch u. Gruber's Encyclopädie V, 67.

505. Reinaud l. c. S. 303 flg.

506. Liber Maumeti filii Moysi Alchoarismi de algebra et almuchabala. Vergl. Libri l. c I, 298.

507. Posita est in hoc volumine ab alkauresmo examinatio planetarum etc. Ferner: Postquam composuit canones Machometus Alchocharithmi super annos Persarum etc. Vergl. Reinaud l. c. S. 375.

508. Raynouard, Lexique Roman, Paris 1836. II, 54: Algorisme s. m. algorithme, art du calcul. L'abac e l'algorisme aprezi (P. de Corbiac). Qu'on peut juger ung chiffre en algorisme. J. Marrot V, 80. Anc. Esp. Alguarismo. Esp. mod. Algoritmo. Port. Algarismo. Ital. Algorismo.

509. Chasles in den Compt. rend. de l'académie vom 6. Juni 1859 (XLVIII, 1058 Note 2).

510. Halliwell, Rara mathematica, London 1839. S. 1. Z. 6 und Note 2. S. 73 Note 2. S. 94.

511. Es ist das Manuscript Nro. 1227, welches so anfängt: Omnia quae a primaria rerum cognitione processerant ratione numerorum formata sunt. Quae quemadmodum sunt ita cognoscenda habentur... ars numerandi operata est. Hanc scilicet scientiam numerandi compendiosam philosophus edidit nomine algus unde algorismus nuncupatur ut ars introductoria in numerorum interpretationem. Dieser Anfang stimmt fast wortgetreu mit dem Tractatus de arte numerandi von Johannes de Sacrobosco, welchen Halliwell l. c. S. 1—26 publicirte. Ob auch die Fortsetzung diese Identität bestätigt, bleibt

weiterer Untersuchung vorbehalten. Meine Excerpte sind vorläufig nicht vollständig genug um schon endgültig zu entscheiden.

512. Nesselmann, Algebr. d. Griech. S. 103.

513. Trattati d'aritmetica publicati da Baldassarre Boncompagni. Roma 1857. Von den beiden erschienenen Heften enthält I. Algoritmi de numero Indorum S. 1—23. II. Joannis Hispalensis liber algorismi de pratica arismetrice. S. 25—136.

513a. Der einzige Umstand, welcher mich in Bezug auf Atelhart von Bath als Uebersetzer etwas zweifelhaft lässt, besteht darin, dass Chasles selbst früher (Compt. rend. de l'académie vom 30. Januar 1843, XVI, 238 Note 7⁰) von einer Abhandlung des Atelhart über den Abacus sprach, die er in seiner letzten Arbeit nicht weiter beachtet.

514. Est quoque diversitas inter homines in figuris earum. Trattati etc. S. 1 Z. 2 v. u.

515. Si nihil remanserit, pones circulum, ut non sit differentia uacua: set sit in ea circulus qui occupet ea, ne forte cum uacua fuerit, minuantur differentie, et putetur secunda esse prima. Trattati etc. S. 8.

516. Eine Möglichkeit wäre freilich noch vorhanden, die Sexagesimalabtheilung sowohl in Indien als in Griechenland zu rechtfertigen, ohne dass das eine Volk dem andern sie mitgetheilt hätte. Das wäre die Annahme einer Urheimath in Babylon, von wo sie nach beiden Seiten hin gelangen konnte. Ob diese Annahme erlaubt ist, lässt sich bei dem Stande der jetzigen Kenntniss babylonischer Wissenschaft nicht entscheiden.

517. Als Quelle diente vorzüglich Aschbach, Geschichte der Ommaijaden in Spanien, Bd. 2. Frankfurt a. M. 1830.

518. Woepcke, Note sur des notations algébriques employées par les Arabes in den Compt. rend. de l'académie vom 17. Juli 1854, XXXIX, 162 flgg. Ausführlicher in dem Journal asiatique série 5. tome IV für 1854. S. 348—384.

519. Der vollständige Name ist bekanntlich Aljebr wa'lmukâbalah und heisst wörtlich übersetzt Herstellung und Vergleichung. Ueber den Sinn dieser Ausdrücke s. Nesselmann, Alg. d. Griech. S. 45—51.

520. Vergl. Nouvelle biographie universelle XXVI, 565. Paris 1858.

521. Nesselmann veröffentlichte (Berlin 1843) eine Uebersetzung

dieser Schrift, welche mir aber erst zu Gesicht kam, als die 17 ersten Kapitel dieses Buches im Drucke vollendet waren, so dass ich sie nicht mehr benutzen konnte. Indessen wären die etwaigen Veränderungen keine wesentlichen sondern höchstens einige kleine Zusätze hie und da.

522. An einem anderen Orte (Zeitschr. Math. Phys. II, 361) habe ich nach Strachey die Lebenszeit des Beha-eddin auf 1575—1653 angegeben. Nesselmann (S. 74 seiner Uebersetzung) bestimmt sie auf 1547—1622.

523. Denominatio vero fractionis est appellatio ipsius quota pars unius integri ipsa est, ut medietas, vel tertia, vel quarta, vel hujusmodi. Trattati etc. S. 56.

524. Trattati etc. S. 87—90.

525. Zeitschr. Math. Phys. II, 373.

526. Nesselmann, Algebr. d. Griech. S. 139—148.

527. Vergl. den Artikel Isidore de Seville von F. Hoefer in der Nouvelle biographie universelle. XXVI, 57—71. Paris 1858.

528. Opera Isidori Hispalensis edidit F. Arevoli. Roma 1797—1803.

529. Isidori Origines. Liber III. De quatuor disciplinis mathematicis. Caput I. Arithmetica est disciplina numerorum. Graeci enim numerum ἀριϑμόν dicunt. Quam scriptores secularium litterarum inter disciplinas Mathematicas ideo primam esse voluerunt, quoniam ipsa ut sit nulla indiget disciplina. Musica autem et Geometria et Astronomia, quae sequuntur ut sint atque subsistant istius egent auxilio.

530. Centum vero vocati a κανϑός quod est circulus. Mille a multitudine unde et militia quasi multitia.

531. Venerabilis Bedae opera quae supersunt omnia edidit Giles. London 1843. 12 Bände 8°.

532. Zeitsch. Math. Phys. I, 71.

533. Wattenbach, Deutschlands Geschichtsquellen im Mittelalter. Berlin 1858. S. 81: Einen Mann wie diesen Beda hat die gesammte irische Kirche nicht hervorgebracht; er war der Lehrer des ganzen Mittelalters. Durch mathematische Kenntnisse haben grade die Schotten sich ausgezeichnet, auf ihren Unterricht mag ein bedeutender Theil der Gelehrsamkeit Bedas sich, wenn auch nur mittelbar zurückführen lassen, ihm aber war es vorbehalten, durch die Gediegenheit und Fasslichkeit seiner Lehrbücher für Jahrhunderte in jedem Kloster die An-

leitung zu den nöthigen astronomischen Kenntnissen zu geben; wo man es verschmähte tiefer einzudringen, benutzte man wenigstens seine Ostertafeln als unentbehrliches Hülfsmittel der kirchlichen Zeitrechnung.

354. Bedas Todesjahr wird verschiedentlich angegeben. Die Datumsangabe, der ich folge, beruht auf indirecter Berechnung. Beda soll nämlich am Himmelfahrtsfest gestorben sein, als es auf den 26. Mai fiel. Innerhalb der überhaupt möglichen Zeit trat dieses aber nur 735 ein. Mag indessen auch darauf kein bestimmter Verlass sein, das Datum 731 hat Beda sicherlich noch erlebt, da es in seiner Kirchengeschichte noch behandelt ist. Jedenfalls ist sonach die, so viel ich weiss, bisher übrigens unbemerkt gebliebene Angabe falsch, dass Beda im Jahre 721 gestorben sei. Vergl. die 1045 verfasste Chronik des Mönches Odoramnus bei Duchesne, Historiae Francorum scriptores, Paris 1636. Bd. II, S. 636.

535. Bedae opera ed. Giles VI, 139—342: De temporum ratione.

536. Beide Schriften sind noch vorhanden und im 6. Bande der Gesammtausgabe Bedas von Giles abgedruckt: De natura rerum liber S. 100—122 und de temporibus liber S. 123 –138.

537. Giles Vorrede zum 6. Bande von Bedas Werken S. V—VIII.

538. Caput I. De computo vel loquela digitorum, ed. Giles VI, S. 141–144.

539. Caput IV. De ratione unciarum, ed. Giles VI, S. 147—149.

540. Nomina pariter et figuras eorum paucis affigere curavimus.

541. Die Uncialzeichen finden sich in den folgenden Ausgaben von Bedas Werken: ed. Basileae 1563. Bd. I. S. 182 und ed. Coloniae Agrippae 1688. Bd. I. S. 141.

542. Amongst these (more favoured pupils) we may notice... Constantine for whose use he edited a dissertation concerning the division of numbers. Giles l. c. Bd. I, S. LXXVI.

543. Andres, Dell' origine dei progressi e dello stato attuale d'ogni letteratura IV, 53. (Parma 8 Bände 4^{0}. 1782 flgg.) Da ich selbst das Werk nie gesehen habe, so citire ich nach Martin, Origine S. 10. Note 53.

544. Chasles Gesch. der Geom. S. 529 und 589. Dann Compt. rend. de l'académie vom 23. Januar und 6. Februar 1843: XVI, 156 und 295 Note 1.

545. Böckh, Sommerkatalog der berliner Universität 1841. S. II. Note 1.

546. Chasles, Gesch. d. Geom. S. 591. Note 233.

547. Dieser Victorius beschäftigte sich unter Anderem auf Geheiss des heil. Leo mit Festsetzung von Ostern und vollendete diese Arbeit im Jahre 457. Darnach wäre er jedenfalls vor Boethius zu setzen. Vergl. Histoire litteraire de la France Bd. II. S. 424—428, wo aber einer eigentlich mathematischen Thätigkeit nicht gedacht wird.

548. Artikel Alcuin in der Nouvelle Biographie universelle I, 720—726. Paris 1852. Ferner Wattenbach l. c. S. 93—94.

549. Wattenbach l. c. S. 91.

550. Bedae Opera ed. Giles, Bd. VI. Vorrede S. XIII.

551. Alcuini opera. Regensburg 1777 (zweite Ausgabe vom Abt Frobenius verbessert und vermehrt nach der ersten 1617 von Duchesne veranstalteten) II, 440—448.

552. Die allgemeine Auflösung ist $20-3x$ Männer, $5x$ Frauen, $80-2x$ Kinder; daraus entstehen die 7 speciell möglichen Auflösungen, indem x einen der Werthe 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 erhält.

553. Misi aliquas figuras Arithmeticae subtilitatis laetitiae causa.

554. Friedlein l. c. S. 41 Note 20.

555. Archiv der Gesellschaft für ältere deutsche Geschichtskunde herausgegeben von Pertz. IX, 513—658. Die hier wichtige Stelle auf S. 623.

556. Tunc monuit Flaccus, veniat quo primus agogus.
Quem petat exegi, Francum refert Aribertum.

557. Archiv der Gesellschaft für ältere deutsche Geschichtskunde herausgegeben von Pertz VII, 172.

558. Archiv d. Gesellsch. u.s.w. VII, 363.

559. Das Manuscript ist in der züricher Stadtbibliothek bezeichnet als C 78, 451, 4°.

560. Als Quellen für das Leben Odo's benutzte ich Martin, Origine S. 33. Wattenbach l. c. S. 208 und 325 und den Artikel Odon von B. Hauréau in der Nouvelle Biographie universelle XXXVIII, 487—490. Paris 1862.

560a. Wattenbach l. c. S. 325 giebt die Jahreszahl 947, die jedenfalls wegen des früheren Todes von Odo ein Druckfehler ist.

561. Bibliotheca Benedictina Mauriana herausgegeben von Bernhard Pez, Augsburg 1716. S. 419—492. Die hier wichtige Stelle

S. 472: Odo venerabilis Abbas Cluniacensium, ardentissimus amator monasticae religionis, qui Monachorum Gemma, qui discipulorum suorum gloria fuit, Dialogum satis utilem de Musica arte composuit. Scripsit praeterea librum praestantissimum monachisque utilissimum, librum videlicet Occupationum. Dabei steht am Rande die Jahreszahl 926.

562. Scriptores ecclesiastici de musica, ed. Martinus Gerbertus. St. Blasien 1784. Die Schrift Tonora per ordinem cum suis differentiis steht Bd. I, S. 247—250. Dann folgt S. 251 die Vorrede zu einem Dialoge über Musik. Musica Domni Oddonis S. 252—264. D. Oddo, de musica S. 265—284. Regulae domini Odonis de Rhythmimachia S. 285—295. Regulae Domini Oddonis super abacum S. 296—302.

563. Si quis notitiam abaci habere desiderat, necesse est, ut in consideratione numeri studeat. Haec ars non a modernis sed ab antiquis inventa, ideo a multis negligitur, quia numerorum perplexione valde implicatur, ut majorum relatione didicimus. Hujus artis inventorem Pythagoram habemus. Cujus studium itaque in quibusdam est necessarium, ut absque ipsius peritia vix aliquis arithmeticae perfectionem adtingat, et calculationis, id est, computi argumenta comprehendat. Quodsi hanc artem a paganis traditam sancti doctores otiosam sensissent, numquam regulas sanctae Ecclesiae necessarias illius auctoritate firmassent. Si quis enim Venerabilis Bedae libros de computo legere voluerit, absque hujus artis notitia parum proficere poterit. Haec in quadrivio, id est, in Musica, Arithmetica, Geometrica, Astronomia, ita est necessaria et utilis, ut sine illa pene omnis labor studentium videatur inanis. Hanc antiquitus Graece conscriptam, a Boetio credimus in latinum translatam. Sed quia liber hujus artis est difficilis legentibus, quasdam regulas...... capientium decerpere inde curavimus.

564. Le terme le plus usité (pour les colonnes) dans tout le cours du XI^e^ siècle a été a r c u s. Chasles in den Compt. rend. de l'académie vom 6. Februar 1843. XVI, 282.

565. Chasles, in den Compt. rend. de l'académie von 23. Juni 1843. XVI, 1396.

566. Non abludunt admodum cifrae in Msc. ab his Arabicis, tantum in ductuum varietate: Numerus 1. nihil differt. 2. T. repraesentat cum semicirculo in dextra. 3. Sigma Graecum cum caudula in se ad dextram conversa. 4. dimidium octonarium horizontalem sectum linea cum caudula item in se conversa. 5. litteram η. 6. litte-

ram L cum semicirculo ad dextram in se converso. 7. litteram *A* exhibet. 8. nihil differt. 9. lineola tantum inferius ducta in dextrum latus.

567. Summa vocatur, quod in summitate arcuum, fundamentum autem quidquid inferius disponitur. Et quod ex utroque numero procedit multiplicato inter duas lineas ponitur.

568. Quidquid dividendum est in abaco in medio ponitur; divisores praeponuntur; denominationes autem, hoc est, partes divisae supponuntur. His ita in abaco dispositis considerare debes, in quo arcu locum habeant divisores. Si singularis sub se ponetur; si decenus secundabit; si millenus quadrabit.

569. Quae omnia magis unicae vocis alloquio quam scripta advertuntur.

570. Sicilicus, qui apud graecos et Ebraeos siclus, vel sichel nuncupatur, unciam quartat.

570a. In dem von Halliwell veranstalteten Abdruck eines Manuscriptfragmentes (vergl. Anmerkung 430 a) heisst in der That der kleinste Bruchtheil: chalcus.

571. Scrupulos continet octo calcos, qui calcus ultimus est in minutiis. (S. 300 Z. 1 der 1. Columne) Calculus est bis millesima trecentesima [quarta] pars assis (S. 302 ganz am Ende).

572. Bernelini, Cita et vera divisio monochordi in diatonico genere S. 312—330. Die für uns wichtige Anmerkung Gerbert's auf S. 315, Note f: Consultum quoque duxi, signa minutiarum, quae in sequentibus occurrunt, ex Regulis Dni Oddonis super Abacum, hic apponere, adjuncto cujuslibet valore cyfris Arabicis.

573. Nec mirandum est aliquid de minutiis superesse, cum alias artes in multis videam vacillare. Quamvis enim grammatica amplioribus sit discussa philosophis, tamen ut caeterae artes aliquid habet imperfectionis, scilicet et in generibus et in personis. Cum enim coelum in singulari generis sit neutri, in plurali fit masculini Et ut paucis concludam, qui in septem artibus vult studere, plurima perfectione carentia poterit invenire; nam sicut est antiquum proverbium: nihil est omni parte beatum. Rerum vero Parens, qui solus cuncta tuetur, cum sit cunctipotens, perfectus solus habetur. (Sollte der letzte Satz zwei sich reimende Hexameter darstellen?)

574. Nouv. Biograph. universelle XXXVIII, 497—498. Par. 1862.

575. Hier will ich nur soviel bemerken, dass auch in der Rhythmimachie S. 286 Boethius citirt ist.

576. Als Quellen wurden besonders benutzt: Hock, Gerbert oder Pabst Sylvester II und sein Jahrhundert, Wien 1837. Büdinger, Ueber Gerbert's wissenschaftliche und politische Stellung, Marburg 1851. Martin, Origine S. 9—32. Wattenbach l. c. S. 203—204. Beiläufig kann ich hier einen zwischen Büdinger und Hock streitigen Punkt zur Erledigung bringen. Büdinger bemerkt nämlich in seinem Vorworte (Note 2), eine von Hock unter dem Autornamen Köler citirte Schrift rühre von einem gewissen Magister Spörl her, der sie 1722 unter dem Rectorate Kölers als Dissertation verfasste. Die Zahl 1722 ist nun ein Druckfehler statt 1720. Im Uebrigen hat Büdinger der Form nach Recht: das Titelblatt der auch auf der heidelberger Universitätsbibliothek vorhandenen und von mir verglichenen Dissertation nennt Spörl als Verfasser. Der Sache nach verhält es sich, wie Hock citirt: Köler war der eigentliche Verfasser der Abhandlung, die er auf Grund seiner Untersuchungen wohl nur von seinem Schüler Spörl ausarbeiten liess in ähnlicher Weise, wie die Vorsteher grösserer chemischer Laboratorien heute oft ihre Forschungen einem Schüler zu einer Dissertation überlassen. Der Beweis, dass diese Auffassung die richtige ist, findet sich in der 1727 publicirten Abhandlung von Weidler (vergl. Anmerkung 400) auf S. 15. Dort sagt nämlich dieser Gelehrte, der von Altdorf zurückkam, wo er persönlich mit Köler verkehrt hatte: Ceterum de historia Gerberti optime meritus est celeberr. Dn. Jo. Dav. Koelerus, qui eum tanquam eximium medii aevi philosophum peculiari et erudita dissertatione Altorfii A. 1720 laudavit.

577. Aschbach, Geschichte der Ommaijaden in Spanien II, 195.

578. Hock l. c. S. 63. Dagegen Rerum Gallicarum et Francicarum scriptores (ed. par des religieux bénédictins de la Congrégation de S. Maur) IX, 2. In einer kurzen Notiz über die Astronomie des Boethius, welche ich am 8. September 1862 dem Prinzen Boncompagni brieflich mittheilte, und welche in den Annali di Matematica IV, 256 abgedruckt wurde, hat sich durch einen Druckfehler, oder möglicherweise durch einen Schreibfehler von meiner Seite, das Datum 972 eingeschlichen, obschon damals die Ueberzeugung bei mir fest stand, dass es 982 heissen muss.

578a. Das Gedicht auf Boethius, welches die Inschrift gebildet haben mag, ist abgedruckt bei Hock l. c. S. 225.

579. Scandit ab R Gerbertus in R, post Papa viget R.

580. Hock l. c. S. 184 d. citirt den Anfang jener Abhandlung G. LXXIII von St. Emmeran in Regensburg in den Worten: Theosopho

J. G. filius ejus, licet minus idoneus, quidquid salutis in Christo patri filius. Vergl. Chasles, Gesch. d. Geom. S. 588; ferner denselben in den Compt. rend. de l'académie vom 6. Februar und 26. Juni 1843, XVI, 295 in der Note und 1396 in der Note.

581. Duchesne, Historiae Francorum scriptores. Paris 1636. II, 792 und 794: epist 17. und 25.

582. Duchesne l. c. II, 793: epist. 24.

583. Richerus lib. III cap. 46—54 in den Monumenta Germaniae III, 617 flgg.

584. C. F. Weber, Osterprogramm des kasseler Gymnasiums 1847. Ich selbst kenne das Programm nicht und citire es nach Büdinger S. 48, Note 130.

585. Büdinger l. c. S. 38—42.

586. Duchesne l. c. II, 820: epist. 134. Büdinger l. c. S. 28. Note 103. Friedlein l. c. S. 37—39. Nach Friedleins Lesarten lautet der Brief folgendermassen: Bene quidem intellexistis de numero 1⁰ (statt D) quomodo se ipsum metiatur; semel namque unus unus est; sed non idcirco omnis numerus se ipsum metitur, qui sibi aequus est. Nam cum semel IV sint IV, non ideo IV metiuntur IV, sed potius duo. Bis enim bini IV sunt. Porro I litera, quam sub figura X adnotatam reperisti X significat unitates, quae in sex et IV distributae sesquialteram efficiunt proportionem. Idem quoque in III ed duobus perspici licet, ubi unitas est differentia.

587. Hock l. c. S. 147 und 174.

588. B. Pez, Thesaurus anecdotorum novissimus T. III pars 2 (Augsburg 1721) S. 5—82 enthält Gerbert's Geometrie nach einem Manuscripte des 12. Jahrhunderts aus der Stiftsbibliothek St. Peter in Salzburg.

589. Chasles, Gesch. d. Geom. S. 588.

590. Chasles in den Compt. rend. de l'académie vom 6. Februar 1843, XVI, 281—299 der Widmungsbrief S. 295. Bei Duchesne l. c. II, 827 ist derselbe als epist. 169 abgedruckt.

591. Abbas scholaris.

592. Zeitschr. Mathem. Phys. I, 72.

593. Hock l. c. S. 65. Der Brief Gerbert's an Rainaud bei Duchesne l. c. II, 819 epist. 130.

594. Büdinger l. c. S. 42, Note 112 nach dem vorerwähnten Programme (Anmerkung 584) von C. F. Weber. Aus derselben Quelle citirt er die Verse:

Omnia si numero quapropter ad omnia constant,
Omnibus ut prosis, utere, rex numero.

595. Duchesne l. c. II, 824 enthält den Brief Ottos als epist. 153, Gerbert's Antwort als epist. 154. Hock l. c. hat beide Briefe S. 213 flg. im Urtexte, S. 111 flgg. in Uebersetzung mitgetheilt.

596. Bouquet, Recueil des historiens des Gaules et de la France X, 146. — Monumenta VI, 130. — Hock l. c. S. 230.

597. Büdinger l. c. S. 8.

598. Martin, Origine S. 21—23 giebt eine sehr vollständige Zusammenstellung der Urtheile der Zeitgenossen und unmittelbaren Nachfolger über Gerbert. Die Stelle aus der Chronik von Verdun S. 22. Nach Martin steht deren Abdruck Monumenta VI, 8.

599. Büdinger l. c. S. 14.

600. Hock l. c. S. 162—164.

601. Diesen Punkt hat Gerhardt l. c. S. 112 ausdrücklich hervorgehoben.

602. Ich habe diese Ansicht auch schon in früherer Zeit ausgesprochen Zeitschr. Math. Phys. I, 74.

603. Compt. rend. de l'académie vom 23. Januar 1843; XVI, 164.

604. Compt. rend. de l'académie vom 23. Januar 1843: XVI, 165 Note 1.

605. Compt. rend. de l'académie vom 26. Juni 1843: XVI, 1418 Note 2.

606. abacizare vergl. Compt. rend. XVI, 1417 flg.

607. Wattenbach l. c. S. 237—239.

608. Heilbronner l. c. S. 454 u. 601.

609. Histoire litteraire de la France VII, 30, 137 flg., 177.

610. Wattenbach, l. c. S. 285: „Die Lütticher Schule, welche schon in dem vorigen Zeitraume sich zu bedeutendem Ansehen erhob, erreicht in dem gegenwärtigen (sc. im 11. Jahrhundert) ihren Höhepunkt; sie war der Leben ausströmende Mittelpunkt nicht für Lothringen allein, über ganz Deutschland und bis nach England erstreckte sich ihre Wirksamkeit, auch wohl nach Frankreich."

611. Compt. rend. XVI, 1418.

612. Compt. rend. XVI, 1410.

613. Compt. rend. XVI, 1415.

614. Compt. rend. XVI, 161.

615. Histoire litteraire de la France VII, 32, 138, 156.

616. Compt. rend. XVI, 167.

617. Histoire litteraire de la France VII, 89 flgg., 143.

618. Compt. rend. XVI, 1413 Note 1). Jam vero cui potissimum disciplinae instrumentum hoc adjuventum sit expediendum est. Et quidem cum et ad arithmeticae speculationis investigandas rationes, et ad eos qui musices modulationibus deserviunt numeros, necnon et ad ea quae astrologorum sollerti industria de variis errantium siderum cursibus, ac pari contra mundum nisu licet annos suos pro disparium circulorum ratione admodum diverso fine concludant, reperta sunt, insuper et ad platonicas de anima mundi sententias, et ad omnes fere veterum lectiones qui circa numeros subtilem adhibuere diligentiam, Abacus valde necessarius inveniatur, maxime tamen geometricae disciplinae formulis inveniendis, sibique invicem coaptandis quibus terrarum marisque spatia mirabili indagatione comprehendisse putantur, hujus tabulae usus accommodus et ab illius artis professoribus repertus perhibetur. Sed quum ea de qua sermo est disciplina apud omnes ferme occidentalium partium incolas oblivioni tradita est, contigit et hanc calculandi disciplinam, utpote cujus fructus, cessante arte ad cujus adminiculum reperta fuerat, non adeo magnus advertebatur, in contemptum venisse, nisi quantum a summae prudentiae viro Gerberto, cui Sapientis cognomen fuit, atque ab eximio doctore Hermanno eorumque discipulis, usque ad nostra tempora derivata, a fontibus illorum modica licet praedictae scientiae vena manavit.

619. Compt. rend. XVI, 1407.

620. Compt. rend. XVI, 1403.

621. Compt. rend. XVI, 1405.

662. Regule Abaci. Der Abdruck des Urtextes Compt. rend. XVI, 237—246. Die Uebersetzung ibid. 218—234.

623. Wattenbach l. c. S. 338. Note 2. Si quis incumbebat laboribus antiquorum, notabatur et non modo asello Arcadiae tardior, sed obtusior plumbo vel lapide omnibus erat in risum.

624. Compt. rend. de l'académie vom 24. Juli 1843, XVII, 143—154.

625. Zeitschr. Math. Phys. I, 68 und 69.

626. Libri, Histoire des sciences mathématiques en Italie II, 25.

627. Ueber Plato von Tivoli finden sich ausführliche Berichte in der Brochüre: Delle versioni fatte da Platone Tiburtino traduttore del secolo duodecimo notizie raccolte da B. Boncompagni. Roma 1851.

628. Libri l. c. I, 168 flg.

629. Scritti di Leonardo Pisano pubblicati da B. Boncompagni. Roma 1857—1862. I, 1: Cum genitor meus a patria publicus scriba in duana bugee pro pisanis mercatoribus ad eam confluentibus constitutus preesset, me in pueritia mea ad se venire faciens, inspecta utilitate et commoditate futura, ibi me studio abbaci per aliquot dies stare voluit et doceri. Ubi ex mirabili magisterio in arte per novem figuras indorum introductus, scientia artis in tantum mihi pre ceteris placuit, et intellexi ad illam, quod quicquid studebatur ex ea apud egyptum, syriam, greciam, siciliam et provinciam cum suis variis modis, ad que loca negotiationis tam postea peragravi per multum studium et disputationis didici conflictum. Sed hoc totum etiam et algorismum atque arcus pictagore quasi errorem computavi respectu modi indorum. Quare amplectens strictius ipsum modum indorum et attentius studens in eo, ex proprio sensu quedam addens, et quedam etiam ex subtilitatibus euclidis geometrice artis apponens, summam hujus libri, quam intelligibilius potui, in. XV. capitulis distinctam componere laboravi.

630. Scripsistis mihi domine mi magister Michael Scotte, summe philosophe, ut librum de numero, quem dudum composui, vobis transcriberem.

631. Ueber Michael Scotus vergl. Nouv. Biographie univers. XXXV, 363. Paris 1861.

632. Libri l. c. II, 24 Note 2.

633. B. Boncompagni, Intorno ad alcune opere di Leonardo Pisano, mathematico del secolo decimoterzo. Roma 1854. S. 98 Note.

634. Boncompagni, Intorno ad alcune opere di Leonardo *Pisano* S. 30 flgg.

635. Woepcke in Liouville, Journal de Mathématiques XX. und Terquem in den Nouvelles annales de mathématiques XV, Bulletin de bibliographie pag. 5.

636. Die kleineren Abhandlungen des Leonardo von Pisa sind dreimal durch den Prinzen Boncompagni herausgegeben. Zuerst unter dem Titel Tre scritti inediti di Leonardo Pisano. Florenz 1854. 8°. Dann in zweiter Auflage mannigfach verbessert als Opuscoli di Leonardo Pisano. Florenz 1856. 8°. Endlich die dritte Ausgabe findet sich in dem zweiten Bande der Gesammtwerke zugleich mit der Practica Geometriae. Der Titel dieses Bandes lautet: Scritti di Leonardo Pisano, Matematico del secolo decimoterzo pubblicati da Bald. Boncompagni. Roma 1862. 4°.

637. Journal de Mathématiques XX, 57.

638. Zeitschr. Math. Phys. I, 73.

639. Compt. rend. de l'académie vom 6. Juni 1859, XLVIII, 1060 flg.

640. Woepcke im Journal Asiatique série V, tome 4 (October 1854) S. 351 sagt hierüber: Il paraissait d'après cela, que les Arabes tout en enrichissant la théorie de l'algèbre de découvertes originales et importantes, comme l'est, par exemple, la construction géométrique des équations du 3e degré, étaient restés ou redescendus, par rapport à la forme, au-dessous de leurs devanciers.

641. Scritti di Leonardo Pisano I, 173. Est enim alius modus quo utimur, videlicet ut ponas pro re ignota aliquem numerum notum ad libitum, qui integraliter dividatur per fractiones, que ponuntur in ipsa questione: et secundum positionem illius questionis, cum ipso posito numero studeas invenire proportionem cadentem in solutione illius questionis.

642. Scritti di Leon. Pis. I, 318. Incipit capitulum 13 de regulis elchatayn. Elchataieym quidem arabice, latine duarum falsarum posicionum regula interpretatur, per quas fere omnium questionum solutio invenitur..... In quibus totum elchataieym, scilicet duas positiones, ponere non opportet etc.

643. Auszüge aus dem Reisebericht des El-Abdery hat Cherbonneau herausgegeben: Journal Asiatique serie V, tome 4 S. 144—176, die Beschreibung von Bugia S. 158.

644. Scritti di Leon. Pis. I, 19.

645. Scritti di Leon. Pis. I, 17.

646. Ich habe diese Methode Shabacah ausführlicher beschrieben Zeitschr. Math. Phys. II, 359.

647. Die Auseinandersetzung der Methode Vajrábhyása (Vajra, der Blitz und Abhyása, wechselseitige Multiplication) findet sich in Ganesa's Commentar zu §. 15. der Lilavati und in der Vija-ganita §. 77.

648. Scritti di Leon. Pis. I, 30.

649. Scritti di Leon. Pis. I, 78—83.

650. Nesselmann, Uebersetzung des Beha-eddin S, 64, Anmerkung 13: Eine Eigenthümlichkeit, die sich auch im Griechischen findet, sind die complicirten Brüche; wenn nämlich der Zähler grösser als 1 ist, so zerlegt man häufig den Bruch in zwei andere, die dann als Summe vereinigt werden.

651. Scritti di Leon. Pis. I, 406.

652. Nesselmann, Algeb. d. Griech. S. 51.

653. Scritti di Leon. Pis. I, 2.

654. Scritti di Leon. Pis. I, 7: Scribantur 12 bis in tabula dealbata, in qua littere leviter deleantur.

655. Scritti di Leon. Pis. I, 5 und 30.

656. Scritti di Leon. Pis I, 181.

657. Scritti di Leon. Pis. I, 31: Et sub ipsa tertia figura ponat arbitrio talem figuram, que multiplicata per eundem divisorem, faciat numerum dicte copulationis, vel fere: quod arbitrium qualiter ex arte habeatur; in sequentibus divisionibus, secundum differentiam ipsorum, ostendere procurabo.

658. Scritti di Leon. Pis. I, 20.

659. Scritti di Leon. Pis. I, 22.

660. Vergl. die Margaritha philosophica; Cardanus, Practica arithmetica, cap. XI; besonders Ramus, Scholae mathematicae (edit. Francof. ad Moen. 1627) S. 115: Omnes, quotquot legerim, doctores artis jubent sinistrorsum ut in additione progredi, mutuando unum e proxima nota superiore, si major est subducendus, quod inferiori proximo reddatur.

661. Scritti di Leon. Pis. I, 24 u. m.

662. Alfred Kunze, die aufsteigenden Kettenbrüche. Weimar 1857.

663. Der entschiedenste Vertreter dieser meinen Ansichten entgegengesetzten Richtung ist wohl H. Prof. Zeller, welcher die ihn bestimmenden Gründe in seiner Geschichte der griechischen Philosophie, 2. Auflage, Tübingen 1856. Bd. I. S. 216—239 zusammengestellt hat. Wenn ich hinzufüge, dass die in meinem Texte hier folgende Polemik sich wesentlich gegen jene Zusammenstellung richtet, so bedarf es meinem verehrten Gegner gegenüber wohl kaum der Bitte, die Sache von der Person zu trennen, wie ich selbst es gethan zu haben mir bewusst bin.

664. Lessing, Axiomata wider den Herrn Pastor Goeze in Hamburg (Carlsruher Gesammtausgabe Bd. 25 S. 91).

665. Weber, Ueber die Identität der Angabe von der Dauer des längsten Tages bei den Chaldäern, Chinesen, Indern. Monatsberichte der berl. Academie 10. April 1862. S. 223.

666. Herodot IV, 98.

667. Herodot VII, 35.

668. Herodot I, 189 und 202.

Bayerische Staatsbibliothek München

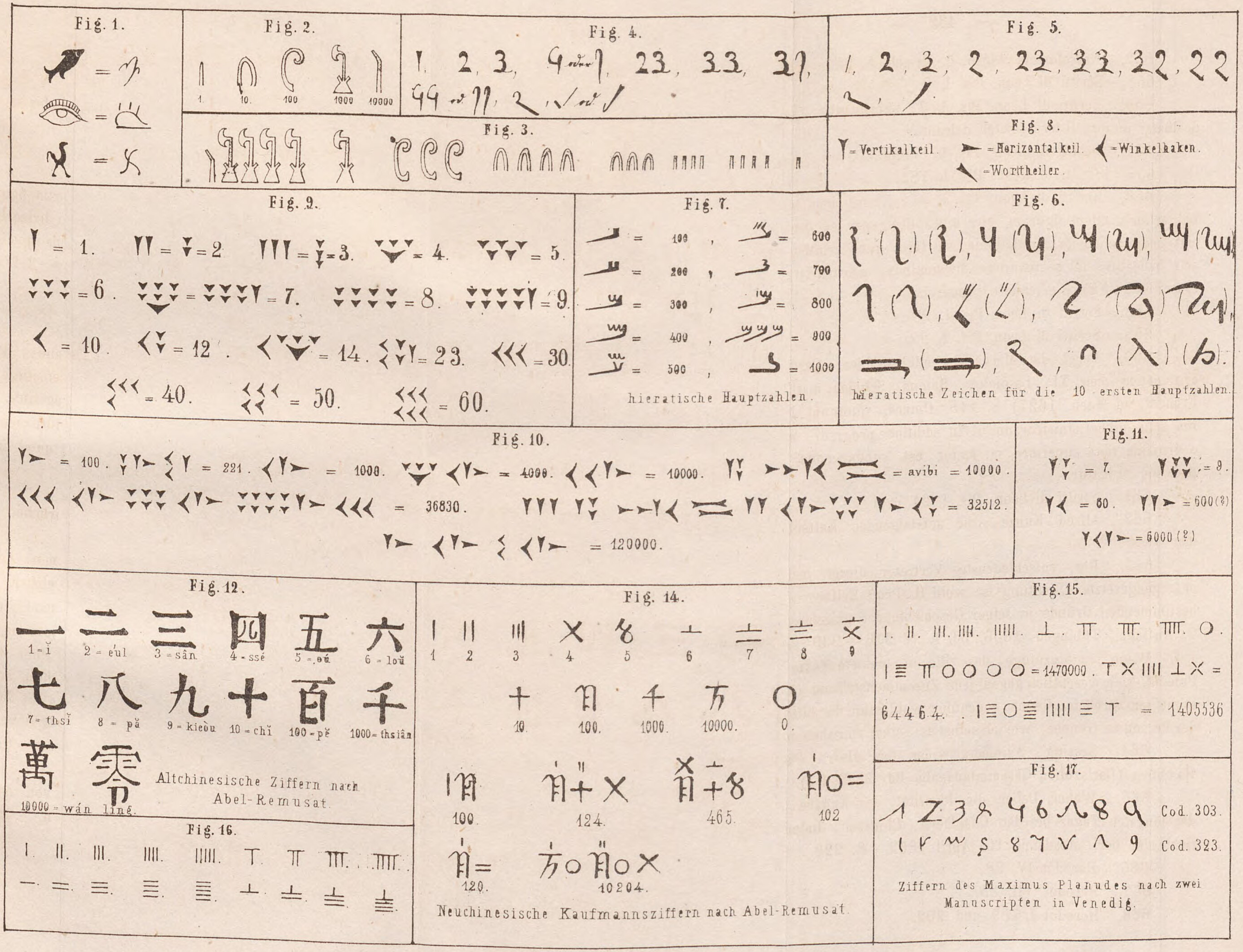
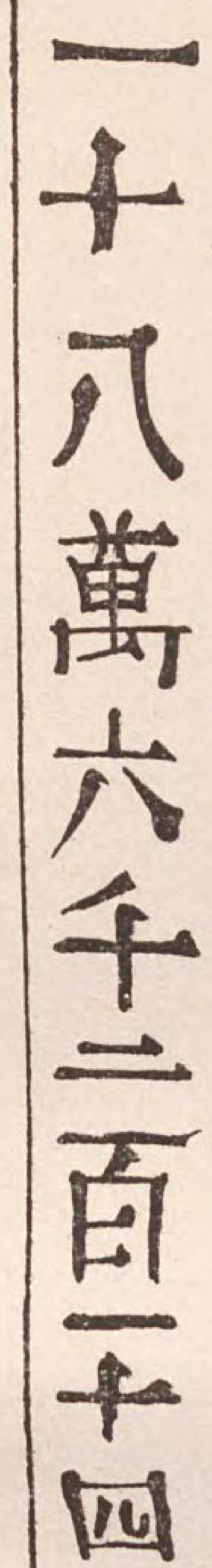

Fig. 1.
Fig. 2.
1. 10. 100 1000 10000
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 8.
= Vertikalkeil. = Horizontalkeil. = Winkelhaken. = Worttheiler.
Fig. 9.
= 1. = 2 = 3. = 4. = 5. = 6. = 7. = 8. = 9. = 10. = 12. = 14. = 23. = 30. = 40. = 50. = 60.
Fig. 7.
100, 600, 200, 700, 300, 800, 400, 900, 500, 1000
hieratische Hauptzahlen.
Fig. 6.
hieratische Zeichen für die 10 ersten Hauptzahlen.
Fig. 10.
= 100. = 221. = 1000. = 4000. = 10000. = avibi = 10000. = 36830. = 32512. = 120000.
Fig. 11.
= 7. = 9. = 60. = 600 (?) = 6000 (?)
Fig. 12.
一 二 三 四 五 六
1 = ĭ 2 = eul 3 = sân 4 = ssé 5 = où 6 = loŭ
七 八 九 十 百 千
7 = thsĭ 8 = pă 9 = kieòu 10 = chĭ 100 = pĕ 1000 = thsiân
萬 零
10000 = wán ling.
Altchinesische Ziffern nach Abel-Remusat.
Fig. 16.
Fig. 14.
1 2 3 4 5 6 7 8 9
10. 100. 1000. 10000. 0.
100. 124. 465. 102
120. 10204.
Neuchinesische Kaufmannsziffern nach Abel-Remusat.
Fig. 15.
= 1470000. = 64464. = 1405536
Fig. 17.
Cod. 303.
Cod. 323.
Ziffern des Maximus Planudes nach zwei Manuscripten in Venedig.

Fig. 13.



= 186214 in alt„ chinesischer Schrift.

Fig. 19.

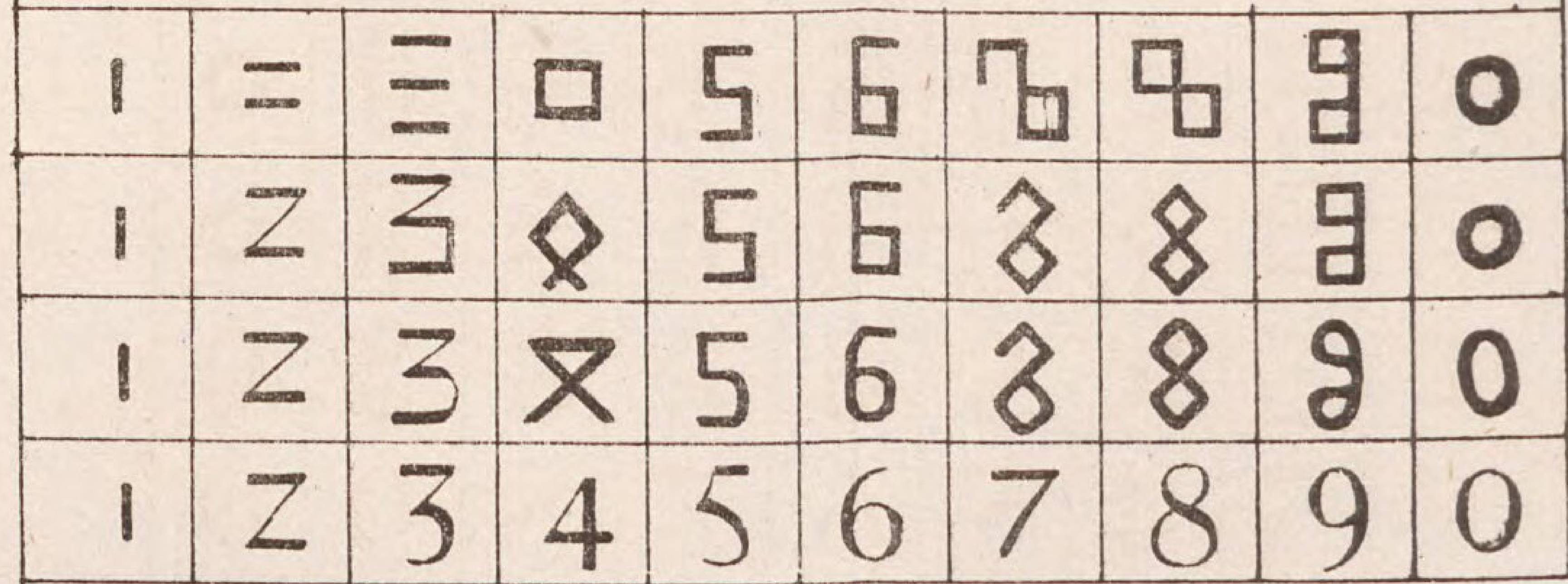


Fig. 18.



Fig. 20.

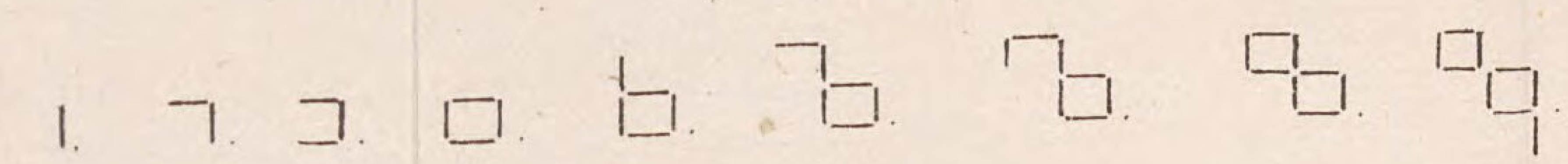
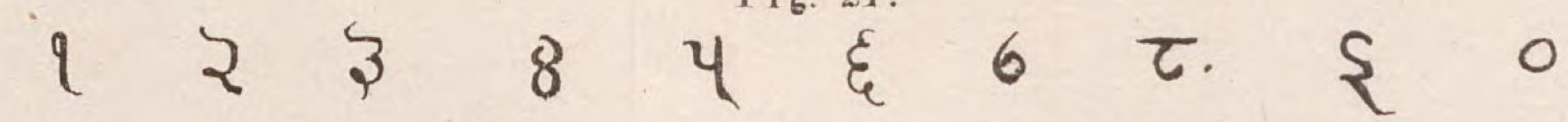


Fig. 21.



moderne Devanagariziffern.

Fig. 22.

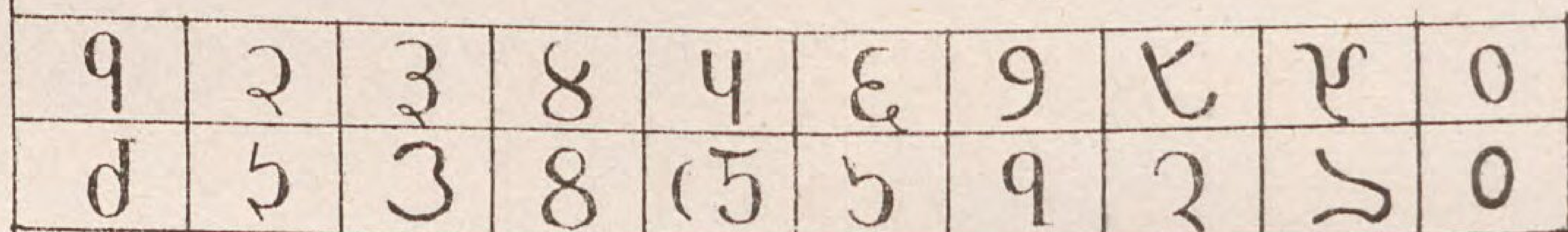


Fig. 24

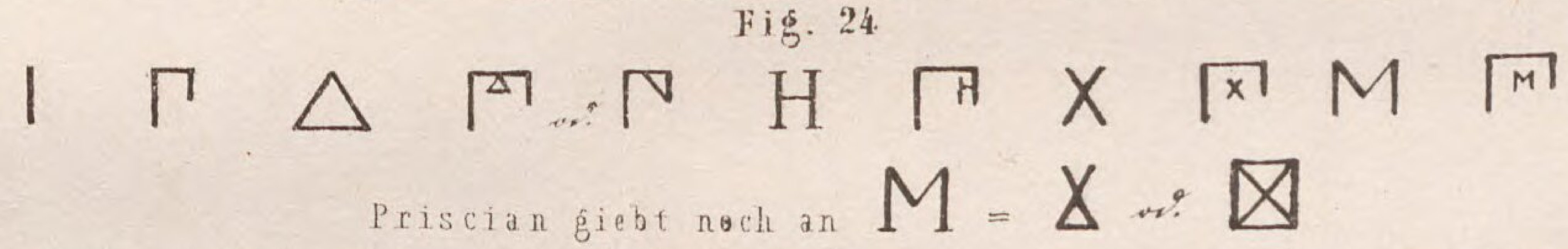
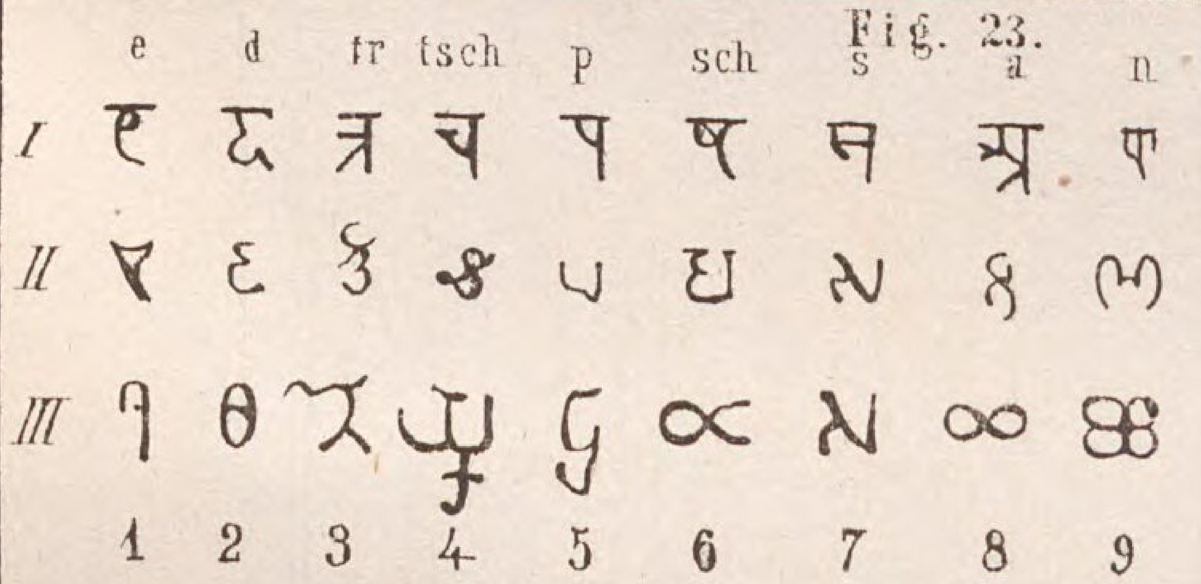


Fig. 23.



I moderne Buchstaben

II alte Buchstaben

III alte Zahlzeichen

Fig. 25.

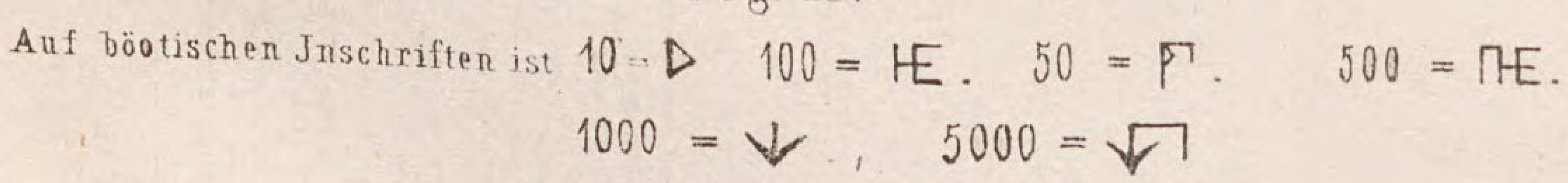


Fig. 26.

A Β Γ Δ Ε Ι Η

1 2 3 4 5 6 7

Θ Ι Κ

8 9 10

Fig. 27.

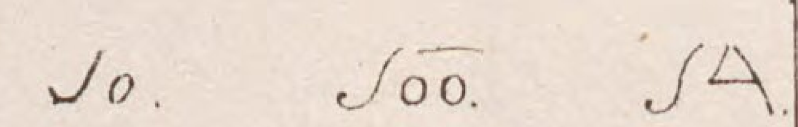


Fig. 28.

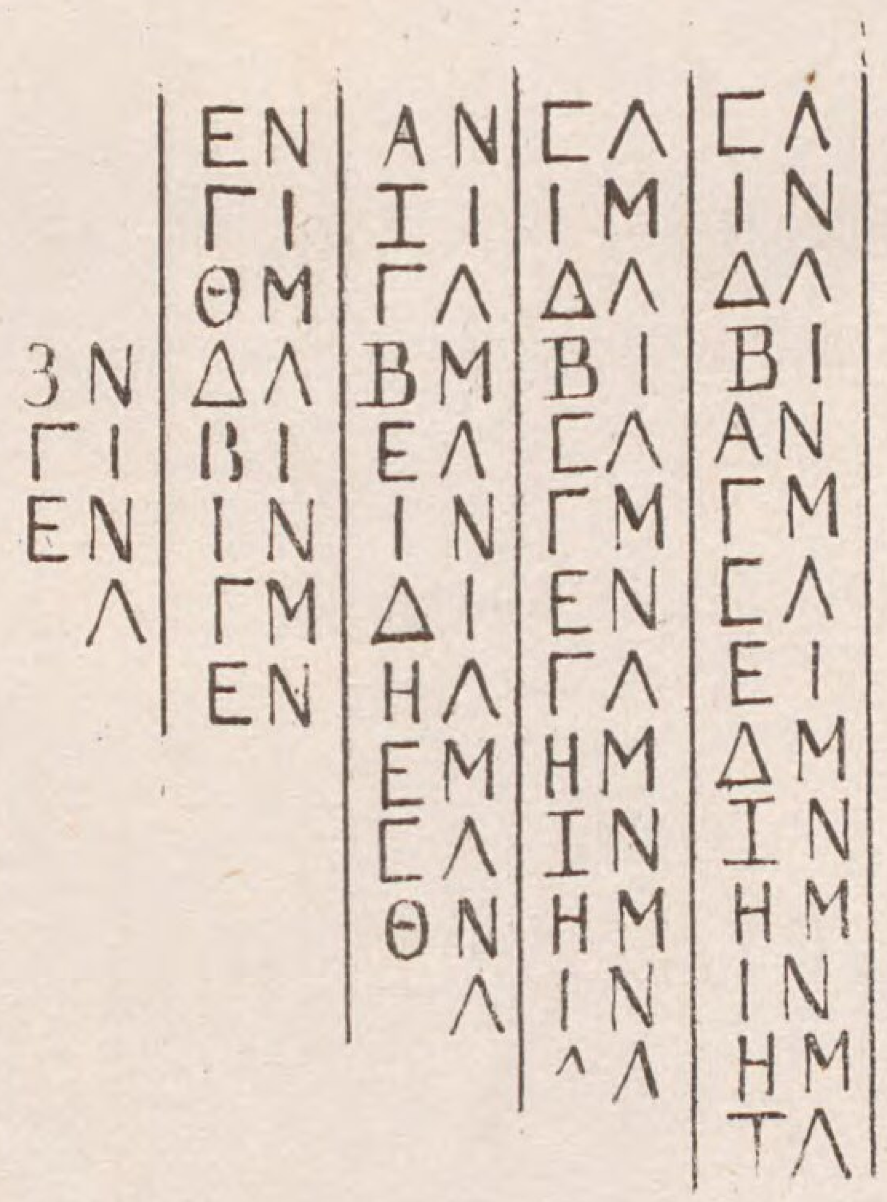


Fig. 30.

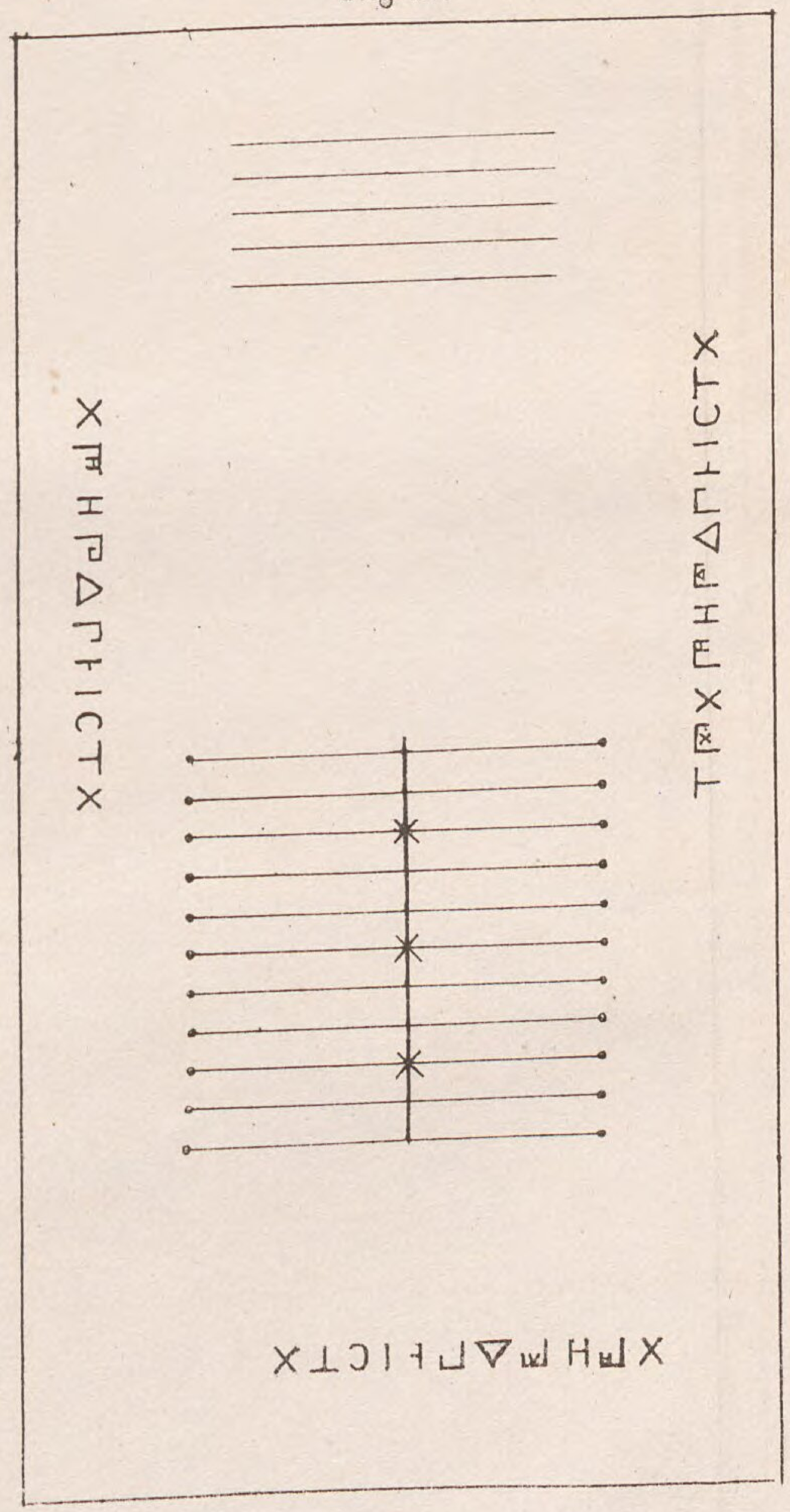


Fig. 29.

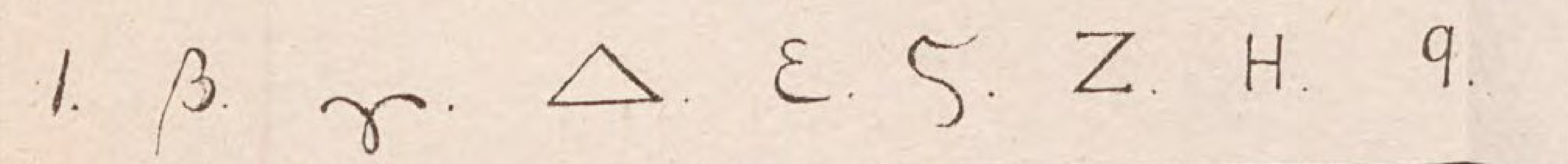


Fig. 31.

G	38		36				
29 F			5		15		80
37 E		67		40		22	
D	54				13	30	9
C	16				14		48
59 B	3		50	61	3	19	
A		10	25	13	47		
	A 16	B	C 38	D 8	E	F	G 63

Fig. 32.

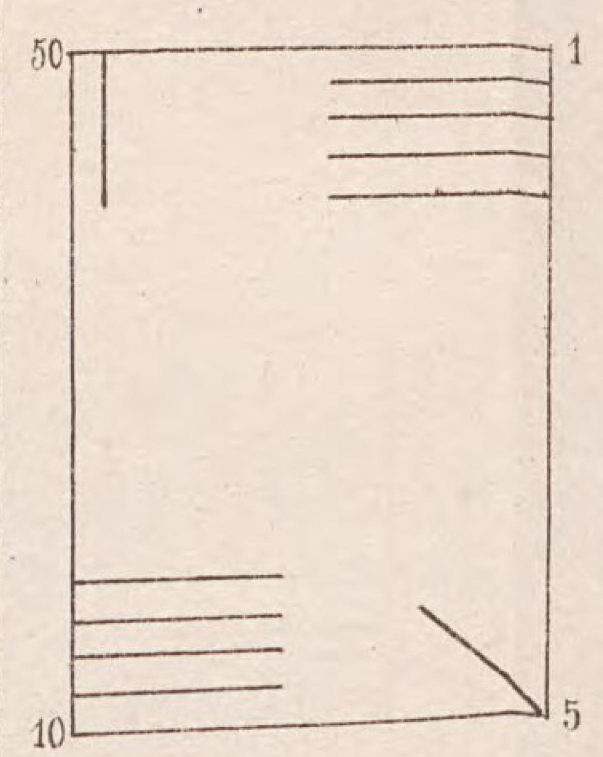


Fig. 33.

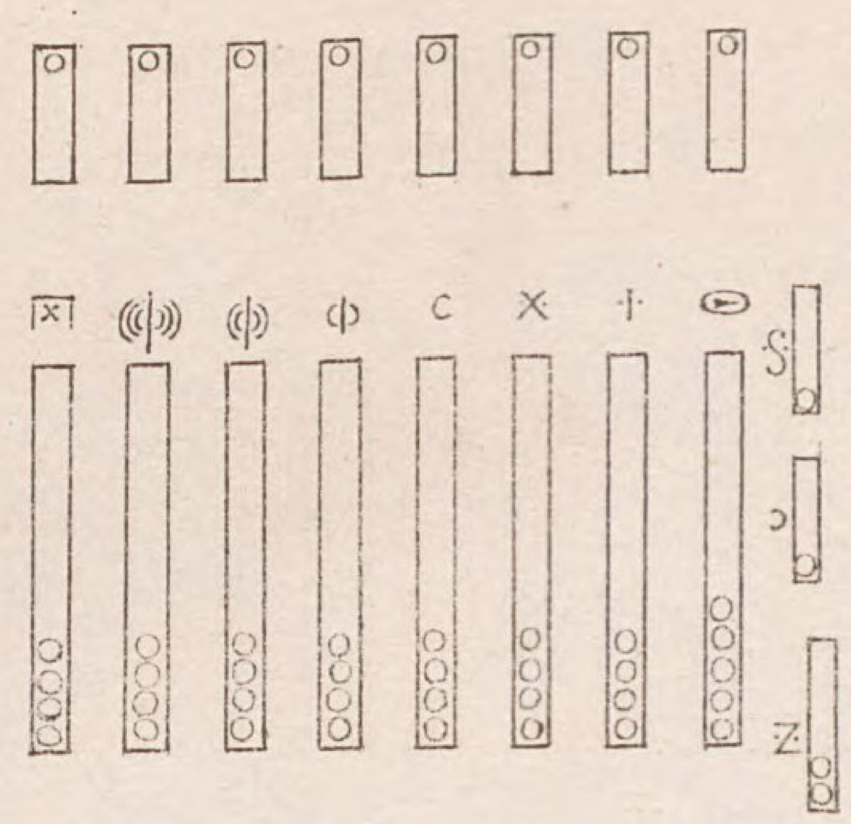


Fig. 34.

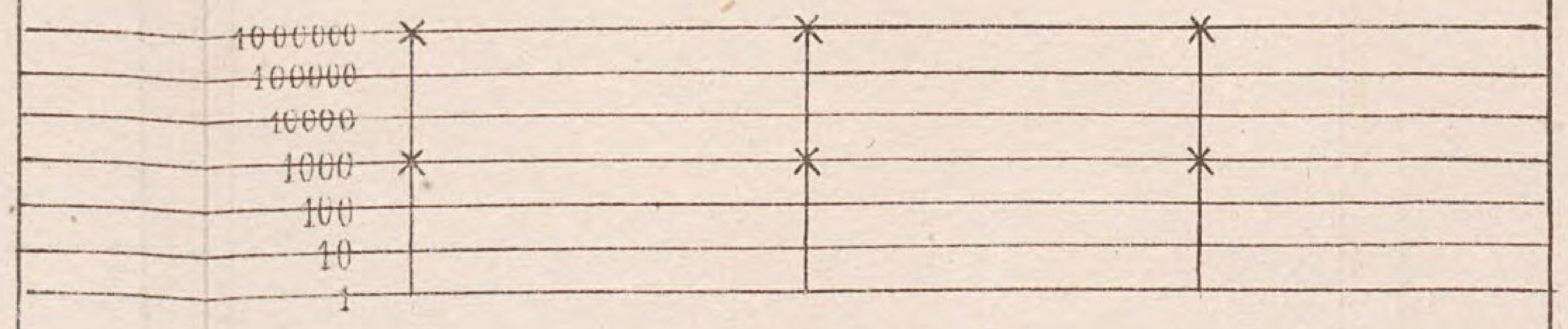


Fig. 35.

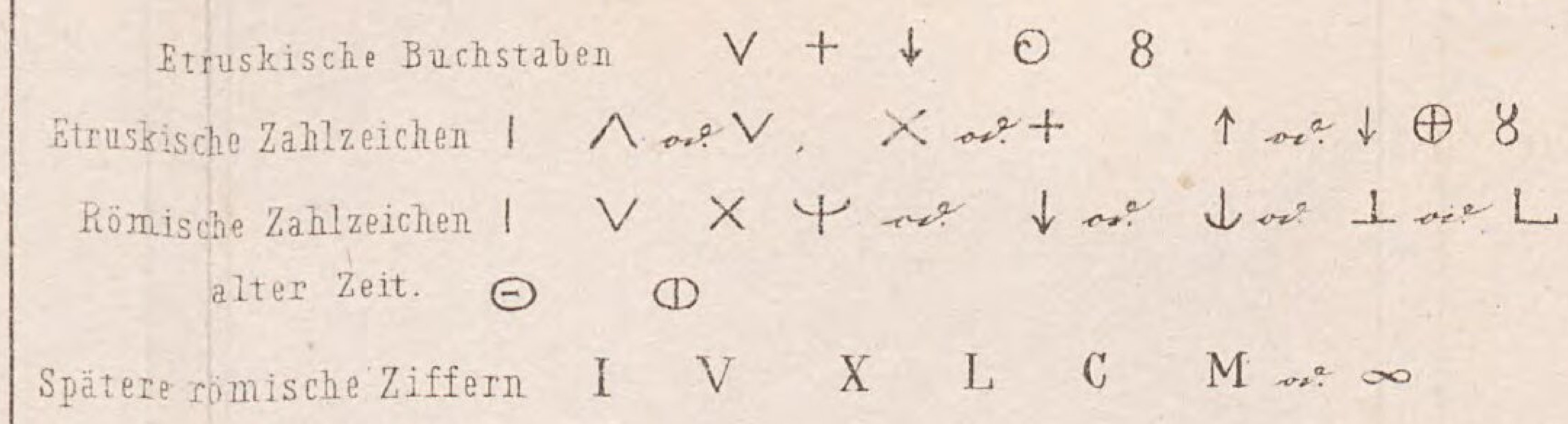
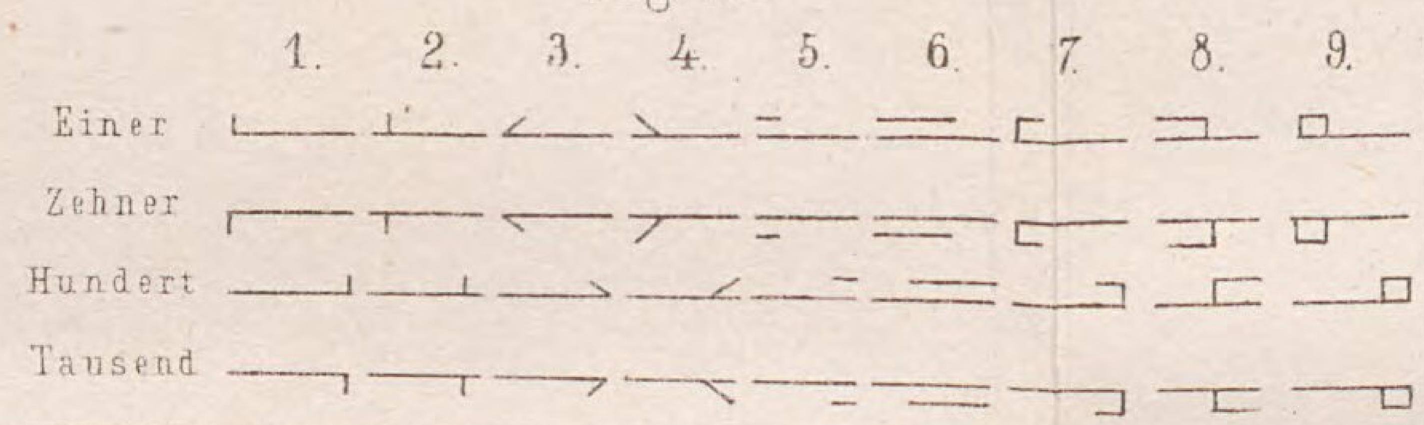


Fig. 36.



Beispiele zu Fig. 36 und Fig. 37.

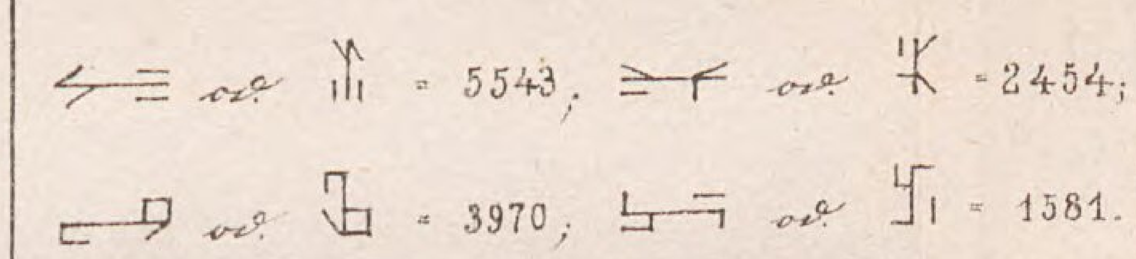


Fig. 37.



Fig. 38.

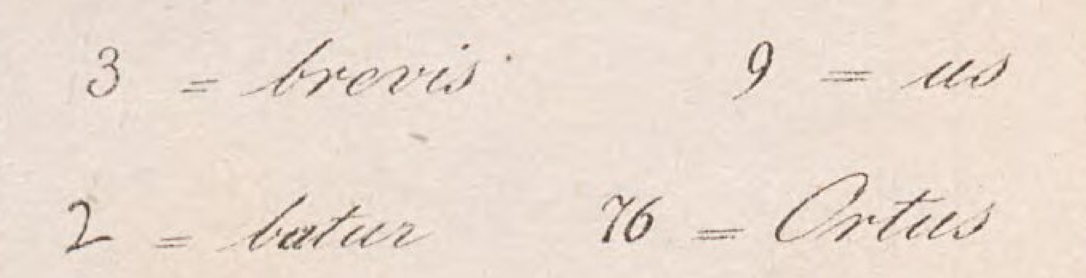


Fig. 39.

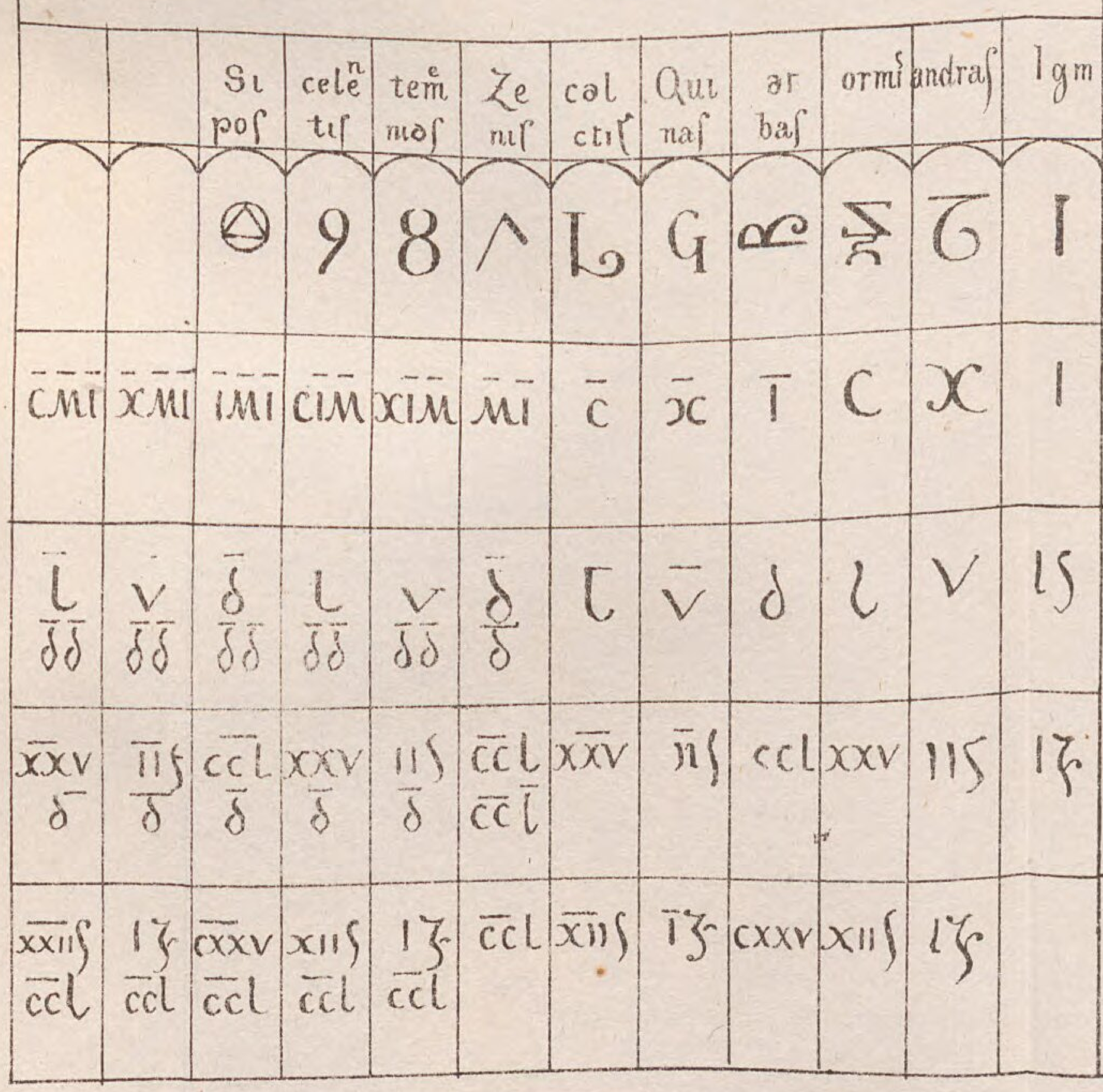


Fig. 40.

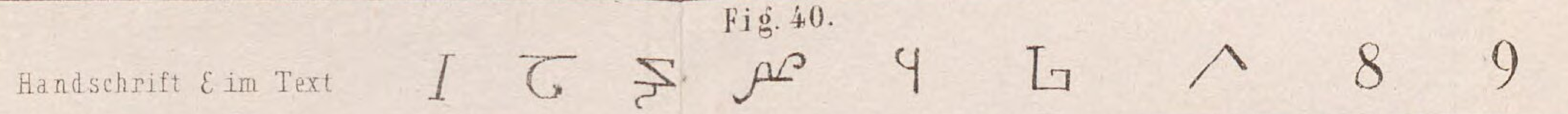


Fig. 41.

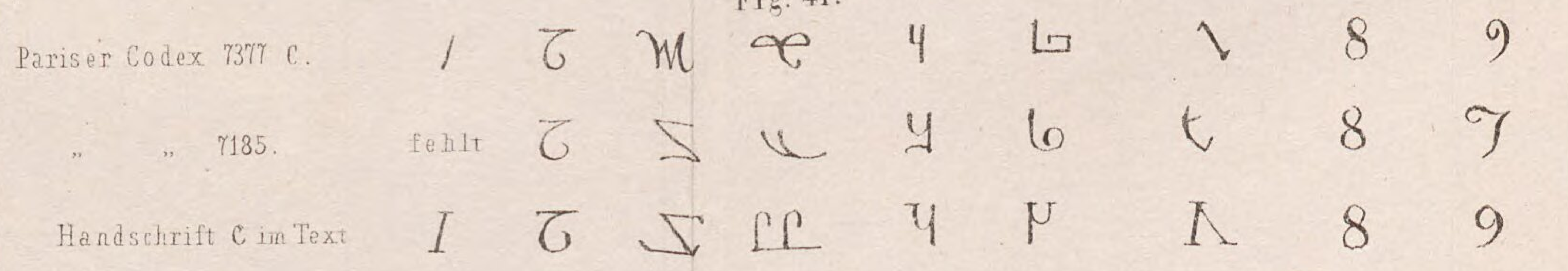


Fig. 43.

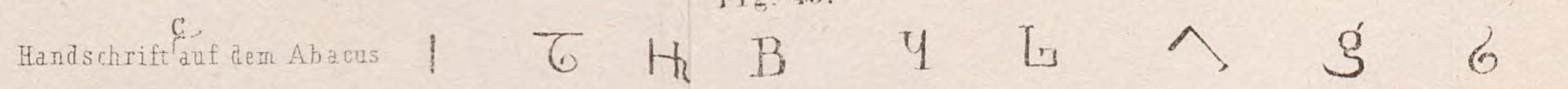


Fig. 42.

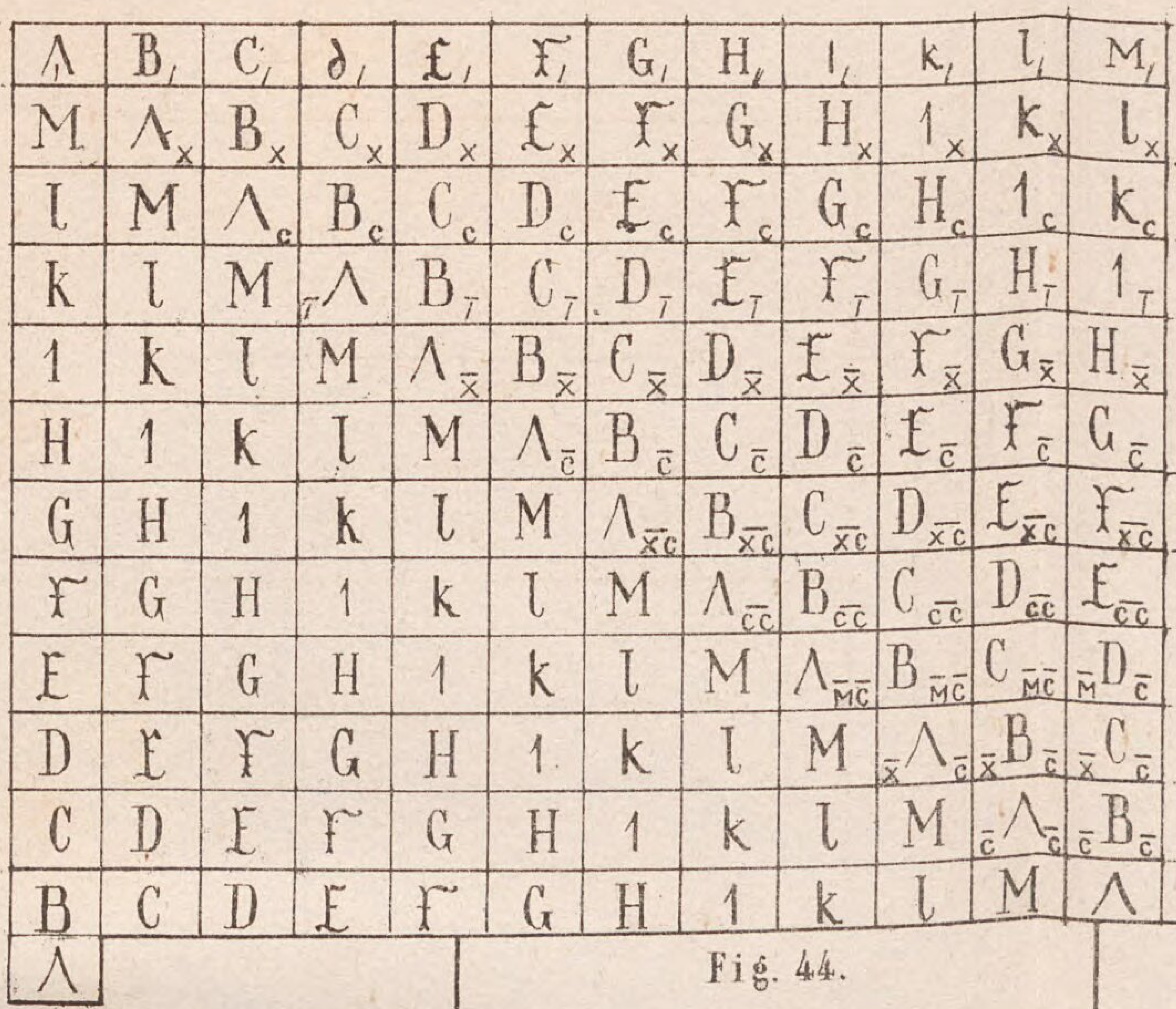


Fig. 45.



Fig. 46.

100 = ק	200 = ר	300 = ש	400 = ת	
500 = תק	600 = תר	700 = תש	800 = תת	900 = תתק

Fig. 47.

20 = כ	40 = מ	50 = נ	80 = פ	90 = צ
500 = ך	600 = ם	700 = ן	800 = ף	900 = ץ

Fig. 48.

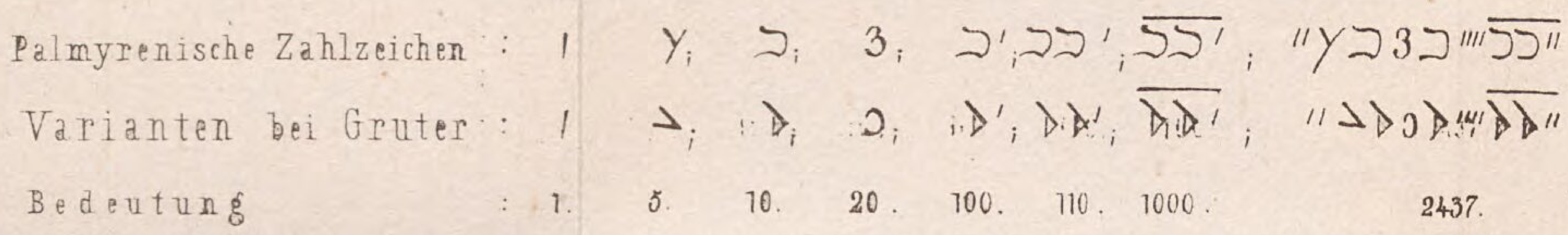
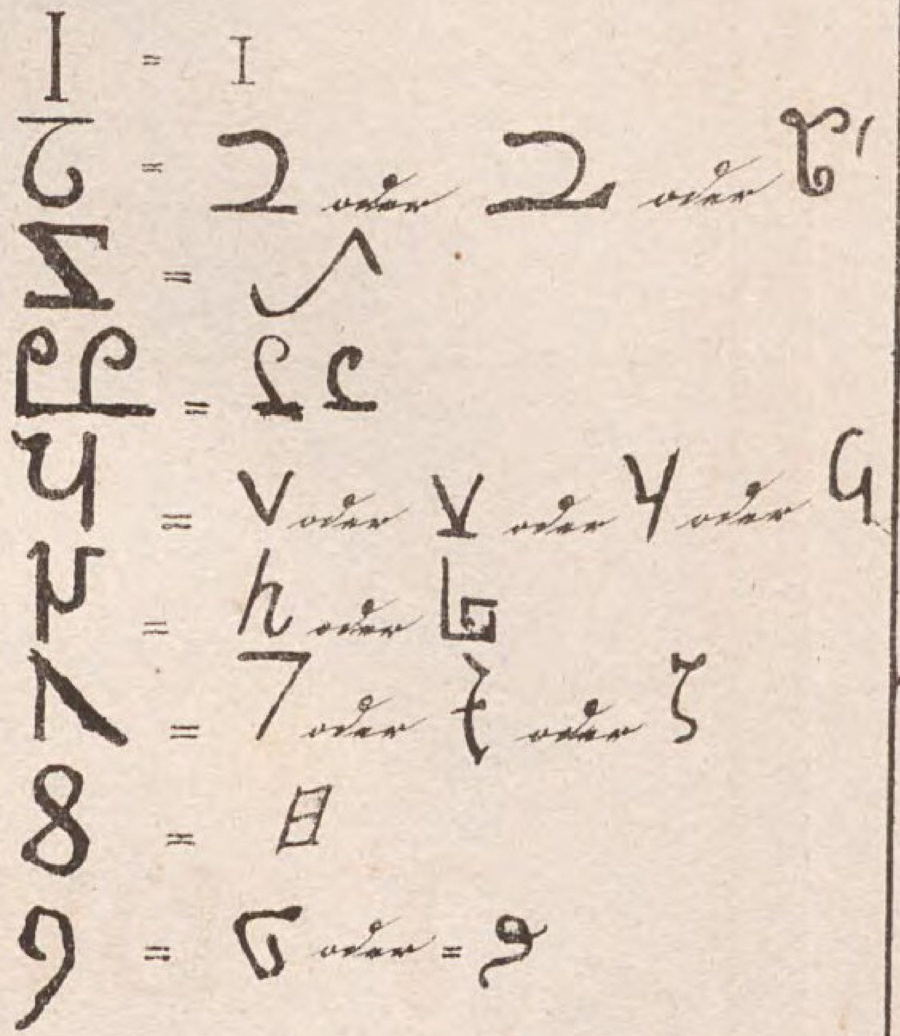
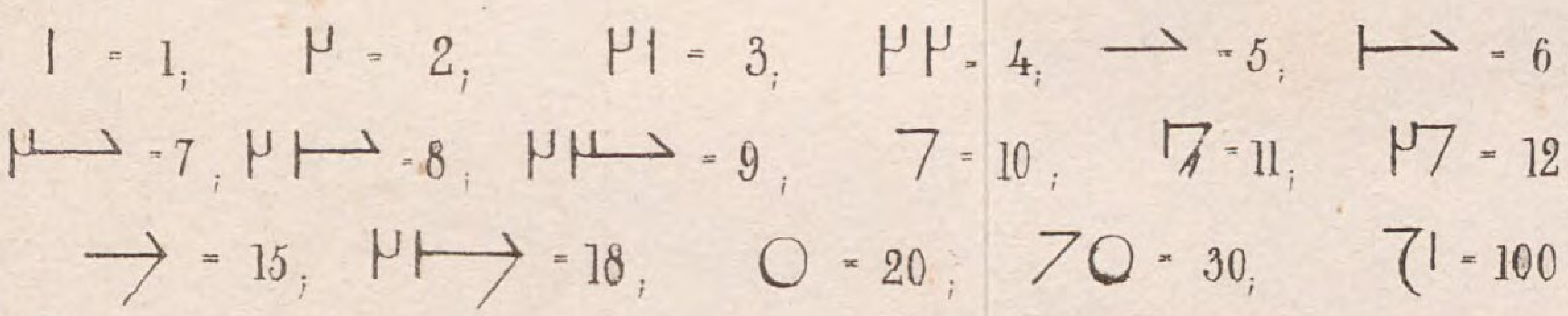


Fig. 44.



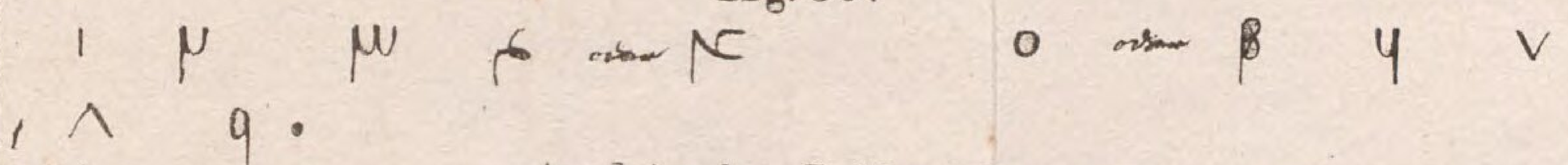
Ursprung der Zeichen des Boethius nach Piccard.

Fig. 49.



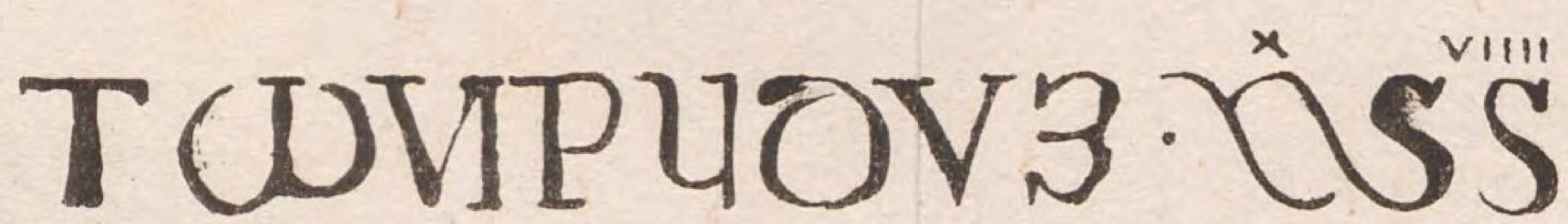
Syrische Zahlzeichen

Fig. 50.



Arabische Zahlzeichen.

Fig. 51.



K. POSCHEGA
Buchbinderei - Stempel
8031 PUCHHEIM
Augsburger Straße 33 1/2

Bayerische StaatsBibliothek

Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Cantor, Moritz,

Mathematische Beiträge zum Kulturleben der Völker

Halle 1863

Math.u. 308 l

urn:nbn:de:bvb:12-bsb10594474-5